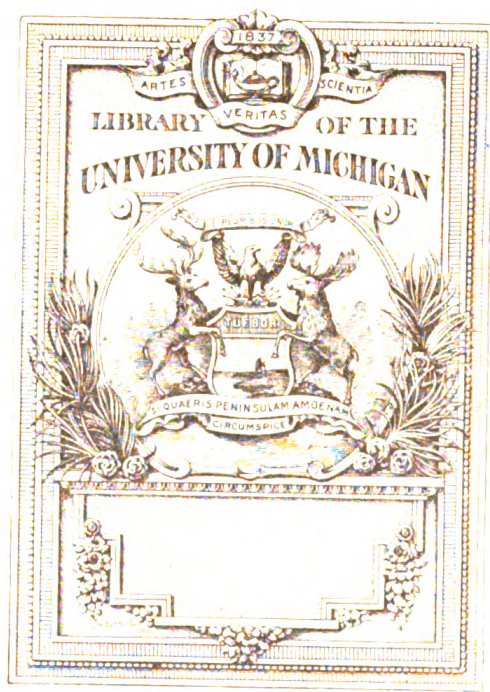




Mathematics

QA

1

.B58



G. Schiaparelli

13

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN
VON
GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

3. FOLGE. ZEHNTER BAND.

MIT BILDNIS VON G. SCHIAPARELLI ALS TITELBILD
UND 64 TEXTFIGUREN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B.G. TEUBNER.
1909—1910.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Inhaltsverzeichnis.

Autoren-Register.

Cajori, 15.	Loria, 27.	Sutar, 8, 9.
Eneström, 1—4, 12—14, 16—20, 24, 26.	Mansion, 22.	Tyler, 28.
Favaro, 2.	Mikami, 5.	Vivanti, 21.
Heiberg, 10.	Miller, 25.	Vogt, 6.
Kaye, 7.	Sturm, 2.	Wiedemann, 10, 11.
Kraser, 23.		

Sach-Register.

<i>Abu Kamil Schodja</i> , 9.	Lineare Differentialgleichungen, 21.
Aktuelle Fragen, 23.	Literarische Notizen, 30.
Algebra, 8, 18, 25.	Mathematik im allgemeinen, 2, 3.
Anfragen, 12, 14, 17, 22, 24.	Mathematiker-Versammlungen, 30.
Antworten, 18.	Mathematische Geschichtschreibung, 1.
Arabische Mathematik, 8—11.	Mathematisch-historische Vorlesungen, 28, 30.
Arithmetik, 12, 14.	Maximalwerte, 18.
<i>Aryabhatta</i> , 7.	Neuerschienene Schriften, 29.
<i>Ball</i> , 2.	<i>Newton</i> , 16.
Bibliographie, 16, 26, 29.	Optik, 10, 11.
Biographien, 20, 27.	Parabolische Hohlspiegel, 10.
<i>Cantor</i> , 2.	<i>Platon</i> , 6.
Chinesische Mathematik, 5.	Potenzreihen, 17, 24.
Dezimalbruchzeichen, 18.	Preisaufgaben, 30.
Differentialgleichungen, 21.	Preisschriften, 30.
Divisionsverfahren, 14.	<i>Puiseux</i> , 23.
Elliptische Integrale, 23.	<i>Ramus</i> , 14.
Ernennungen, 30.	Rechenschieber, 15.
<i>Euler</i> , 20, 21, 30.	Reihen, 17, 24.
Fünfeck, 9.	Rezensionen, 3, 4, 16, 26.
Funktionentheorie, 23, 24.	Resiproke Quadratzahlen, 17.
Geometrie, 5, 9—12, 19, 22.	<i>Schiaparelli</i> , 27.
<i>Gray</i> , 16.	Sphärische Hohlspiegel, 11.
Griechische Mathematik, 6.	„Subject index“, 26.
Gruppentheorie, 25.	Sternvielecke, 12.
Hohlspiegel, 10, 11.	Symmetrische Figuren, 22.
<i>Ibn al Haitam</i> , 10, 11.	Todesfälle, 30.
Indische Mathematik, 7.	Trigonometrie, 8.
Irrationale Größen, 6.	Vielecke, 9, 12.
<i>Jacobi</i> , 23.	<i>Voss</i> , 4.
Kegelschnitte, 10.	Wesen der Mathematik, 4.
Koordinaten, 19.	Wissenschaftliche Chronik, 30.
Kreisquadratur, 5.	Zehneck, 9.
Krummlinige Koordinaten, 19.	

Allgemeines über Geschichte der Mathematik.

Seite

1. Zur Frage der verschiedenen Arten mathematischer Geschichtsschreibung. Von G. ENESTRÖM 1—14
2. Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“. Von G. ENESTRÖM, A. FAVARO, A. STURM 53—83, 164—179, 260—277, 341—350
3. Ball. A short account of the history of mathematics (1908). Rezension von G. ENESTRÖM 85—88
4. Voss. Über das Wesen der Mathematik (1908). Rezension von G. ENESTRÖM 181—184
5. The circle-squaring of the Chinese. By YOSHIO MIKAMI . . . 198—200

Geschichte des Altertums.

6. Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts. Von HEINRICH VOGT 97—155

Geschichte des Mittelalters.

7. The two Aryabhatas. By G. R. KAYE 289—292
8. Zur Trigonometrie der Araber. Von HEINRICH SUTER. Mit 7 Textfiguren 156—160
9. Die Abhandlung des Abu Kamil Shoga b. Aslam „über das Fünfeck und Zehneck“. Von HEINRICH SUTER. Mit 21 Textfiguren . 15—42
10. Ibn al Haitams Schrift über parabolische Hohlspiegel. Von J. L. HEIBERG und E. WIEDEMANN. Mit 17 Textfiguren . . . 201—237
11. Ibn al Haitams Schrift über die sphärischen Hohlspiegel. Von E. WIEDEMANN. Mit 9 Textfiguren 293—307
12. Über die Geschichte der Sternvielecke im Mittelalter. [Anfrage 145.] Von G. ENESTRÖM 277

Geschichte der neueren Zeit.

13. Über das angebliche Dezimalbruchzeichen einiger der ältesten gedruckten Rechenbücher. Von G. ENESTRÖM 238—243

	Seite
14. Über den Ursprung eines von Ramus (1569) gelehrten Divisionsverfahrens. [Anfrage 144.] Von G. ENESTRÖM	180
15. A note on the history of the slide rule. By FLORIAN CAJORI .	161—163
16. Gray. A bibliography of the works of I Newton (1907). Rezension von G. ENESTRÖM	351—354
17. Über die Geschichte der Reihe der reziproken Quadratzahlen im 17. Jahrhundert. [Anfrage 143.] Von G. ENESTRÖM	83—84
18. Über elementare Herleitung von Maximalwerten. [Antwort auf die Anfrage 94.] Von G. ENESTRÖM	84
19. Über das angebliche Vorkommen krummliniger Koordinaten bei Leibniz. Von G. ENESTRÖM	43—47
20. Eine Legende von dem eisernen Fleiße Leonhard Eulers. Von G. ENESTRÖM	308—316
21. Un tentativo di Eulero di evitare le quantità complesse nella integrazione delle equazioni differenziali lineari. Di G. VIVANTI .	244—249
22. Sur les premières démonstrations de l'équivalence des figures symétriques. [Anfrage 146.] Von P. MANSION	278
23. Die Erklärung der Vieldeutigkeit der elliptischen Integrale bei Jacobi und Puiseux. Von A. KRAZER	250—259
24. Über die Geschichte der Potenzreihe, deren Exponenten eine Potenzreihe n^{ter} Ordnung bilden. [Anfrage 147.] Von G. ENESTRÖM .	350
25. Historical sketch of the development of the theory of groups of finite order. By G. A. MILLER	317—329
26. Royal society of London. Catalogue of scientific papers 1800—1900. Subject index. I. Pure mathematics (1908). Rezension von G. ENESTRÖM	279—281
27. Giovanni Schiaparelli quale storico dell' antica astronomia Di GINO LORIA. Mit Bildnis als Titelbild	330—340

Aktuelle Fragen.

28. On the course in the history of mathematics in the Massachusetts Institute of Technology. By H. W. TYLER	48—52
--	-------

	Seite
29. Neuerschienene Schriften	89—92, 185—190, 282—286, 355—360
Autoren-Register. — Zeitschriften. Allgemeines. — Geschichte des Altertums. — Geschichte des Mittelalters — Geschichte der neueren Zeit. — Nekrologe. — Aktuelle Fragen.	
30. Wissenschaftliche Chronik	93—96, 191—192, 287—288, 361—364
Ernennungen. — Todesfälle. — Die Euler-Ausgabe. — Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften. — Gekrönte Preisschriften. — Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften. — Mathe- matiker-Versammlungen im Jahre 1909. — Vermischtes.	

Namenregister	365—378
-------------------------	---------

Das 1. Heft dieses Bandes (S. 1—96) wurde am 7. Januar 1910 ausgegeben.

„ 2. „ „ „	(S. 97—192)	„ „ 13. Mai	„
„ 3. „ „ „	(S. 193—288)	„ „ 11. August	„
„ 4. „ „ „	(S. 289—378)	„ „ 10. November	„

Zur Frage der verschiedenen Arten mathematischer Geschichtsschreibung.

Von G. ENESTRÖM in Stockholm.

In seinem Artikel *Développements relatifs au projet d'un „Manuel pour les recherches sur l'histoire des mathématiques“*¹⁾ hat Herr LORIA auch die Frage der verschiedenen Arten mathematischer Geschichtsschreibung und der Bewertung dieser Arten gegeneinander behandelt. Da ich selbst die nämliche Frage früher zum Gegenstand einiger Aufsätze²⁾ gemacht habe, und da die Resultate, zu denen ich dabei gelangte, nicht überall mit den Ausführungen des Herrn LORIA übereinstimmen, so werde ich hier die betreffende Abteilung seines Artikels einer näheren Untersuchung unterziehen.

Der wesentliche Inhalt der fraglichen Ausführungen scheint mir auf folgende Weise zusammengefaßt werden zu können:

1. Die Aufgabe der mathematischen Geschichtsschreibung ist nicht nur, über Tatsachen Auskunft zu geben, sondern auch diese zu erklären und ihre Bedeutung als Kulturfaktoren anzugeben;
2. Nur wenn man die allgemeine Kulturgeschichte heranzieht, ist es möglich, die mathematisch-historischen Tatsachen befriedigend zu erklären;

1) G. LORIA, *Développements relatifs au projet d'un „Manuel pour les recherches sur l'histoire des mathématiques“*; *Biblioth. Mathem.* 9, 1908/9, S. 227—236, siehe besonders S. 228—233.

2) G. ENESTRÖM, *Über literarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik*; *Biblioth. Mathem.* 2, 1901, S. 1—4. — *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik*; a. a. O. 4, 1903, S. 1—6. — *Zur Frage über die Behandlung der Geschichte der Mathematik*; a. a. O. 4, 1903, S. 225—233. — *Über regelmäßige und unregelmäßige historische Entwicklung auf dem Gebiete der Mathematik*; a. a. O. 5, 1904, S. 1—4. — *Über die Bedeutung historischer Hypothesen für die mathematische Geschichtsschreibung*; a. a. O. 6, 1905, S. 1—8. — *Die Geschichte der Mathematik als Bestandteil der Geschichte der Wissenschaften*; a. a. O. 7, 1906/7, S. 1—5. — *Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete*; a. a. O. 8, 1907/8, S. 1—12. — *Über kritische Behandlung der Geschichte der Mathematik*; a. a. O. 9, 1908/9, S. 1—14.

3. Folglich ist die kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik dringend zu empfehlen;
4. Diese Behandlungsart ist in Wirklichkeit von maßgebender Seite fast einstimmig empfohlen oder sogar angewandt worden.

Im folgenden werde ich diese vier Thesen auf ihre Richtigkeit prüfen. Aber vorher muß festgestellt werden, in welchem Sinne der Ausdruck „Geschichte der Mathematik“ hier gefaßt werden soll, und überdies ist es angebracht, die Bedeutung des Ausdruckes „kulturhistorische Erklärung“ zu präzisieren. Daß bei Herrn LORIA „Mathematik“ nicht nur die strenge Wissenschaft bedeutet, geht aus seinem ganzen Artikel hervor, aber andererseits schließt er nicht die mathematischen Theorien aus¹⁾; als Gegenstand der Geschichte der Mathematik in seinem Sinne dürfte man also überhaupt alles bezeichnen können, das „mathematisch“ genannt zu werden verdient, besonders mathematische Literatur, mathematischen Unterricht, mathematische Theorien und überdies die Mathematiker selbst.

Der Ausdruck „kulturhistorische Erklärung“ rührt von mir her. Herr LORIA selbst unterscheidet zwei Arten mathematischer Geschichtsschreibung, nämlich die pragmatische und „die höhere“, die man die kulturhistorische nennen kann (Herr LORIA selbst wendet freilich nicht diese Benennung an); jene beschäftigt sich ausschließlich mit den mathematisch-historischen Tatsachen, diese will auch das gesamte Kulturleben berücksichtigen. In beiden Fällen können Erklärungen der behandelten Tatsachen versucht werden, und der Kürze halber nenne ich die Erklärung im ersten Falle „mathematisch-historisch“, im zweiten Falle „kulturhistorisch“, sofern sie von der mathematisch-historischen verschieden ist.

1.

Ich bin wie Herr LORIA der Ansicht, daß die mathematische Geschichtsschreibung nicht nur über die Tatsachen Auskunft geben, sondern diese auch erklären sollte, aber meines Erachtens ist eine Darstellung nicht notwendigerweise um so wertvoller, je größer die Zahl der erklärten Tatsachen ist; denn man muß ebensosehr die Art und die Zuverlässigkeit der Erklärungen in Betracht ziehen. Von rein erkenntnistheoretischem Gesichtspunkte aus könnte man vielleicht behaupten, daß der Wert einer Erklärung von ihrer Art unabhängig sei, allein eine einfache Überlegung zeigt, daß der erkenntnistheoretische Gesichtspunkt nicht immer maßgebend ist. Man erklärt ja eine Tatsache, indem man als ihren Grund eine andere Tatsache oder eine allgemeinere Erfahrung angibt, und wenn die erklärende Tatsache selbst wenigstens scheinbar ebenso zufällig wie die ursprüngliche

1) Siehe beispielsweise a. a. O. S. 228 — 229.

ist, so kann es sehr leicht eintreffen, daß die Erklärung minderwertig wird. Aber auch abgesehen von diesem Umstande kann eine Erklärung fast wertlos werden, wenn die erklärende Tatsache einem ganz anderen Gebiete als die ursprüngliche gehört. Es trifft nämlich nicht selten ein, daß der Zweck der Erklärung ist, eine Erweiterung oder Bestätigung gewisser Kenntnisse zu bieten.

Was ich jetzt bemerkt habe, werde ich an einem Beispiel erläutern. Bekanntlich hat L. EULER im Jahre 1738 eine Abhandlung über die Form der Wurzeln einer allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades veröffentlicht¹⁾, die nach P. H. FUSS am 2. November 1733 der Petersburger Akademie vorgelegt wurde. In dieser Abhandlung hat EULER die Mutmaßung ausgesprochen, daß die Lösung einer Gleichung n^{ten} Grades immer auf die Lösung einer Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades zurückgeführt werden kann, und zwar so, daß die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung von der Form

$$\sqrt[n]{X_1} + \sqrt[n]{X_2} + \dots + \sqrt[n]{X_{n-1}}$$

sein müssen, wobei $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ die Wurzeln der Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades sind; EULER hat auch versucht, diese Mutmaßung näher zu begründen. Nun wissen wir ja, daß diese für $n > 4$ unrichtig ist, und es muß also die Aufgabe des Geschichtsschreibers der Mathematik sein, zu erklären, wie ein so scharfsinniger Mathematiker auf seine unrichtige Ansicht kommen konnte. Für diesen Zweck kann man auf verschiedene Weisen vorgehen; ich nehme beispielsweise an, daß sich fünf Historiker der Mathematik, die Herren A, B, C, D, E, mit der Frage beschäftigt haben und zwar mit folgendem Erfolg.

Historiker A hat ermittelt, daß EULER gegen Ende des Jahres 1733 kränklich gewesen sein soll, so daß er nur mit Schwierigkeit anstrengendere Gedankenarbeit ausführen konnte.

Historiker B will ausfindig gemacht haben, teils daß EULER auf gespanntem Fuß mit JAKOB HERMANN stand, teils daß dieser wiederholt die Unmöglichkeit der algebraischen Lösung der Gleichungen höherer Grade hervorgehoben hat.

Historiker C behauptet, daß die schweizerischen Mathematiker überhaupt und die Baseler Mathematiker in Besonderheit gerade auf dem Gebiete der Theorie der Gleichungen keine nennenswerten Entdeckungen gemacht haben, und daß sogar auf diesem Gebiete viele grobe Fehler von ihnen begangen worden sind.

Historiker D hat untersucht, bis zu welchem Grade die unvollständige Induktion am Anfang des 18. Jahrhunderts in der Politik

1) L. EULER, *De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio*; Comment. acad. sc. Petrop. 6 (1732/3), 1738, S. 216 — 231.

und der Literatur zur Anwendung kam; es hat sich dabei nach seiner Aussage herausgestellt, daß diese Anwendung fast als ein Charakterszug der Zeit betrachtet werden kann.

Historiker E hat seine Aufmerksamkeit ausschließlich auf die Geschichte der Funktionentheorie vor EULER gerichtet und dabei gefunden, daß man noch am Anfang des 18. Jahrhunderts keine Ahnung von der wirklichen Natur der Funktionen, die nicht explizit algebraisch sind, hatte; man mußte darum als selbstverständlich annehmen, daß eine implizite algebraische Funktion auch explizit algebraisch sei.

Auf Grund dieser Überlegungen werden nun die fünf Historiker vielleicht geneigt sein, als Erklärungsgründe der fraglichen Tatsache vorzuschlagen:

Historiker A: EULERS Gesundheitszustand;

Historiker B: EULERS Abneigung gegen HERMANN;

Historiker C: EULERS Nationalität und Erziehung;

Historiker D: Die politischen und literarischen Zeitverhältnisse;

Historiker E: Den Stand der Funktionentheorie zu EULERS Zeit.

Die erste Erklärung ist offenbar von großem Interesse, wenn es sich um eine Geschichte der Mathematiker handelt, und ebenso wenn man den Einfluß der Gesundheit auf die Geistesarbeit studieren will. Aber sonst ist die Erklärung fast wertlos, weil die Frage: „Warum beschäftigte sich EULER mit der Theorie der Gleichungen, bevor er ganz gesund geworden war“ nicht beantwortet worden ist und sicherlich ebenso schwierig wie die gestellte Frage sein muß. Die drei folgenden Erklärungen können von verschiedenen Gesichtspunkten aus interessant sein. Aber auf die wichtige Frage: „Warum erwies sich gerade in diesem Fall der als Erklärungsgrund vorgeschlagene Umstand so wirkungsvoll“ bekommt man dadurch keine Antwort. Dieselbe Bemerkung gilt auch in betreff der fünften Erklärung. Aber wenn wir annehmen, daß es sich um eine Geschichte der mathematischen Theorien handelt, so ist es klar, daß gerade diese Erklärung an sich großes Interesse bietet, weil man dadurch einen Einblick in den Entwicklungsgang eines wichtigen mathematischen Begriffes bekommt.

Nun kann man ja einwerfen, daß keine der fünf Erklärungen besonders gelungen ist, und daß die Sache ganz anders liegen würde, wenn man einen Erklärungsgrund entdeckt hätte, dem ein sehr hoher Grad von Wahrscheinlichkeit zukommt. In diesem Fall würden nämlich die übrigen Erklärungsversuche in Fortfall kommen, unabhängig von ihrer Art. Der Einwurf ist nicht ganz unberechtigt, und ich werde weiter unten auf ihn zurückkommen. Hier genügt es konstatiert zu haben, daß eine Erklärung

unter gewissen Umständen fast wertlos werden kann, wenn sie ein Ereignis auf ein anderes Ereignis zurückführt, das ebenso zufällig wie das ursprüngliche ist, oder wenn man die Erklärung für einen besonderen Zweck zu bekommen wünscht.

Daß die Bedeutung, die die mathematischen Errungenschaften für die Kultur haben, von der mathematischen Geschichtsschreibung berücksichtigt werden soll, hat Herr LORIA mehr im Vorübergehen bemerkt¹⁾, und meines Erachtens mit gutem Recht, weil diese Bedeutung nur verhältnismäßig selten festgestellt werden kann.²⁾ Ich begnüge mich daher, hervorzuheben, daß ich prinzipiell mit ihm einverstanden bin, daß aber das Resultat der folgenden Untersuchung unabhängig ist von der Stellung, die man zu dieser Frage einnimmt.

2.

Wie Herr LORIA durch Belege nachweist, gibt es gewisse mathematisch-historische Tatsachen, die nur dann befriedigend erklärt werden können, wenn man die allgemeine Kulturgeschichte heranzieht, und in erster Linie ist dabei der Stand der Mathematik zu einer gewissen Zeit oder bei einem gewissen Volke zu nennen. Es ist ja ohne weiteres klar, daß die mathematische Forschungsarbeit besonders gedeihen muß, wenn die geistige Kultur einen gewissen Aufschwung aufzuweisen hat, und ebenso klar ist es z. B., daß die Richtung der mathematischen Forschung zum Teil von dem Kulturleben abhängig ist, und daß die politischen Verhältnisse einen gewissen Einfluß auf die schnellere oder langsamere Verbreitung der mathematischen Errungenschaften haben müssen. Auch gewisse mathematisch-historische Tatsachen von etwas speziellerer Art können kulturhistorisch erklärt werden. Aber je mehr man auf die Einzelheiten eingeht, um so unsicherer werden solche Erklärungen und um so mehr wird es wünschenswert, daß der Geschichtsschreiber eine umfassende Sachkunde und einen kritischen Blick besitzt. Daß gewisse Zweige der Mathematik nicht selten von anderen Wissenschaften beeinflusst worden sind, kann man nicht in Abrede stellen, und selbstverständlich soll der Geschichtsschreiber auf Fälle dieser Art aufmerksam machen; daß andererseits die Forschungsarbeit der Mathematiker zuweilen von politischen oder sozialen Verhältnissen abhängig gewesen ist, soll auch nicht bezweifelt werden. Aber wenn man bestimmte mathematisch-historische Tatsachen auf diese Weise erklären will,

1) LORIA, a. a. O. S. 236. Herr LORIA bemerkt in betreff der mathematisch-historischen Tatsachen, daß es nötig ist, „en fixer la signification et la place dans l'histoire générale de la pensée“.

2) Vgl. G. ENESTRÖM, *Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete*; Biblioth. Mathem. 8., 1907/8, S. 11.

muß man meines Erachtens außerordentlich vorsichtig sein. Gerade das Beispiel, das Herr LORIA anführt, um zu zeigen, daß mathematisch-historische Tatsachen zuweilen nur durch Hinweis auf politische Verhältnisse eine befriedigende Erklärung finden können, ist meines Erachtens ein Beleg für die Notwendigkeit einer solchen Vorsicht. Dieses Beispiel bezieht sich auf die CANTORSche Erklärung des Streites zwischen NEWTON und LEIBNIZ; als Grund, warum sich dieser Streit so zuspitzen konnte, verweist CANTOR¹⁾ bekanntlich darauf, daß NEWTON ein fanatischer Tory, LEIBNIZ dagegen der Berater des Thronkandidaten der Whigs war. Aber diese Erklärung ist höchst unsicher, denn es gibt zahlreiche Belege dafür, daß hartnäckige Streitigkeiten zwischen Mathematikern, die nicht politische Gegner waren, vorgekommen sind, so daß diese Streitigkeiten vorzugsweise andere Ursachen haben müssen; ich verweise nur auf den Streit zwischen JAKOB und JOHANN BERNOULLI. Nebenbei bemerke ich, daß die Bedeutung der Prioritätsstreitigkeiten für die Geschichte der Mathematik meiner Ansicht nach ziemlich klein ist, so daß der von Herrn LORIA angeführte Beleg nicht besonders beweiskräftig gewesen wäre, auch wenn man die CANTORSche Erklärung als richtig anerkannte. Wenn es dagegen möglich wäre, aus politischen Verhältnissen befriedigend zu erklären, warum die Infinitesimalrechnung gleichzeitig von zwei Mathematikern entdeckt wurde, von welchen der eine einen phoronomischen, der andere einen analytischen Ausgangspunkt benutzte, so würde ich einer Erklärung dieser Art einen weit höheren Wert zumessen.

Es kann von Interesse sein, näher zu präzisieren, auf welchen Gebieten kulturhistorische Erklärungen als besonders zulässig zu betrachten sind. In erster Linie möchte ich dabei die Geschichte des mathematischen Unterrichts nennen; diese ist ja eine Abteilung der Geschichte des Unterrichts, die selbst eine Abteilung der Kulturgeschichte ist. Wenn Herr LORIA also als Beleg für den Wert der kulturhistorischen Erklärung auf eine Abhandlung von C. H. MÜLLER hinweist, so gebe ich gern zu, daß dieser Hinweis beweiskräftig ist, aber freilich nicht in betreff der Geschichte der Mathematik im allgemeinen, sondern nur in betreff der Geschichte des mathematischen Unterrichts. Der historische Teil der Abhandlung des Herrn MÜLLER bezieht sich nämlich ausschließlich auf diesen Gegenstand, obgleich er in der Einleitung einige allgemeine Ausführungen über die Geschichte der Mathematik bringt.

Die mathematische Literatur hat ohne Zweifel einige Berührungspunkte mit den übrigen Literaturzweigen, und bei einer Geschichte der mathematischen Literatur kann es darum zuweilen nützlich sein, die

1) M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 3¹, Leipzig 1901, S. 67.

Kulturgeschichte heranzuziehen, z. B. wenn es sich darum handelt zu erklären, daß große mathematische Werke, für die man kaum auf viele Käufer rechnen konnte, zum Druck befördert worden sind. Je mehr man dagegen auf den wirklich mathematischen Inhalt von Arbeiten, die nicht Lehrbücher sind, eingeht, um so geringer wird der Nutzen, den die Heranziehung der Kulturgeschichte bietet.¹⁾

Auch die Geschichte der Mathematiker kann in gewissem Sinne als eine Abteilung der Kulturgeschichte betrachtet werden. Der Mathematiker ist ja gewöhnlich nicht nur mathematischer Forscher, sondern auch Lehrer, zuweilen überdies Politiker oder Staatsmann. Es ist darum natürlich, daß er von dem gesamten Kulturleben beeinflußt werden muß, und oft selbst einen Einfluß auf seine Zeit üben wird. Aber sobald er speziell als mathematischer Forscher wirksam ist, muß er sich gerade auf Grund des Gegenstandes seiner Forschungen von seiner Umgebung isolieren, und es ist mir darum nicht recht verständlich, was Herr LORIA meint, wenn er mit Bedauern bemerkt, daß bei den modernen Mathematikern eine Tendenz, sich von der Außenwelt zu isolieren, zu konstatieren sei.²⁾

Wenn ich bisher mit den Ausführungen des Herrn LORIA in vielen Punkten einig gewesen bin, so wird die Sachlage eine wesentlich andere, sobald ich die Geschichte der mathematischen Theorien in Betracht ziehe. Herr LORIA gibt allerdings zu, daß es im allgemeinen keine erheblichen Übelstände mit sich führt, wenn man die Geschichte einer mathematischen Theorie pragmatisch behandelt, behauptet aber, daß es eine höhere Behandlungsart gebe, und bei dieser Art müsse man die Kulturgeschichte und die Geschichte der anderen Wissenschaften heranziehen. Wäre es in Wahrheit möglich, auf diese Weise für die mathematisch-historischen Tatsachen mit an Gewißheit streifender Wahrscheinlichkeit die richtigen Erklärungen zu finden, so würde Herr LORIA ohne Zweifel Recht haben. Aber wie ich schon hervorgehoben habe, wird die kulturhistorische Erklärung im allgemeinen um so unsicherer, je mehr man auf die Einzelheiten eingeht, und dies trifft besonders zu hinsichtlich der mathematischen Sätze und Methoden. Man kann darum sagen, daß in diesem Falle das Verzichten auf kulturhistorische Erklärungen nicht nur

1) Darum bin ich nicht ganz mit Herrn LORIA einverstanden, wenn er a. a. O. S. 233 die Geschichte der mathematischen Literatur mit der Geschichte der Literatur im gewöhnlichen Sinne vergleicht, ohne die wesentliche Verschiedenheit in betreff des Inhaltes zu erwähnen. Meines Erachtens wäre es vielmehr am Platze, die Geschichte der Mathematik z. B. mit der Geschichte der Philosophie zu vergleichen.

2) Dagegen bin ich mit ihm einverstanden, wenn er gleichzeitig darauf hinweist, daß die Forschungen auf dem Gebiete der reinen Mathematik auf die Errungenschaften der Nachbargebiete Rücksicht nehmen sollen. Allein dies ist eine ganz andere Sache, die dem Gegenstand meines Artikels fern liegt.

keine Übelstände mit sich bringt, sondern sogar zu empfehlen ist, und daß ein Versuch, die Entdeckungen der mathematischen Sätze und Methoden kulturhistorisch zu erklären, in den meisten Fällen geradezu lächerlich werden würde. Die meisten mathematischen Entdeckungen beruhen nämlich teils auf dem Stande der Mathematik zu dem Zeitpunkt der Entdeckung, teils auf der individuellen Begabung des Entdeckers, teils endlich auf der Eigenart der mathematischen Wissenschaft selbst, und wenn man diesen Gedankengang verfolgt, so gelangt man zu dem Resultate, daß die individuelle mathematische Begabung und die Reihenfolge der mathematischen Begriffe die zwei wichtigsten Erklärungsgründe der mathematischen Entdeckungen sind. Daß die individuelle mathematische Begabung vielleicht in einigen hundert Jahren kulturhistorisch erklärt werden kann, ist an sich nicht undenkbar; aber zurzeit fehlt es uns an jeder Möglichkeit, auch nur einen ersten Versuch in dieser Richtung zu machen.¹⁾

Wenn es also ausgemacht ist, daß man im allgemeinen auf eine befriedigende kulturhistorische Erklärung der mathematischen Entdeckungen verzichten muß, so hat man zunächst in Erwägung zu ziehen, ob überhaupt eine befriedigende Erklärung möglich sei, oder ob man vielleicht die kulturhistorische Erklärung zuletzt als Notbehelf gutheißen muß. Indessen geht aus dem vorhergehenden unmittelbar hervor, daß es zwei andere Erklärungsarten gibt, die viel näher liegen, nämlich die sozusagen psychologische und die mathematisch-historische. Selbstverständlich kann eine psychologische Erklärung von Interesse sein. Wenn man jedoch bedenkt, daß die Geschichte der meisten mathematischen Theorien nicht ohne eingehende mathematische Kenntnisse behandelt und auch nicht ohne mathematische Kenntnisse verstanden werden kann, so bekommt schon hierdurch die mathematisch-historische Erklärung ein ganz besonderes Interesse. Noch größer wird der Wert dieser Erklärung, wenn es erlaubt ist anzunehmen, daß die Entwicklung der Mathematik im wesentlichen regelmäßig verläuft, so daß eigentlich nur bei den Unregelmäßigkeiten eine eingehendere Erklärung nötig ist. Unter solchen Umständen kann zuweilen eine geschickte Zusammenstellung der sukzessiven Errungenschaften auf einem gewissen mathematischen Gebiete ohne weiteres eine befriedigende Erklärung der Tatsachen enthalten. In betreff der Frage, ob die soeben erwähnte Annahme wirklich gutgeheißen werden kann, verweise ich auf einen früheren Artikel.²⁾

1) Vgl. G. ENESTRÖM, *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik*; *Biblioth. Mathem.* 4₃, 1903, S. 1—2. — *Zur Frage über die Behandlung der Geschichte der Mathematik*; *a. a. O.* 4₃, 1903, S. 228, Fußnote 1.

2) G. ENESTRÖM, *Über regelmäßige und unregelmäßige historische Entwicklung auf dem Gebiete der Mathematik*; *Biblioth. Mathem.* 5₁, 1904, S. 1—4.

3.

Durch den Nachweis, daß die kulturhistorische Behandlung im allgemeinen nicht für die Geschichte der mathematischen Theorien paßt, ist die Frage, ob die kulturhistorische Erklärung der mathematisch-historischen Tatsachen dringend zu empfehlen sei, gewissermaßen auf die folgende Frage zurückgeführt: „Inwieweit sind Untersuchungen über die Entwicklung der einzelnen mathematischen Theorien zu empfehlen?“ und diese Frage ist auch an sich von großer Bedeutung, denn in Wahrheit beschäftigen sich die meisten Historiker der Mathematik gerade mit der Geschichte der mathematischen Theorien. In betreff dieser letzten Frage erlaube ich mir zuerst auf zwei frühere Artikel zu verweisen, in denen ich nachgewiesen habe, teils daß große Gebiete der Geschichte dieser Theorien bisher nur sehr unvollständig oder fast gar nicht untersucht worden sind, teils daß die schon vorhandenen Darstellungen der Geschichte der Mathematik eine sehr große Zahl von unrichtigen oder unzuverlässigen Angaben enthalten.¹⁾ Natürlich genügen diese Umstände nicht, um zu beweisen, daß die Behandlung der Geschichte der einzelnen mathematischen Theorien empfehlenswert sei, aber sie bekommen eine wirkliche Bedeutung für diesen Zweck, wenn man sie mit zwei anderen Umständen zusammenstellt. Der erste dieser Umstände ist die mehr und mehr zunehmende Gewohnheit, in rein mathematische Arbeiten historische Notizen einzufügen. Es ist nämlich klar, daß das Fehlen von vollständigen und zuverlässigen Vorarbeiten über die Geschichte der mathematischen Theorien dazu veranlassen muß, daß die fraglichen Notizen oft unrichtig oder wenigstens wesentlich unvollständig werden, und selbstverständlich ist dies ein Übelstand, für dessen Beseitigung die nötigen Maßregeln, wenn irgend möglich, ergriffen werden sollten. Beispielsweise enthält die deutsche Ausgabe der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* eine ziemlich große Zahl von unrichtigen historischen Notizen, und es wäre leicht, solche Notizen auch in anderen kürzlich erschienenen Arbeiten hervorragender Mathematiker unserer Zeit nachzuweisen. Der zweite der von mir angedeuteten Umstände ist die ausgedehnte Berücksichtigung der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik bei dem mathematischen Unterricht, die in unseren Tagen von vielen Seiten gefordert wird. Auch hier ist es klar, daß es sehr bedauerlich wäre, wenn die jetzt allzuoft in den mathematisch-historischen Arbeiten vorkommenden unrichtigen Angaben durch Mathematiklehrer an den Schulen und Universitäten verbreitet würden, und daß es darum

1) G. ENESTRÖM, *Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete*; Biblioth. Mathem. 8, 1907/8, S. 1—12. — *Über kritische Behandlung der Geschichte der Mathematik*; a. a. O. 9, 1908/9, S. 1—14.

dringend zu empfehlen ist, durch neue mathematisch-historische Untersuchungen die alten Angaben zu berichtigen und zu ergänzen.

Der Umstand, daß ich aus den angegebenen Gründen die nicht kulturhistorische Behandlung der mathematischen Theorien in erster Linie befürworte, bedeutet natürlich nicht, daß ich die kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik als nicht empfehlenswert bezeichnen will. Indessen kann ich nicht umhin, zu bemerken, daß diese Behandlungsart vorzugsweise den geschulten Kulturhistorikern überlassen werden sollte. Teils gibt es für Mathematiker, die sich mit historischen Untersuchungen beschäftigen wollen, so viel Arbeit auf dem mathematisch-historischen Gebiete, die nur von Mathematikern ausgeführt werden kann, teils würde der Mathematiker nur ausnahmsweise imstande sein, sich die Kenntnisse zu verschaffen, die nötig sind, Geschichte der Mathematik kulturhistorisch und zugleich streng wissenschaftlich zu behandeln. Leider ist es allzu leicht, Beispiele zu finden, die bezeugen, wie dilettantenmäßig die meisten bisherigen Vertreter der kulturhistorischen Behandlung der Geschichte der Mathematik gearbeitet haben, und wie geringen wissenschaftlichen Wert ihre Arbeiten darum besitzen. Freilich hat Herr LORIA ein „Manuel“ in Aussicht genommen, das gerade alles enthalten soll, was nötig ist, um Geschichte der Mathematik kulturhistorisch zu behandeln; allein meiner Ansicht nach hat er den Nutzen dieses „Manuel“ bedeutend überschätzt. Wenn das Werk wirklich zustande kommt, wird es sich bald zeigen, daß es für seinen Zweck kaum mehr zu bedeuten hat, als eine Sprachlehre für das Schreiben einer Sprache; nur durch wirkliche Schulung wird man sich allmählich die nötige Kompetenz verschaffen können.

4.

Um zu beweisen, daß die kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik fast einstimmig von Autoritäten empfohlen worden ist, verweist Herr LORIA auf Aussprüche oder Arbeiten von G. LIBRI, A. ARNETH, C. I. GERHARDT, M. CANTOR, C. H. MÜLLER und F. KLEIN. Wenn man indessen diese Belege näher untersucht, so findet man, daß die meisten nur bezeugen, daß die kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik in gewissen Fällen empfehlenswert sei.

In erster Linie nennt Herr LORIA seinen Landsmann LIBRI und legt großen Wert auf den Umstand, daß dieser ein leidenschaftlicher Sammler von Büchern und Manuskripten war, so daß man bei ihm nicht ein Vorurteil gegen Spezialforschung voraussetzen kann. Nun hat LIBRI bekanntlich am Anfang des ersten Bandes seiner *Histoire des sciences mathématiques en Italie* einen „Discours préliminaire“ gebracht, der 190 Druckseiten enthält, und worin er den Versuch macht, die Quellen der

geistigen Kultur Italiens nachzuweisen. Ebenso hat LIBRI versucht, die Entwicklung der mathematischen und der allgemeinen Kultur in Italien in ihrem Zusammenhang darzustellen. Aber bekanntlich besteht die LIBRISCHE Arbeit zur Hälfte aus „Notes“, die wertvolle Beiträge zur Geschichte der mathematischen Theorien bieten¹⁾, und LIBRI hat nicht einmal versucht, das meiste Material, das in diesen „Notes“ enthalten ist, kulturhistorisch zu behandeln. Auf die Geschichte der einzelnen Theorien geht LIBRI übrigens nur selten ein, und dann ist seine Darstellung nicht kulturhistorisch. Nebenbei bemerke ich, daß die Sammlermonomanie LIBRIS meines Erachtens nicht geeignet ist, den Wert seines Versuches zu erhöhen, und daß sich dieser Versuch nur auf die ältere Mathematik bezieht; der letzte von LIBRI behandelte Mathematiker ist GALILEI.

Aus der Einleitung zur *Geschichte der reinen Mathematik* von ARNETH zitiert Herr LORIA den Ausspruch²⁾: „Als Geschichte des reinen Denkens . . . darf sie [die Geschichte der Mathematik] nicht getrennt werden von der Entwicklungsgeschichte des menschlichen Geistes, also von der allgemeinen Kulturgeschichte“. Aber wenn man nachsieht, wie ARNETH wirklich die Geschichte der neueren Mathematik behandelt hat³⁾, so findet man, daß sie nur nebenbei einige vereinzelte Betrachtungen über die Entwicklungsgeschichte des menschlichen Geistes enthält, und aus seiner Darstellung ist nicht einmal möglich zu erkennen, daß eine ausführliche Geschichte der mathematischen Theorien kulturhistorisch behandelt werden kann.

Noch geringeren Wert hat ein von Herrn LORIA angeführter Ausspruch GERHARDTS im Vorwort zur *Geschichte der Mathematik in Deutschland*⁴⁾: „Ich hatte die Absicht, die Geschichte der Mathematik in Deutschland auf dem Hintergrund der allgemeinen deutschen Kulturgeschichte zu zeichnen“. Die Geschichte der deutschen Mathematik bringt nur Bruchstücke einer Geschichte der mathematischen Theorien, und die mathematisch-historische Erklärung kann darum weniger oft zur Anwendung kommen, sofern man sich

1) Herr LORIA verwundert sich (a. a. O. S. 229 Fußnote 4) darüber, daß B. LEFEBVRE die LIBRISCHE Arbeit lediglich als eine Sammlung von Noten und Aktenstücken bezeichnet hat, und formell ist diese Angabe natürlich unrichtig, da die Arbeit überdies eine zusammenhängende historische Darstellung enthält, die die Hälfte des Umfanges in Anspruch nimmt. Andererseits beschäftigt sich diese Darstellung nur in zweiter Linie mit der Geschichte der mathematischen Theorien, so daß die Noten und Aktenstücke vom mathematisch-historischen Gesichtspunkte aus von größerem Interesse als der eigentliche Text sind.

2) A. ARNETH, *Die Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwicklung des menschlichen Geistes*, Stuttgart 1852, S. 5.

3) A. ARNETH, a. a. O. S. 228 — 291.

4) C. I. GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, München 1877, S. IX.

wie GERHARDT wirklich auf die deutsche Mathematik beschränkt; andererseits gibt es bei der Behandlung der Mathematik in einem einzelnen Lande einen bestimmten Anlaß, die kulturhistorische Darstellung, so weit möglich, anzuwenden. Aber ob GERHARDT kompetent war, eine solche Darstellung durchzuführen, ist höchst unsicher; jedenfalls hat er keinen Versuch gemacht, seine Absicht zu verwirklichen.

Wie Herr LORIA richtig bemerkt, hat CANTOR teils in den *Mathematischen Beiträgen zum Kulturleben der Völker*, teils im ersten Bande seiner *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* eine kulturhistorische Darstellung zu bieten versucht. Allein in den zwei folgenden Bänden, die weit mehr als der erste Beiträge zur Geschichte der mathematischen Theorien enthalten, fehlt im wesentlichen diese Darstellungsart, und man könnte vielmehr daraus folgern, daß eine kulturhistorische Behandlung der Geschichte der neueren Mathematik nicht zu empfehlen oder nicht möglich sei.

Daß die Abhandlung von C. H. MÜLLER hier nicht in Betracht kommen kann, weil sie sich ausschließlich mit der Geschichte des mathematischen Unterrichts beschäftigt, habe ich schon oben bemerkt; in betreff der Frage, ob die Ausführungen, die in der Einleitung der Abhandlung vorkommen, für die Geschichte der mathematischen Theorien passen, verweise ich auf einen früheren Artikel.¹⁾

Zuletzt zitiert Herr LORIA einen Passus von F. KLEIN, worin bemerkt wird, daß es angebracht sein kann, gewisse Einzelheiten der Geschichte der mathematischen Literatur auf den Hintergrund der allgemeinen Geschichte zu beziehen. Mit der Bemerkung bin ich einverstanden; aber daraus folgt gar nicht, daß die Geschichte der mathematischen Theorien auf diesen Hintergrund bezogen werden kann oder soll.

Am Anfang meines Artikels habe ich angegeben, wie der wesentliche Inhalt der Ausführungen des Herrn LORIA meines Erachtens zusammengefaßt werden zu können scheint. In der Tat gibt es bei Herrn LORIA gewisse Bemerkungen, die darauf hindeuten, daß seine Ansichten nicht besonders weit von den meinigen verschieden sind, und daß er also nicht ohne Vorbehalt die vier Thesen als eine Zusammenfassung seiner Ausführungen anerkennen will. Beispielsweise identifiziert er die von ihm als „höhere“ bezeichnete Behandlung der Geschichte der Mathematik mit der Darstellung, die ich in einem früheren Artikel²⁾ „wissenschaftlich“

1) G. ENESTRÖM, *Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete*; *Biblioth. Mathem.* 8₃, 1907/8, S. 11.

2) G. ENESTRÖM, *Über literarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik*; *Biblioth. Mathem.* 2₃, 1901, S. 1—4.

genannt habe, und verweist in diesem Zusammenhang auf MONTUCLA und HANKEL. Aber diese „wissenschaftliche“ Darstellung ist im wesentlichen dieselbe, die ich gemeint habe, als ich von „mathematisch-historischer Erklärung“ gesprochen habe, und wenn man die von Herrn LORIA zitierten Stellen bei MONTUCLA und HANKEL liest, so findet man, daß keiner von diesen die kulturhistorische Erklärung empfiehlt; MONTUCLA hebt nur hervor, daß die Geschichte der Mathematik eine Geschichte der mathematischen Theorien, nicht eine Geschichte der Mathematiker oder der mathematischen Schriften sein soll, während HANKEL bemerkt, daß die Geschichte der Mathematik eine Entwicklungsgeschichte, nicht nur eine Entdeckungsgeschichte zu bieten hat. Ebenso sucht Herr LORIA die Notwendigkeit der „höheren“ Behandlung der Geschichte der Mathematik dadurch zu begründen, daß er auf den Nutzen hinweist, den P. TANNERY von seinen kulturhistorischen Studien hatte, als er die Lebenszeit des DIOPHANTOS feststellen wollte. Aber hier handelt es sich nicht um die Erklärung einer mathematisch-historischen Tatsache, und man könnte darum meinen, daß Herr LORIA in Wahrheit den Historikern der Mathematik die Kulturgeschichte nicht als Erklärungsgrund dieser Tatsachen, sondern vielmehr als Studiengegenstand empfehlen will. Ferner hebt Herr LORIA selbst im Vorübergehen am Ende einer langen Fußnote¹⁾ hervor, wie gefährlich es zuweilen sein kann, bei der Bearbeitung eines gegebenen mathematisch-historischen Materials die „höhere“ Behandlungsweise zu versuchen.

Aber auch wenn sich die von mir nachträglich ausgesprochene Mutmaßung als richtig erweisen würde, so habe ich dennoch keinen Grund, meinen Artikel als unnötig zu betrachten. Ich halte nämlich daran fest, daß ein Leser der Ausführungen des Herrn LORIA höchstwahrscheinlich zu der Überzeugung kommen wird, daß die vier Thesen die Ansichten des Verfassers wiedergeben. Gegen diese Thesen — mögen sie von Herrn LORIA als die seinigen gutgeheißen werden oder nicht — stelle ich die folgenden auf:

- A. Durch Heranziehen der Kulturgeschichte kann nur ein verhältnismäßig geringer Teil der mathematisch-historischen Tatsachen befriedigend erklärt werden; in betreff der Geschichte der mathematischen Theorien sind Erklärungen dieser Art im allgemeinen minderwertig, und es ist darum irreleitend, wenn es sich um diese Theorien handelt, die kulturhistorische Geschichtsschreibung „höher“ zu nennen.
- B. Die kulturhistorische Behandlung der anderen Arten von Geschichte der Mathematik ist bis zu einem gewissen Grade zu empfehlen;

1) G. LORIA, a. a. O. S. 229 Z. 5—7 v. u.

14 G. ENESTRÖM: Zur Frage der verschiedenen Arten mathemat. Geschichtsschreibung.

aber auch wenn diese Behandlung theoretisch berechtigt ist, setzt sie oft Kenntnisse voraus, die ein Mathematiker sich nur selten verschaffen kann.

- C. Dagegen ist die mathematisch-historische Behandlung der Geschichte der Mathematik unter allen Umständen zu empfehlen, vorausgesetzt, daß die nötige Sachkunde vorhanden ist. Erzielt man dadurch nicht ein endgültiges Ergebnis, so hat man jedenfalls den Fachgenossen ein wertvolles Material zur Verfügung gestellt.
- D. Umfassende Kenntnisse auf verschiedenen Gebieten sind bei mathematisch-historischen Forschungen immer nützlich, zuweilen sogar notwendig. Allein in erster Linie muß man Mathematik verstehen, wenn man sich mit der Entwicklungsgeschichte der Wissenschaft, die diesen Namen trägt, beschäftigen will.

Die Abhandlung des Abū Kāmil Shogā' b. Aslam „über das Fünfeck und Zehneck“.

Von HEINRICH SUTER in Zürich.

Die Abhandlung, die ich hier in deutscher Sprache vorlege, erschien zuerst nach einem hebräischen Manuskript in italienischer Übersetzung von G. SACERDOTE in der Festschrift zum achtzigsten Geburtstage MORITZ STEINSCHNEIDERS¹⁾ unter dem Titel: *Il trattato del pentagono e del decagono di ABU KAMIL SHOGIA' BEN ASLAM BEN MUHAMMED*. Der mathematischen Lesern wenig zugängliche Ort, an dem diese Übersetzung erschienen ist, die große Zahl von oft störenden Druckfehlern, die sie enthält, und nicht zum geringsten die Bedeutung dieser Arbeit für die Geschichte der arabischen Mathematik und ihres Überganges ins Abendland werden es wohl als gerechtfertigt erscheinen lassen, daß wir in dieser Zeitschrift eine deutsche Übersetzung dieser Abhandlung veröffentlichen. Ebenso oder noch wichtiger wäre freilich eine Herausgabe und Übersetzung der Algebra desselben Verfassers, die sich im Pariser Manuskript 7377 A in lateinischer, in Paris (1029,7⁰) und in München (225,2⁰) in hebräischer Übersetzung befindet. Wir wollen hoffen, daß eine solche nicht mehr zu lange auf sich warten lasse.

Das meiste, was wir zur Abhandlung zu bemerken haben, sparen wir uns für den Kommentar auf, den wir nach der Übersetzung hinzufügen; wir müssen hier nur einiges den Titel und unsere Übersetzung Betreffende vorausschicken. G. SACERDOTE sagt p. 171—172: „Um das Richtige zu sagen, ist die Arbeit unbetitelt; es ist daher auch nicht möglich, ihre Identität mit der Schrift über die Vermessungslehre und die Geometrie, welche der *Fihrist* anführt, zu behaupten²⁾; als Titel wäre vielleicht entsprechender so etwas wie „Buch der Ausmessung“ (*misāḥa*), wie die arabischen Mathematiker solche Abhandlungen über praktische Geometrie zu bezeichnen pflegten.“³⁾ Aber jener Name (über das Fünfeck

1) Leipzig, O. Harrassowitz, 1896, p. 169—194.

2) Es ist jedenfalls nicht diese Schrift, aber vielleicht ein Teil derselben.

3) Diese Abhandlung beschäftigt sich aber gar nicht mit praktischer Geometrie.

Die Abhandlung des Abū Kāmil Shōgā' b. Aslam „über das Fünfeck und Zehneck“. 17

Nun ist bekannt, daß $AB \cdot CD + AD \cdot BC = CD^2$; in der Tat ist nämlich $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$, aber $AC \cdot BD = CD^2$. Aber $CD^2 = 4x^2 - \frac{2}{5} \frac{1}{10} x^4$, davon $AD \cdot BC = ED^2 = x^2$ abgezogen, bleibt $AB \cdot CD = 3x^2 - \frac{2}{5} \frac{1}{10} x^4$; dieses durch $AB = x$ dividiert, gibt $CD = 3x - \frac{2}{5} \frac{1}{10} x^3$; dies mit sich selbst multipliziert, gibt: $CD^2 = 9x^2 + \frac{x^6 \cdot 1}{625} - \frac{6}{25} x^4$, und dieses ist also $= 4x^2 - \frac{2}{5} \frac{1}{10} x^4$. Restauriere (d. h. wende die Operation al-gebr an)¹⁾, und es gibt: $\frac{5}{25} x^4 = 5x^2 + \frac{x^6 \cdot 3}{625}$. Dividiere das Ganze durch algos⁴⁾ ($= x^3$), gibt: $\frac{1}{5} x^2 = 5 + \frac{x^4}{625}$; restauriere, damit algos algos (d. h. x^4) herauskommt, indem du mit 625 multiplizierst, so ergibt sich: $x^4 + 3125 = 125x^2$. Wir halbieren die algos, es gibt $62\frac{1}{2}$ ⁵⁾, ins Quadrat erhoben hast du $3906\frac{1}{4}$, nimm davon 3125 weg, bleibt $781\frac{1}{4}$, die Wurzel hieraus ziehen wir von $62\frac{1}{2}$ ab, die Wurzel aus dem Reste ist die Linie ED , die eine der Seiten des Fünfecks ist. $(ED = \sqrt{62\frac{1}{2}} - \sqrt{781\frac{1}{4}})^{6)}$

II.

Und wenn wir das Maß der Linie kennen wollen, die den zehnten Teil eines gegebenen Kreisumfanges abschneidet, wenn die Linie bekannt ist, die den fünften Teil abschneidet:

So setzen wir (Fig. 2) den Durchmesser des gegebenen Kreises $ABCDEH = 10$ an Zahl, es sei die Linie AH . Im Halbkreis nehmen wir 5 gleiche Linien (Sehnen) an, so schneidet jede den zehnten Teil des Umfanges ab, es seien dies die Linien AB, BC, CD, DE, EH . Es ist bekannt, daß die Linie DH die

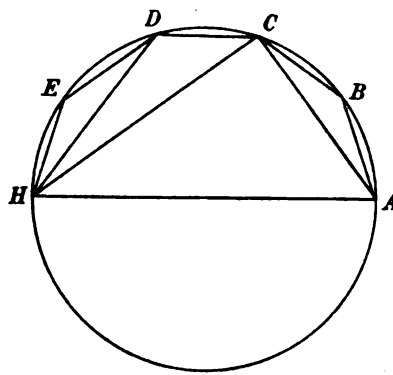


Fig. 2.

1) SACERDOTE hat $\frac{x^2}{625}$.

2) Es sollte eigentlich heißen: „Restauriere und gleiche aus“; es kommen nämlich beide Operationen zur Anwendung, der Kürze halber ist wohl überall das zweite weggelassen.

3) SACERDOTE hat $\frac{x^3}{625}$, er faßt cubo-cubus als x^9 auf, während es nach der griechisch-arabischen Bezeichnungsweise x^6 bedeutet; übrigens hätte ihn der Gang der Auflösung auf das Richtige führen sollen.

4) Über dieses Wort siehe Kommentar.

5) SACERDOTE hat $62\frac{1}{2}x^2$.

6) Dies fügt SACERDOTE ebenfalls in Klammern hinzu, es wird also wohl nicht im hebräischen Text gestanden haben.

Gerade ist, die den fünften Teil des Umfanges abschneidet, und wir haben gezeigt, daß, wenn man diese mit sich selbst multipliziert, man erhält $62\frac{1}{2} - \sqrt{781\frac{1}{4}}$. Nun ist $AC^2 + CD \cdot AH$ oder $AC \cdot DH + CD \cdot AH = AD \cdot CH$; aber $AC = DH$ (und $AD = CH$), also ist $DH^2 + CD \cdot AH = CH^2$. Wir setzen $CD^1) = x$, das den zehnten Teil des Umfanges abschneidet, und multiplizieren es mit AH , dem Durchmesser, der = 10 ist, so haben wir $10x$; wir multiplizieren DH mit sich selbst und haben $62\frac{1}{2} - \sqrt{781\frac{1}{4}}$; also $CH^2 = 10x + 62\frac{1}{2} - \sqrt{781\frac{1}{4}}$, dazu $AC^2 = 62\frac{1}{2} - \sqrt{781\frac{1}{4}}$ addiert, gibt: $10x + 125 - [\sqrt{3125} = 100 = AH^2]$; restauriere und du hast: $10x + 25 = \sqrt{3125}$ ²⁾; daher ist $x = \sqrt{31\frac{1}{4}} - 2\frac{1}{2}$, und dies ist die Linie CD , die den zehnten Teil des Umfanges abschneidet.

III.

Und wenn du das Maß der Linie kennen willst, die eine Seite des regelmäßigen Fünfecks ist³⁾, das einem gegebenen Kreise umbeschrieben ist:

So setzen wir (Fig. 3) den Durchmesser des Kreises = 10 und beschreiben um diesen Kreis ein regelmäßiges Fünfeck, es sei das Fünfeck

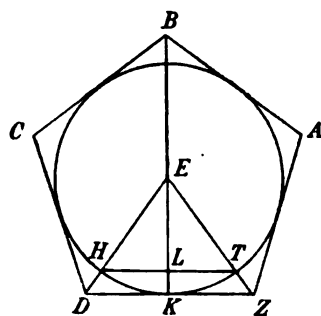


Fig. 3.

$ABCDZ$. Es ist nun bekannt, daß die Linie HT den fünften Teil des Umfangs abschneidet, und wir haben schon gezeigt, daß diese, mit sich selbst multipliziert, $62\frac{1}{2}$ ⁴⁾ $-\sqrt{781\frac{1}{4}}$ ergibt. Das Quadrat von TL ist daher $15\frac{5}{8} - \sqrt{48\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{5}{8}}$ ⁵⁾; subtrahieren wir dieses vom Quadrat von TE , der Hälfte des Durchmessers, also von 25, so bleibt $EL^2 = 9\frac{1}{4} \frac{1}{8}$ ⁶⁾ $+\sqrt{48\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{5}{64}}$. Setzen wir die Linie $AB = x$, die eine Seite des umbeschriebenen Fünfecks ist, so hat man: $AB^2 : KE^2 = HT^2 : EL^2$, oder:

1) SACERDOTE hat AD .

2) Was in eckigen Klammern steht, fehlt nach SACERDOTE auch im hebräischen Text.

3) SACERDOTE hat hier wohl irrtümlich: die einen Teil des gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecks abschneidet; ob es auch im hebräischen Text so heiße, wissen wir nicht.

4) SACERDOTE hat 62.

5) Hier liegt ein Fehler des hebräischen Textes oder des Übersetzers vor, es sollte entweder heißen $\sqrt{48\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{5}{64}}$, wo die drei Brüche zu addieren sind, oder dann $\sqrt{48\frac{5}{8}}$, wie weiter unten, wo $\frac{5}{8}$ (nicht wie SACERDOTE schreibt $\frac{5}{8} \frac{5}{8}$) als Bruchbruch aufzufassen ist, nämlich $\frac{5}{8}$ und $\frac{5}{8}$ eines Achtels $= \frac{48}{64} + \frac{5}{64} = \frac{53}{64}$.

6) Hier sind die Brüche wieder zu addieren, gibt $9\frac{3}{8}$, wie auch nachher geschrieben ist.

$x^2:25 = 62\frac{1}{2} - \sqrt{781\frac{1}{4}}:9\frac{3}{8} + \sqrt{48\frac{6}{8}\frac{5}{8}}^{1)}$ Hieraus folgt: $9\frac{3}{8}x^2 + \sqrt{48\frac{6}{8}\frac{5}{8}}x^4 = 1562\frac{1}{2} - \sqrt{488281\frac{1}{4}}$. Reduziere alles, was du hast, auf algos (x^3), indem du mit $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \sqrt{\frac{20}{625}}$ multiplizierst: $9\frac{3}{8}x^2 + \sqrt{48\frac{6}{8}\frac{5}{8}}x^4$ mit $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \sqrt{\frac{20}{625}}$ multipliziert, gibt x^3 , und $1562\frac{1}{2} - \sqrt{488281\frac{1}{4}}$ mit derselben Größe multipliziert, gibt $375 + \sqrt{15625^3}) - \sqrt{78125} - \sqrt{28125}$ oder gleich $500 - \sqrt{200000}$. Die Wurzel aus dieser Differenz ist also AB , d. h. die Seite des dem gegebenen Kreise mit dem Durchmesser 10 umbeschriebenen regelmäßigen Fünfecks; in dieser Weise ist also gezeigt worden, daß das Quadrat von AB , welches eine Seite des Fünfecks ist, gleich ist $500 - \sqrt{200000}$.

IV.

Und wenn du das Maß der Seite des regelmäßigen Zehnecks kennen willst, das einem Kreise umbeschrieben ist:

So mache (Fig. 4) einen Kreis, dessen Durchmesser gleich 10 sei, und beschreibe um denselben ein Zehneck, es sei dasselbe $ABCDEFGHIJKM$. Wir wollen das Maß der Linie AB kennen, die eine Seite des Zehnecks ist. Es ist bekannt, daß die Linie TH den zehnten Teil des Kreisumfanges abschneidet, und wir haben gezeigt, daß sie gleich sei $\sqrt{31\frac{1}{4}} - 2\frac{1}{2}$. Die Linie LT ist die Hälfte von TH , also gleich $\sqrt{7\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{16}}^{3}) - 1\frac{1}{4}$, ihr Quadrat ist $9\frac{1}{4}\frac{1}{8} - \sqrt{48\frac{6}{8}\frac{5}{8}}^{4)}$. Subtrahiere dies vom Quadrate von TE , das gleich 25 ist, so bleibt $EL^2 = 15\frac{5}{8} + \sqrt{48\frac{6}{8}\frac{5}{8}}$. Nun ist das Quadrat von TH gleich $37\frac{1}{2} - \sqrt{781\frac{1}{4}}$; wir setzen die Linie $AB = x$, da sie eine Seite des umbeschriebenen Zehnecks ist, ihr Quadrat sei algos $= x^2$, und man hat: $x^2:TH^2 = TE^2:EL^2$ oder: $x^2:37\frac{1}{2} - \sqrt{781\frac{1}{4}} = 25:15\frac{5}{8} + \sqrt{48\frac{6}{8}\frac{5}{8}}$; hieraus ergibt sich: $15\frac{5}{8}x^2 + \sqrt{48\frac{6}{8}\frac{5}{8}}x^4 = 25(37\frac{1}{2} - \sqrt{781\frac{1}{4}}) = 937\frac{1}{2} - \sqrt{488281\frac{1}{4}}$. Reduziere alles,

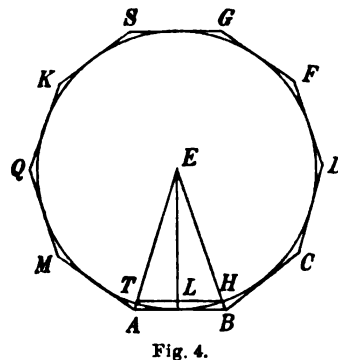


Fig. 4.

1) Man beachte, daß jetzt statt $\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{5}{64}$ der Bruchbruch $\frac{6}{8}\frac{5}{8}$ geschrieben ist; ob diese Inkonsistenzen dem arabischen Verfasser oder dem Übersetzer ins Hebräische zuzuschreiben sind, wissen wir nicht. 2) SACERDOTE hat $\sqrt{1325}$.

3) Hier sind die Brüche wieder zu addieren, SACERDOTE hat aber unrichtig $\sqrt{7\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}}$.

4) SACERDOTE hat unrichtig $\sqrt{48\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{5}{8}}$; vgl. Note 5) zu III.

5) Hier hat SACERDOTE $\sqrt{48\frac{3}{4}\frac{5}{8}}$; man darf aber bei einem Bruchbruch den ersten Bruch nicht abkürzen, denn dadurch wird der Wert des Bruchbruches verändert, wohl aber den zweiten; es scheint, daß SACERDOTE $\frac{6}{8}\frac{5}{8}$ nicht als Bruchbruch auf-

was du hast auf algos (x^2), indem du mit $\frac{2}{25} - \sqrt{\frac{4}{3125}}$ multiplizierst, so hast du: $x^2 = 75 + \sqrt{625} - \sqrt{3125} - \sqrt{1125}$, oder: $x^2 = 100 - \sqrt{8000}$, und dies ist das Quadrat der Linie AB , die die Seite des dem Kreise mit dem Durchmesser 10 umschriebenen Zehneckes ist.

V.

Wenn du das Maß des Durchmessers des Kreises kennen willst, der einem gegebenen regelmäßigen Fünfeck umschrieben ist:

So nehmen wir (sic) (Fig. 5) das Fünfeck $ABCDE$ an und setzen seine Seite = 10 an Zahl, ihm sei der Kreis mit dem Durchmesser BK

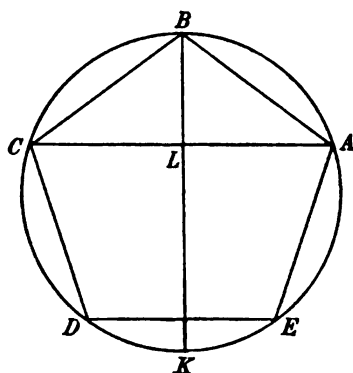


Fig. 5.

umschrieben. Um den Durchmesser zu kennen, ziehen wir die Linie AC und nennen sie x . Ihr Produkt mit DE , das gleich 10 ist, mehr das Quadrat von DE ist gleich dem Quadrat von AC . Aber das Produkt von $AC = x$ mit $DE = 10$ ist $10x$, und $DE^2 = 100$ und $AC^2 = x^2$. Also hat man $x^2 = 10x + 100$, und hieraus $x = 5 + \sqrt{125}$, und dies ist die Linie AC . Nun ist $\frac{AC}{2} = AL = 2\frac{1}{2} + \sqrt{31\frac{1}{4}}$; mit sich selbst multipliziert gibt $37\frac{1}{2} + \sqrt{781\frac{1}{4}}$, subtrahiere dies von

$AB^2 = 100$, so bleibt $62\frac{1}{2} - \sqrt{781\frac{1}{4}} = BL^2$. Setzen wir nun den Durchmesser $BK = x$ und sein Quadrat (algos) $= x^2$; man hat nun: $BK^2 : AB^2 = AB^2 : BL^2$; aber $BL^2 = 62\frac{1}{2} - \sqrt{781\frac{1}{4}}$, multipliziere es mit $x^2 (BK^2)$, so hast du $62\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{781\frac{1}{4}}x^4$, und dies ist gleich 10000. Reduziere alles, was du hast, auf x^2 , indem du es mit $\frac{1}{50} + \sqrt{\frac{5}{62500}}$ multiplizierst, so hast du $x^2 = 200 + \sqrt{8000}$. Und so ist gezeigt worden, daß das Quadrat des Durchmessers des Kreises, d. h. der Linie BK , gleich $200 + \sqrt{8000}$ ist.

VI.³⁾

Und wenn du den Durchmesser des Kreises kennen willst, der dem regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$, dessen jede Seite = 10 an Zahl sei, eingeschrieben ist:

gefaßt habe, dann könnte aber nur Addition oder Multiplikation der beiden Brüche gemeint sein, in beiden Fällen wäre aber das Resultat falsch.

1) SACERDOTE hat fehlerhaft $\frac{2}{5}$.

2) SACERDOTE hat fehlerhaft $\sqrt{\frac{5}{15625}}$; kürzer wäre natürlich gewesen: $\frac{1}{50} + \frac{1}{250}\sqrt{5}$, aber die Araber setzten keine Faktoren vor die Wurzeln, sondern nahmen dieselben unter die Wurzel.

3) Zu diesem Satze hat der hebräische Text keine Figur, SACERDOTE ließ sie deshalb ebenfalls weg, wir fügen dieselbe nach dem Texte hinzu.

So sei (Fig. 6) M der Mittelpunkt des Kreises, und AM sei der Radius des dem Fünfeck umschriebenen Kreises. Wir haben schon gezeigt (Prop. V), daß das Quadrat des Durchmessers dieses Kreises gleich $200 + \sqrt{8000}$ ist, das Quadrat des Radius AM ist also gleich $50 + \sqrt{500}$. Subtrahiere hiervon das Quadrat von AH^1 , das gleich 25 ist, [so hast du $25 + \sqrt{500}$, und dies ist das Quadrat des Radius des eingeschriebenen Kreises]³⁾, das Quadrat des Durchmessers ist also $100 + \sqrt{8000}$.

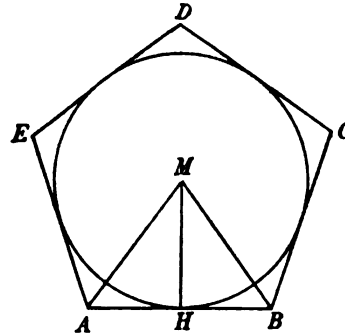


Fig. 6.

Wenn du aber willst, so multipliziere eine Seite des Fünfecks mit sich selbst, subtrahiere das Produkt vom Quadrat des Durchmessers des dem Fünfeck umschriebenen Kreises, ziehe die Wurzel aus dem Reste, und du hast den Durchmesser des eingeschriebenen Kreises. Dieses ergibt sich aus den Figuren, die gleiche Seiten und gleiche Winkel haben.⁵⁾

VII.

Wir wollen das Maß des Durchmessers des einem gegebenen regelmäßigen Fünfeck von der Seite 10 umschriebenen Kreises suchen, indem wir uns einer anderen Konstruktion als vorher (Prop. V) bedienen.

Es ist bekannt nach EUKLIDES, daß, wenn eine Linie ein Segment des Kreises abschneidet, das Verhältnis dieser Linie zu einer anderen, die ein ähnliches Segment von einem anderen Kreise abschneidet, gleich ist dem Verhältnis der Durchmesser (der beiden Kreise).⁴⁾ Nun haben wir schon gezeigt, daß, wenn ein Kreis mit dem Durchmesser 10 gegeben ist, das Quadrat der Seite des eingeschriebenen Fünfecks $= 62\frac{1}{2} - \sqrt{781\frac{1}{4}}$ ist (Prop. I). Ebenso ist

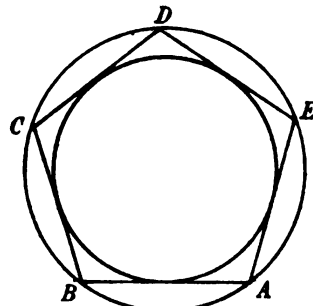


Fig. 7.

1) SACERDOTE hat irrtümlich AB .

2) Was in den eckigen Klammern steht, fehlt bei SACERDOTE.

3) Hier ist der Satz gemeint, der erst in Prop. X bewiesen wird, nämlich wenn ein regelmäßiges Vieleck um einen Kreis beschrieben und zugleich in einen anderen Kreis eingeschrieben ist, so ist das Quadrat der Seite desselben mehr dem Quadrate des Durchmessers des eingeschriebenen Kreises gleich dem Quadrate des Durchmessers des umschriebenen Kreises.

4) Es ist dies nicht ein besonderer Lehrsatz, sondern wird im Beweis zu EUKL. XII, 1 gleichsam als Hilfssatz bewiesen.

nach dem, was wir gesagt haben: $100 : 62\frac{1}{2} - \sqrt{781\frac{1}{4}} = x^2 : 100$, wo x^2 das Quadrat des unbekannten Durchmessers des umbeschriebenen Kreises und 100 das Quadrat des Durchmessers des dem Fünfeck eingeschriebenen Kreises ist. Hieraus folgt: $62\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{781\frac{1}{4}}x^4 = 10000$. Reduziere alles, was du hast, auf x^2 , indem du mit $\frac{1}{50} + \sqrt{\frac{5}{62500}}$ multiplizierst, so hast du $x^2 = 200 + \sqrt{8000}$, und dies ist das Quadrat des Durchmessers des dem Fünfeck mit der Seite 10 umbeschriebenen Kreises.³⁾

VIII.³⁾

Und wenn wir einen Kreis in ein gegebenes regelmäßiges Fünfeck einschreiben wollen, dessen jede Seite = 10 ist:

So haben wir schon gezeigt, daß, wenn ein Kreis mit dem Durchmesser 10 gegeben ist, das Quadrat der Seite des ihm umbeschriebenen Fünfecks = $500 - \sqrt{200000}$ ist (Prop. III). Nun sage ich, daß man hat: $100 : 500 - \sqrt{200000} = x^2 : 100$, wo x^2 das unbekannte Quadrat des Durchmessers des dem Fünfeck eingeschriebenen Kreises ist⁴⁾, und 100 das Quadrat des Durchmessers des gegebenen Kreises.⁵⁾ Multipliziere 100 mit 100, so hast du 10000; dann multipliziere x^2 mit $500 - \sqrt{200000}$, so hast du $500x^2 - \sqrt{200000}x^4$. Reduziere alles, was du hast, auf x^2 , indem du mit $\frac{1}{100} + \sqrt{\frac{1}{12500}}$ multiplizierst, so hast du $x^2 = 100 + \sqrt{8000}$; und dies ist das Quadrat des Durchmessers des dem Fünfeck mit der Seite 10 eingeschriebenen Kreises.

IX.

Und wenn wir einen Kreis um⁷⁾ ein gegebenes regelmäßiges Zehneck beschreiben wollen, dessen jede Seite den zehnten Teil des Umfanges des umbeschriebenen Kreises abschneidet⁸⁾:

So haben wir schon gezeigt, daß die Seite des einem Kreise mit dem Durchmesser 10 eingeschriebenen Zehnecks = $\sqrt{31\frac{1}{4}} - 2\frac{1}{2}$ ist (Prop. II). Setzen wir nun den Durchmesser des (gesuchten) Kreises = x , so haben

1) Hier hat SACERDOTE wieder unrichtig $\sqrt{\frac{5}{15625}}$.

2) Die Figur zu dieser Proposition wird in der Ableitung gar nicht benutzt, sie ist übrigens unvollständig, es sollte auch das dem inneren Kreise eingeschriebene Fünfeck gezeichnet sein.

3) Diese Proposition enthält eine zweite Lösung von Prop. VI.

4) Dieser Satz heißt bei SACERDOTE: „wo alcos das Quadrat des unbekannten Kreises, dessen Durchmesser gesucht ist“.

5) SACERDOTE hat: „und 100 ist der Durchmesser des gegebenen Kreises“.

6) Hier ist nun der oben schon aufgetretene Bruch $\frac{5}{62500}$ abgekürzt worden.

7) SACERDOTE hat unrichtig „inscrivere“.

8) Statt des letzten Satzes sollte es wohl heißen: „dessen jede Seite = 10 ist“.

wir: $x : 10 = 10 : \sqrt{31\frac{1}{4}} - 2\frac{1}{2}$. Multipliziere 10 mit 10, so hast du 100, und x mit $\sqrt{31\frac{1}{4}} - 2\frac{1}{2}$, so hast du $\sqrt{31\frac{1}{4}}x - 2\frac{1}{2}x$; fügen wir (auf beiden Seiten) $2\frac{1}{2}x$ hinzu, so haben wir: $100 + 2\frac{1}{2}x = \sqrt{31\frac{1}{4}}x$. Ins Quadrat erhoben gibt es: $10000 + 6\frac{1}{4}x^2 + 500x = 31\frac{1}{4}x^2$.¹⁾ Restauriere [und gleiche aus, so hast du $x^2 = 20x + 400$]²⁾, hieraus folgt: $x = 10 + \sqrt{500}$, und dies ist der Durchmesser des einem Zehneck mit der Seite 10 umschriebenen³⁾ Kreises.

X.

Und wenn wir einen Kreis in⁴⁾ ein gegebenes regelmäßiges Zehneck beschreiben wollen, dessen jede Seite = 10 ist:

So haben wir schon gezeigt, daß, wenn ein Kreis mit dem Durchmesser 10 gegeben ist, das Quadrat der Seite des umschriebenen Zehnecks = $100 - \sqrt{8000}$ ist (Prop. IV). Ich sage nun, daß man hat: $100 - \sqrt{8000} : 100 = 100 : x^2$. Multipliziere 100 mit 100, gibt 10000, und $100 - \sqrt{8000}$ mit x^2 , gibt $100x^2 - \sqrt{8000}x^4$, also hast du: $100x^2 - \sqrt{8000}x^4 = 10000$. Reduziere alles, was du hast, auf x^2 , indem du mit $\frac{1}{20} + \sqrt{\frac{1}{500}}$ ⁵⁾ multiplizierst, so ergibt sich $x^2 = 500 + \sqrt{200000}$, und dies ist das Quadrat des Durchmessers des Kreises, der in⁶⁾ das Zehneck fällt (sic). Und⁷⁾ wir haben schon gezeigt (Prop. IX), daß, wenn der Durchmesser = $10 + \sqrt{500}$ ist, die Seite des eingeschriebenen Zehnecks = 10 ist⁸⁾; nun ist das Quadrat des Durchmessers = $100 + 500 + \sqrt{200000}$, subtrahiere davon 100, d. h. das Quadrat der Seite des (eingeschriebenen) Zehnecks, so bleibt $500 + \sqrt{200000}$, und die Wurzel aus diesem ist der Durchmesser des dem Zehneck eingeschriebenen⁹⁾ Kreises.

Ich will den Grund dieses Verfahrens auseinandersetzen; er besteht darin, daß, wenn eine regelmäßige Figur um einen Kreis beschrieben und in einen anderen Kreis eingeschrieben ist, das Quadrat einer Seite (dieser Figur) mehr dem Quadrate des Durchmessers des eingeschriebenen Kreises gleich ist dem Quadrate des Durchmessers des umschriebenen Kreises.

1) Diese Quadrierung wäre natürlich nicht nötig gewesen; immerhin ergibt sich das Resultat ebenso leicht, wie beim Restaurieren der Gleichung ersten Grades.

2) Was in eckigen Klammern steht, fehlt bei SACERDOTE und wahrscheinlich auch im hebräischen Text, SACERDOTE macht keine Bemerkung hierzu.

3) SACERDOTE hat „inscritto“.

4) SACERDOTE hat „circoscrivere“.

5) SACERDOTE hat unrichtig $\sqrt{500}$.

6) SACERDOTE hat „fuori“ statt „dentro“.

7) Hier beginnt eine andere Lösung dieser Aufgabe.

8) Der letztere Satz fehlt bei SACERDOTE.

9) SACERDOTE hat wieder „fuori“ statt „dentro“.

Beispiel: Wir zeichnen ein gleichseitiges¹⁾ Dreieck, es sei (Fig. 8) das Dreieck ABC , und in dasselbe den Kreis HLZ , dem also das Dreieck umbeschrieben ist; um das Dreieck sei ein anderer Kreis beschrieben, dessen Durchmesser $= AD$; ich sage, daß $AC^2 + KG^2 = AD^2$.

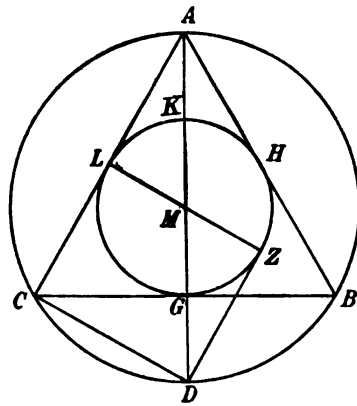


Fig. 8.

Beweis: Im Punkte L der Linie AC , der ihr Berührungspunkt mit dem (inneren) Kreise ist, errichten wir eine Senkrechte, welche den inneren Kreis halbiert; denn es ist bekannt, daß sie durch das Zentrum der beiden Kreise geht; wir verlängern sie bis zum Schnittpunkt mit dem (inneren) Kreise, es sei dies die Linie LZ , sie ist also der Durchmesser des Kreises HLZ und gleich der Linie KG . Wir verbinden Z mit D und D mit C ; die Linie AM ist gleich der Linie MD , ebenso ist $ML = MZ$ und Winkel $AML = DMZ$, also ist Dreieck AML gleich (kongruent) Dreieck DMZ , also $ZD = AL$. Hieraus folgt, daß auch $ZL = CD$. Es ist nun $AC^2 + CD^2 = AD^2$, weil Winkel ACD ein rechter ist; aber $CD = ZL$ und $ZL = KG$, also ist $AC^2 + KG^2 = AD^2$. q. e. d.²⁾

XI.

Wenn ein regelmäßiges Fünfeck in einen Kreis eingeschrieben ist, dessen Durchmesser $= 10$ ist, so wollen wir seine Seite suchen:

Der gegebene Kreis sei (Fig. 9) ABC mit dem Durchmesser AB . Wir ziehen in demselben eine Seite, die den zehnten Teil des Umfanges abschneidet, dieser ist anderthalbmal so groß wie der Teil, den die Fünfeckseite abschneidet³⁾; die Zehneckseite sei BD , wie wir schon gezeigt haben (Prop. II), ist sie gleich $\sqrt{31\frac{1}{4}} - 2\frac{1}{2}$; die Linie AD wird alsdann ihr Supplement sein, und ist die Linie, die zwei Fünftel des Umfanges abschneidet, sie ist daher⁴⁾ $= \sqrt{62\frac{1}{2}} + \sqrt{781\frac{1}{4}}$. Wir ziehen in demselben Kreise eine Linie, die den sechsten Teil des Umfanges abschneidet, sie sei BC , sie schneidet $2\frac{1}{2}$ Teile ab von dem, was die Fünfeckseite

1) Hier wird ebenfalls unnötigerweise hinzugefügt: gleichwinkliges.

2) Dieser Beweis ist in der italienischen Übersetzung und jedenfalls auch im hebräischen Text etwas weitschweifig und auch teilweise verdorben, ich habe ihn etwas abgekürzt.

3) SACERDOTE hat hier unrichtig: „esso equivarrà ad una parte più una metà del lato del pentagono“.

4) D. h. nach dem pythagoreischen Lehrsatz aus Dreieck ABD berechnet.

abschneidet, und ist = 5 (Radius); daher ist ihr Supplement (AC), welches den dritten Teil des Umfanges abschneidet, = $\sqrt{75}$. Multipliziere $BD = \sqrt{31\frac{1}{4}} - 2\frac{1}{2}$ mit $AC = \sqrt{75}$, und du hast $\sqrt{2343\frac{1}{2}\frac{1}{4}} - \sqrt{468\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$; subtrahiere dieses von $AD \cdot BC = \sqrt{1562\frac{1}{2}} + \sqrt{488281\frac{1}{4}}$ ($= 5 \cdot \sqrt{62\frac{1}{2}} + \sqrt{781\frac{1}{4}}$), indem du $\sqrt{468\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ addierst und $\sqrt{2343\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ subtrahierst, so hast du das Produkt $AB \cdot CD$; dividiere den Rest durch $AB = 10$, so ergibt sich

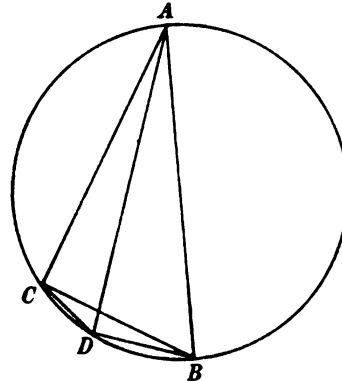


Fig. 9.

$$CD = \sqrt{15\frac{5}{8}} + \sqrt{48\frac{3}{4}\frac{5}{64}} + \sqrt{4\frac{5}{8}\frac{1}{16}} - \sqrt{23\frac{3}{8}\frac{1}{16}}.$$

Wir ziehen CD . Ziehen wir die Wurzel aus $48\frac{3}{4}\frac{5}{64}$, so erhalten wir $6^\circ 59' 15'' 46'''$, addieren wir dies zu $15^\circ 37' 30''$ ($= 15\frac{5}{8}$), so haben wir $22^\circ 36' 45'' 46'''$; ziehen wir die Wurzel aus diesem, so erhalten wir $4^\circ 45' 19'' 1'''$; wir addieren dazu $\sqrt{4\frac{5}{8}\frac{1}{16}} = 2^\circ 9' 54'' 12'''$ und subtrahieren davon $\sqrt{23\frac{3}{8}\frac{1}{16}} = 4^\circ 50' 28'' 25'''$, so bleibt $2^\circ 4' 45''$.³⁾

XII.

Und wenn gesagt wird: [Die Summe (des Inhaltes)]⁴⁾ eines gleichseitigen Dreiecks [und seiner Höhe]⁴⁾ ist = 10, wie groß ist seine Höhe?

So nehmen wir (Fig. 10) das Dreieck ABC an, AD sei seine Höhe. Wir wollen das Maß von AD kennen. [Wir setzen $AD = x$, dann hat man $DB = \sqrt{\frac{x^2}{3}}$, und jede Seite des Dreiecks]⁴⁾ ABC ist gleich $\sqrt{1\frac{1}{3}x^2}$. [Multipliziere AD mit BD , so hast du den Inhalt]⁴⁾ des Dreiecks $ABC = \sqrt{\frac{x^4}{3}}$. [Füge x hinzu, welches die Höhe AD ist]⁴⁾,

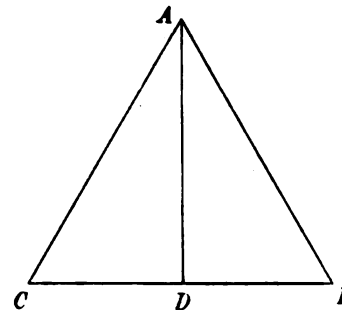


Fig. 10.

1) SACERDOTE hat $\sqrt{478\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$.

2) SACERDOTE hat $\sqrt{48\frac{3}{4}\frac{5}{8}}$, was, wie wir oben schon bemerkt haben, unrichtig ist; wir haben hier die Schreibweise $48\frac{3}{4}\frac{5}{64}$, wo die beiden Brüche zu addieren sind, der Bruchbruchform vorgezogen, weil auch bei den anderen vorkommenden Wurzeln die Brüche zu addieren sind.

3) Der genauere Wert ist $2^\circ 4' 44'' 48'''$. Eigentümlich ist hier das vereinzelte Auftreten von Sexagesimalbrüchen zur Darstellung von angenäherten Wurzelwerten.

4) Was in eckigen Klammern steht, fehlt nach SACERDOTE im hebräischen Text. Es ist dies die im hebräischen Text am meisten verdorbene Aufgabe der Abhandlung.

und du hast: $x + \sqrt{\frac{x^4}{3}} = 10$. Restauriere, um x^2 zu erhalten, indem du alles, was du hast, mit $\sqrt{3}$ multiplizierst, so erhältst du: $x^2 + \sqrt{3x^2} = \sqrt{300}$. Halbiere $\sqrt{3}$, dies gibt $\sqrt{\frac{3}{4}}$, ins Quadrat erhoben gibt $\frac{3}{4}$, addiere dazu $\sqrt{300}$, so hast du $\frac{3}{4} + \sqrt{300}$; ziehe hieraus die Wurzel und subtrahiere von ihr $\sqrt{\frac{3}{4}}$, was übrigbleibt, ist die Linie AD , welche die Höhe des Dreiecks ABC ist. ($AD = \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{300}} - \sqrt{\frac{3}{4}}$.)

XIII.

Und wenn gesagt wird: In ein gleichseitiges Dreieck, dessen jede Seite = 10 ist, sei ein Rechteck einbeschrieben, dessen Maß (Inhalt) = 10 ist, wie groß ist die Länge dieses Rechteckes?¹⁾

Wir nehmen (Fig. 11) das Dreieck ABC an, und das Rechteck, das in dasselbe fällt, sei $EZTH$; wir wollen die Linie EH kennen, welche

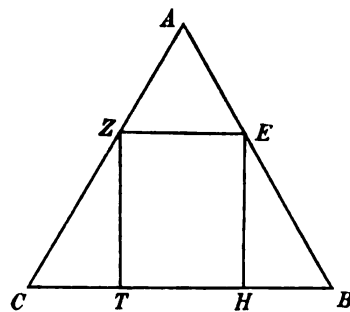


Fig. 11.

die Länge (Höhe) des Rechteckes ist. Setzen wir diese Linie gleich x , dann ist die Linie $BH = \sqrt{\frac{x^2}{3}}$, und die Linie TC auch $= \sqrt{\frac{x^2}{3}}$, also ist $HT = 10 - \sqrt{1\frac{1}{3}x^2}$. Multipliziere dies mit $EH = x$, so hast du: $10x - \sqrt{1\frac{1}{3}x^4} = 10$. Reduziere auf x^2 alles, was du hast, indem du mit $\sqrt{\frac{3}{4}}$ multiplizierst, so hast du $x^2 + \sqrt{75} = \sqrt{75x^2}$. Halbiere $\sqrt{75}$, so hast du $\sqrt{18\frac{1}{4}}$, ins Quadrat erhoben gibt $18\frac{3}{4}$ ²⁾; subtrahiere davon $\sqrt{75}$, so bleibt $18\frac{3}{4} - \sqrt{75}$; ziehe die Wurzel hieraus und füge $\sqrt{18\frac{3}{4}}$ hinzu, so ist die Summe die Höhe des Rechteckes, nämlich die Linie EH . ($EH = \sqrt{18\frac{3}{4} - \sqrt{75}} + \sqrt{18\frac{3}{4}}$.)

XIV.

Und wenn gesagt wird: In das gleichseitige Dreieck (Fig. 12) ABC ist das Quadrat $HGLM$ einbeschrieben, und das Maß (der Inhalt) des Dreiecks mehr demjenigen des Quadrates ist = 10, wie groß ist die Seite des Quadrates, und wie groß der Inhalt des Dreiecks und derjenige des Quadrates?

Um dies zu finden, setzen wir die Seite des Quadrates = x , dann ist sein Inhalt = x^2 , also der Inhalt der Dreiecke AGH , HLB und GCM

1) SACERDOTE hat „triangolo“.

2) Ob diese Inkonsequenz, das eine Mal $18\frac{1}{2}\frac{1}{4}$, das andere Mal $18\frac{3}{4}$ zu schreiben, SACERDOTE oder dem hebräischen Text zuzuschreiben sei, wissen wir nicht.

3) SACERDOTE hat nur $18\frac{3}{4}$.

(zusammen) $= 10 - 2x^2$. Aber wir haben die Quadratseite $= x$ gesetzt; dann ist $MC = \sqrt{\frac{x^4}{3}}$, und der Inhalt des Dreiecks GCM mehr demjenigen von HLB ist $= \sqrt{\frac{x^4}{3}}$; und, da $AT = \sqrt{\frac{3}{4}}x^2$, ist der Inhalt des Dreiecks $AGH = \sqrt{\frac{3}{16}}x^4$, also die drei Dreiecke zusammen $= \sqrt{\frac{x^4}{3}} + \sqrt{\frac{3}{16}}x^4$, und dies ist $= 10 - 2x^2$. Restauriere, um x^2 zu erhalten, indem du mit $\sqrt{3}$ multiplizierst. $\sqrt{\frac{x^4}{3}}$ mit $\sqrt{3}$ multipliziert gibt $\sqrt{x^4} = x^2$; dann multipliziere $\sqrt{\frac{3}{16}}x^4$ mit $\sqrt{3}$, gibt $\frac{3}{4}x^2$, so hast du $x^2 + \frac{3}{4}x^2$; dann multipliziere $10 - 2x^2$ mit $\sqrt{3}$, so hast du $\sqrt{300} - \sqrt{12}x^2$. Also hat man: $x^2 + \frac{3}{4}x^2 = \sqrt{300} - \sqrt{12}x^2$. Restauriere $\sqrt{12}x^2$, indem du es zu $x^2 + \frac{3}{4}x^2$ addierst, so ergibt sich: $x^2 + \frac{3}{4}x^2 + \sqrt{12}x^2 = \sqrt{300}$. Reduziere alles, was du hast, auf x^2 , indem du mit $\sqrt{\frac{3072}{20449}}$ multiplizierst, und du erhältst: $x^2 = \sqrt{45 \frac{1395}{20449}}$ — $\sqrt{11 \frac{10261}{20449}}$, und dies ist der Inhalt des Quadrates $HGLM$; subtrahiere es von 10, der Rest ist der Inhalt des Dreiecks ABC . — Und wenn du willst, so kannst du sagen, daß der Inhalt des Quadrates $= 6 \frac{102}{143}$ — $\sqrt{11 \frac{10261}{20449}}$ und derjenige des Dreiecks $= 3 \frac{41}{143} + \sqrt{11 \frac{10261}{20449}}$ ist.

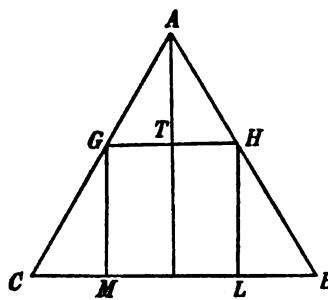


Fig. 12.

XV.

Und wenn gesagt wird: Es sei ein Quadrat gegeben, dessen jede Seite $= 10$ ist, es sei (Fig. 13) das Quadrat $ABCD$, wir beschreiben in dasselbe ein gleichseitiges⁹⁾ Fünfeck, wie diese Figur (zeigt), es sei das Fünfeck $AEHZM$; wir wollen das Maß der Seite des Fünfecks kennen.

Um dies zu kennen, setzen wir eine Seite des Fünfecks $= x$, es sei die Seite AE , dann ist $BE = 10 - x$; CH wird $= \sqrt{\frac{x^3}{2}}$ sein, und $BH = 10 - \sqrt{\frac{x^3}{2}}$. Erheben wir jede derselben (d. h. BE und BH) ins

- 1) SACERDOTE hat $\sqrt{\frac{2}{3}}x^2$.
- 2) SACERDOTE hat $+ \sqrt{3}$ statt per $\sqrt{3}$.
- 3) SACERDOTE hat nur $12x^4$ (ohne Wurzelzeichen).
- 4) SACERDOTE hat $\sqrt{\frac{3}{4}}x^2$.
- 5) Dafür hat SACERDOTE $\sqrt{3000} + \frac{72}{20449}$; er hat also jedenfalls die Rechnungen nicht geprüft, was hier sehr nötig gewesen wäre.
- 6) SACERDOTE hat $\sqrt{45} + \frac{1395}{20449}$.
- 7) Dies ist die Wurzel aus $45 \frac{1395}{20449}$, SACERDOTE hat $6 \frac{102}{132}$.
- 8) SACERDOTE hat $3 \frac{100}{143}$.
- 9) SACERDOTE hat statt „equilatero“ „altro“, er bemerkt dazu nichts.

Quadrat und addieren, so haben wir: $x^2 = 200 + 1\frac{1}{2}x^2 - 20x - \sqrt{200x^2}$.
 Löse auf¹⁾ und du hast $AE = 20 + \sqrt{200^2} - \sqrt{200 + \sqrt{320000}}$.

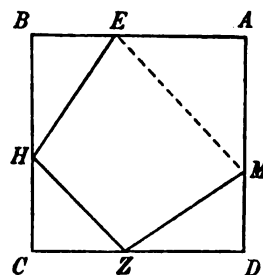


Fig. 13.

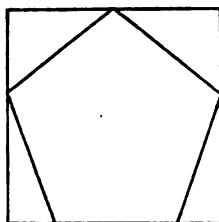


Fig. 14.

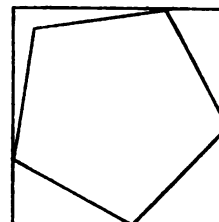


Fig. 15.

(Hier gibt der Übersetzer ins Hebräische, MORDECHAI FINZI, eine Anmerkung, für die ich auf den Kommentar, p. 41 verweise.)³⁾

XVI.

Und wenn gesagt wird: Ein regelmäßiges Fünfeck hat als Maß des Inhaltes 50⁴⁾, wie groß ist jede Seite desselben?

Beispiel⁵⁾: Wir nehmen (Fig. 16) das Fünfeck $ABCDE$ an, und M sei der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises. Wir ziehen AM , BM ,

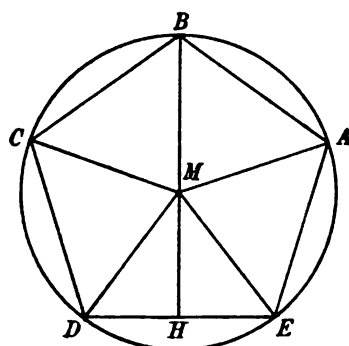


Fig. 16.

CM , DM , EM . Es ist bekannt, daß dieses Fünfeck so in die gleichgroßen Dreiecke AMB , BMC , CMD , DME , EMA geteilt worden ist, also ist das Dreieck $DME = 10$ an Inhalt. Wir haben schon gezeigt in dem, was wir in diesem Buche gesagt haben (Prop. V u. VII), daß, wenn ein Fünfeck gegeben ist, dessen jede Seite = 10 ist, das Quadrat des Durchmessers des demselben umschriebenen Kreises = $200 + \sqrt{8000}$ sei. Also ist bekannt, nach dem, was wir soeben gesagt haben, daß, wenn

man den Durchmesser eines einem gegebenen Fünfeck umschriebenen Kreises finden will, man eine Seite des Fünfecks mit sich selbst multipliziert, dieses Quadrat verdoppelt und dieses Resultat sich merken muß; dann muß man das Quadrat der Seite des Fünfecks wieder ins Quadrat

1) Die Lösung ist hier nicht genauer angegeben, dagegen bei LEONARDO.

2) SACERDOTE hat $-\sqrt{200}$.

3) Ich habe bei Figur 14 entsprechend meiner Vorlage ebenfalls ein Quadrat gezeichnet, statt eines Rechtecks, was es eigentlich nach der Anmerkung sein sollte.

4) SACERDOTE hat 50 dramme = 50 Dirhem, ebenso auch LEONARDO; das Wort Dirhem steht hier einfach an Stelle von numerus, im Gegensatz zu res und census.

5) Dieses Wort steht nur hier und in der folgenden Proposition, es befand sich wohl kaum im arabischen Originaltext.

erheben, von dem Produkte vier Fünftel nehmen und aus dem Resultate die Wurzel ziehen; diese Wurzel addiert man zu dem Behaltenen, so ist die Wurzel aus dieser Summe der Durchmesser des Kreises.¹⁾ Wenn wir nun die Seite $ED = x$ setzen, so ist das Quadrat des Durchmessers des Kreises nach dem, was wir erklärt haben, $= 2x^2 + \sqrt{\frac{4}{5}}x^4$, das Quadrat des Radius EM ist daher $= \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{\frac{1}{20}}x^4$. Wir ziehen die Senkrechte im Dreieck EMD , es ist bekannt, daß sie in die Mitte von ED fällt, es sei die Linie MH , und EH ist $= \frac{x}{2}$; erhebe es ins Quadrat, gibt $\frac{x^2}{4}$, subtrahiere dies von $EM^2 = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{\frac{1}{20}}x^4$, so bleibt $MH^2 = \frac{x^2}{4} + \sqrt{\frac{1}{20}}x^4$, multipliziere dies mit $EH^2 = \frac{x^2}{4}$, so hast du $\frac{x^4}{16} + \sqrt{\frac{1}{320}}x^8 = 100$.⁴⁾ Restauriere $\frac{x^4}{16}$, um x^4 zu bekommen, indem du alles, was du hast, mit 16 multiplizierst, so erhältst du $x^4 + \sqrt{\frac{4}{5}}x^8 = 1600$. Reduziere auf x^4 , indem du alles mit $5 - \sqrt{20}$ multiplizierst, so hast du $x^4 = 8000$ —⁵⁾ $\sqrt{51200000}$; ziehe hieraus die Wurzel von der Wurzel⁶⁾, und das Resultat wird die Seite des Fünfecks sein.

XVII.

Und wenn gesagt wird: Das Maß (des Inhaltes) eines regelmäßigen Zehnecks ist $= 100$, wie groß ist eine Seite desselben?

Beispiel: Wir nehmen (Fig. 17) das Zehneck $ABC \dots K$ an, M sei der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises. Es ist bekannt, daß es (durch die Radien) in 10 gleiche Dreiecke geteilt wird. Es ist also das Dreieck $FMZ = 10$. Wir haben schon vorher (Prop. IX) erklärt, daß, wenn ein regelmäßiges Zehneck mit der Seite 10 gegeben ist, der Durchmesser des ihm umbeschriebenen Kreises $= 10 + \sqrt{500}$ sei. Hieraus folgt, daß, wenn wir den Durchmesser des einem Zehneck umbeschriebenen Kreises kennen wollen, wir die Seite des Zehnecks mit sich selbst multiplizieren, das Produkt verfünffachen, hieraus die Wurzel ziehen und diese zur Seite des Zehnecks

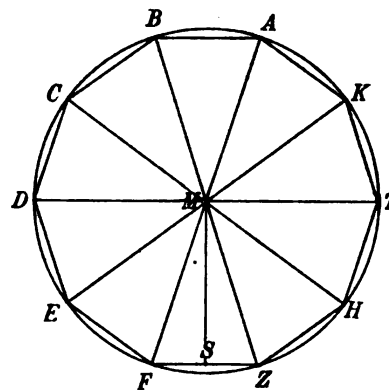


Fig. 17.

- 1) Dieses Verfahren entnimmt er dem Werte von

$$d = \sqrt{200 + \sqrt{8000}} = \sqrt{2 \cdot 10^2 + \sqrt{\frac{4}{5} \cdot 10^4}};$$

er verallgemeinert also hier den in Prop. V gefundenen Wert durch eine Formel und spricht sie in Worten aus.

- 2) SACERDOTE hat $2x$.

- 3) SACERDOTE hat $\frac{x}{2}$.

- 4) SACERDOTE hat 10.

- 5) SACERDOTE hat + statt —.

- 6) SACERDOTE hat nur: „Estraine la racine“.

addieren müssen, das Resultat wird der Durchmesser des umbeschriebenen Kreises sein.¹⁾ Nachdem wir dieses erklärt haben, setzen wir $FZ = x$; dann muß der Durchmesser des Kreises $= x + \sqrt{5x^2}$ sein, der Radius MZ also $= \frac{x}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}x^2}$. — Und es ist bekannt²⁾, daß, wie EUKLIDES gesagt hat, wenn eine Linie nach mittlerem und äußerem Verhältnis geteilt ist und ihr ein dem größeren Teil gleiches Stück hinzugefügt wird, dann die ganze Linie nach dem mittleren und äußeren Verhältnis geteilt, und der größere Abschnitt die zuerst gegebene Linie sein wird (EUKL. XIII, 5). Und ebenso ist bekannt³⁾, daß, wenn diese (ganze) Linie nach dem mittleren und äußeren Verhältnis geteilt wird, ihr kleinerer Abschnitt der größere Abschnitt der zuerst gegebenen Linie sein wird. Und er sagt an einem anderen Orte (EUKL. XIII, 9), daß, wenn die Seite des Zehnecks und jene des Sechsecks, die demselben Kreise einbeschrieben sind, zu einer Linie vereinigt werden, dann diese Linie nach dem mittleren und äußeren Verhältnis geteilt sein wird, und der größere Abschnitt die Seite des Sechsecks sein wird. Wenn wir also aus diesen zwei Linien eine gemacht haben werden, so wird diese nach mittlerem und äußerem Verhältnis geteilt sein, wie die Linie MZF .⁴⁾ Setzen wir die Linie $ZF = x$ und ziehen sie von MZ ab und fügen zum Reste die Hälfte von ZF (also $\frac{1}{2}x$), erheben das Resultat ins Quadrat, so wird dies das fünffache Quadrat der Hälfte von ZF sein, wie EUKLIDES sagt (XIII, 3). Multipliziere also die Linie ZF ⁵⁾ mit sich selbst und das Produkt mit 5, ziehe hieraus die Wurzel und addiere diese zur Hälfte von ZF , d. h. zu $\frac{x}{2}$, so hast du die Linie MZ .⁶⁾ — Aber es ist schon gezeigt worden, daß $MZ = \frac{x}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}x^2}$ ist; ziehe die Senkrechte MS im Dreieck FZM , es ist bekannt, daß sie in die Mitte von ZF fällt; erhebe MZ ins Quadrat, dies gibt $1\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{1\frac{1}{4}x^4}$, erhebe auch ZS ins Quadrat, dies gibt $\frac{x^2}{4}$, subtrahiere es von $1\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{1\frac{1}{4}x^4}$, so hast du: $1\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{1\frac{1}{4}x^4}$, die Wurzel aus diesem ist die Linie MS . Multipliziere MS^2 mit ZS^2 , so hast du: $100 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{16} + \sqrt{\frac{5}{64}x^8}$ ⁷⁾; restauriere $\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{16}$, damit du x^4 bekommst, in-

1) SACERDOTE hat: „sarà il lato del decagono“.

2) Hier folgt noch, wahrscheinlich von Abschreibern unrichtigerweise hinzugefügt: „nach dem, was wir gesagt haben“.

3) Besser wäre: „Und hieraus folgt“.

4) Als eine Gerade betrachtet; SACERDOTE hat ZMF .

5) Soll heißen: „die Hälfte von ZF “.

6) Was hier aus EUKLIDES genommen ist, gehört eigentlich nicht hierher, es unterbricht störend die begonnene algebraische Lösung; es hätte als Zusatz an den Schluß gestellt werden sollen, wo es sich in der Tat auch bei LEONARDO findet; es hat hier wahrscheinlich durch Abschreiber eine Umstellung stattgefunden.

7) SACERDOTE hat $\sqrt{\frac{5}{64}x^{16}}$.

dem du mit $3\frac{1}{5}$ alles multiplizierst, so erhältst du: $x^4 + \sqrt{\frac{4}{5}x^8} = 320$. Reduziere auf x^4 , indem du mit $5 - \sqrt{20}$ multiplizierst, so hast du: $x^4 = 1600 - \sqrt{2048000}$.²⁾ Die Wurzel aus der Wurzel aus diesem ist die Linie ZF , die Seite des Zehnecks.

XVIII.

Und wenn gesagt wird: Der Inhalt (Fig. 18) des Dreiecks $DBE^3)$ von dem Fünfeck $ABCDE$ sei = 10, wie groß ist die Seite DE des Fünfecks?

Um dies zu erhalten, setzen wir $DE = x$. EUKLIDES hat bewiesen, daß, wenn man die Linie BE nach dem mittleren und äußeren Verhältnis teilt, der größere Abschnitt = DE ist (EUKL. XIII, 8). Ebenso ist bekannt, daß, wenn eine Linie nach dem mittleren und äußeren Verhältnis geteilt wird und man den kleineren Abschnitt zur Hälfte des größeren hinzufügt, das Quadrat dieser Summe gleich ist dem fünffachen Quadrate der Hälfte des größeren Abschnittes (EUKL. XIII, 3). Teilen wir nun $BE^4)$ nach mittlerem und äußerem Verhältnis im Punkte M , so daß EM der größere Abschnitt und also = DE sei; teilen wir ferner EM in zwei gleiche Teile im Punkte L , so ist $BL^2 = 5 \cdot EL^2$; aber $EL^2 = \frac{x^2}{4}$, da wir $DE = x$ angenommen haben und deshalb auch $EM = x$ und $EL = \frac{x}{2}$ ist. Dann ist $BL^2 = 1\frac{1}{4}x^2$ und $BL = \sqrt{1\frac{1}{4}x^2}$; und da $EL = \frac{x}{2}$, so ist $BE = \frac{x}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}x^2}$. Wir ziehen BH senkrecht auf DE im Dreieck BED , so wird $EH = \frac{x}{2}$ sein, ins Quadrat erhoben, gibt es $\frac{x^2}{4}$, dies von BE^2 abgezogen, welches $= 1\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{1\frac{1}{4}x^4}$, so bleibt $1\frac{1}{4}x^2 + \sqrt{1\frac{1}{4}x^4}$, die Wurzel aus diesem ist die Linie BH . Multipliziere BH^2 mit EH^2 , dies gibt: $\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{16} + \sqrt{\frac{5}{64}x^8} = 100$. Restauriere, um x^4 zu erhalten, indem du mit $3\frac{1}{5}$ ⁶⁾ multiplizierst, so erhältst du $x^4 + \sqrt{\frac{4}{5}x^8} = 320$. Reduziere alles, was du hast, auf x^4 , indem du mit $5 - \sqrt{20}$ multiplizierst, so erhältst du $x^4 = 1600 - \sqrt{2048000}$.⁸⁾ Die Wurzel aus der Wurzel⁹⁾ von

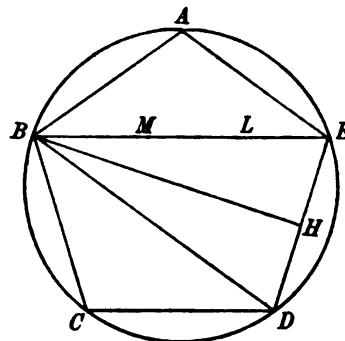


Fig. 18.

1) SACERDOTE hat wieder x^{16} unter der Wurzel.

2) SACERDOTE hat: $1600 - 2\sqrt{1048000}$.

3) SACERDOTE hat ABE .

4) SACERDOTE hat DE .

5) SACERDOTE hat $[\frac{5}{64}x^4]$.

6) SACERDOTE hat $\frac{3}{5}$.

7) SACERDOTE hat $\sqrt{\frac{4}{5}x^{10}}$.

8) SACERDOTE hat $\sqrt{1048000}$.

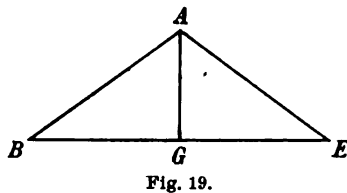
9) SACERDOTE hat nur „la radice“ statt „la radice della radice“.

diesem ist die Linie DE ; und das Dreieck BED dieses Fünfecks ist ähnlich dem Dreieck ZMF' des Zehnecks, von dem wir in der vorhergehenden Proposition gesprochen haben.

XIX.

Und wenn gesagt wird: Der Inhalt (Fig. 19) des Dreiecks ABE [des in der vorigen Proposition gegebenen Fünfecks]²⁾ ist = 10, wie groß ist seine Seite BE ?

Um dies zu erhalten, setzen wir $BE = x$. EUKLIDES hat bewiesen, daß, wenn wir eine Linie nach dem mittleren und äußeren Verhältnis teilen und zum größeren Abschnitt die Hälfte der Linie hinzufügen, das Quadrat dieser Summe gleich dem fünffachen Quadrate der Hälfte der Linie sei (EUKL. XIII, 1). Multiplizieren wir $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ mit 5, so haben wir $1\frac{1}{4}x^2$; aus dem, was wir gesagt haben (soeben und in Prop. XVIII), folgt, daß $AE = \sqrt{1\frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{2}}$; wir ziehen die Senkrechte auf BE , sie sei AG . Multipliziere AE mit sich selbst, so



hast du $1\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1\frac{1}{4}x^4}$; erhebe $EG = \frac{x}{2}$ ins Quadrat, so hast du $\frac{x^2}{4}$; subtrahiere dieses vom Quadrate von AE , so ist die Wurzel aus dem Reste, nämlich $1\frac{1}{4}x^2 - \sqrt{1\frac{1}{4}x^4}$, gleich der Linie AG , der Senkrechten im Dreieck ABE . Multipliziere AG^2 mit EG^2 , so hast du $\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{16} - \sqrt{\frac{5}{64}x^8}$; dies ist das Quadrat des Dreiecks ABE , also = 100, du hast also: $100 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{16} - \sqrt{\frac{5}{64}x^8}$. Restauriere, um x^4 zu erhalten, indem du mit $3\frac{1}{5}$ multiplizierst, dies gibt: $x^4 - \sqrt{\frac{4}{5}x^8} = 320$. Reduziere alles auf x^4 , indem du mit $5 + \sqrt{20}$ multiplizierst, so hast du: $x^4 = 1600 + \sqrt{2048000}$ ⁵⁾; die Wurzel aus der Wurzel von diesem ist die Linie BE .

XX.

Und wenn gesagt wird: Im regelmäßigen Zehneck (Fig. 20) $AB \dots K$ ist der Inhalt des Dreiecks $HTK = 10$, wie groß ist die Seite HK , welche den fünften Teil des Umfanges des dem Zehneck umschriebenen Kreises abschneidet?

1) SACERDOTE hat ZME .

2) Das Eingeklammerte fehlt in der italienischen Übersetzung und wahrscheinlich auch im hebräischen Text.

3) SACERDOTE hat x^{16} statt x^8 , wie auch bei den folgenden Wurzeln.

4) SACERDOTE hat $\frac{3}{5}$.

5) SACERDOTE hat $\sqrt{1048000}$.

Um dies zu finden, setzen wir $HK = x$. Wir haben schon gezeigt (Prop. XVI), daß, wenn man die Seite, die den fünften Teil des Kreisumfanges abschneidet, mit x bezeichnet, das Quadrat des Durchmessers des Kreises $= 2x^2 + \sqrt{\frac{4}{5}}x^4$ ist, also das Quadrat des Radius $= \frac{x^2}{2} + \sqrt{\frac{x^4}{20}}$; dies subtrahiert vom Quadrate der Fünfeckseite, also von x^2 , bleibt das Quadrat von $KT^1) = \frac{x^2}{2} - \sqrt{\frac{x^4}{20}}$; denn EUKLIDES hat bewiesen, daß das Quadrat der Fünfeckseite gleich ist der Summe aus den Quadraten der Sechseckseite und der Zehneckseite (EUKL. XIII, 10). Subtrahiere von diesem $(KT^2) AK^2 = \frac{x^2}{4}$, so bleibt das Quadrat der Senkrechten $AT = \frac{x^2}{4} - \sqrt{\frac{x^4}{20}}$. Multipliziere dieses mit $AK^2 = \frac{x^2}{4}$, so hast du $\frac{x^4}{16} - \sqrt{\frac{x^8}{320}}$, die Wurzel aus diesem ist der Inhalt des Dreiecks HTK , also hat man: $\frac{x^4}{16} - \sqrt{\frac{x^8}{320}} = 100$. Restauriere, indem du mit 16 multiplizierst, gibt: $x^4 - \sqrt{\frac{4}{5}}x^8 = 1600$. Reduziere auf x^4 , indem du alles mit $5 + \sqrt{20}$ multiplizierst, so erhältst du: $x^4 = 8000 + \sqrt{51200000}$; die Wurzel aus der Wurzel aus diesem ist die Linie HK , die den fünften Teil (des Umfanges) des dem Zehneck umbeschriebenen Kreises abschneidet.³⁾

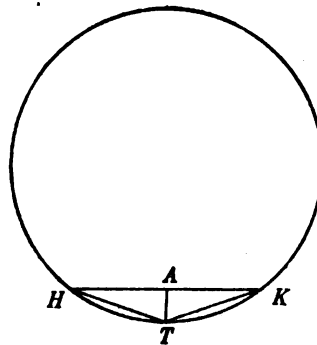


Fig. 20.

Kommentar.

SHŌGĀ' B. ASLAM, ABŪ KĀMIL⁴⁾, lebte ca. zwischen 850 und 930 in Ägypten. Von seinen im *Fihrist* erwähnten Werken ist arabisch, soviel bis jetzt bekannt, keines mehr vorhanden; in Leiden (Manuskript 1003) existiert von ihm eine Schrift über unbestimmte Aufgaben, betitelt *Tarā'if* (Auserlesenes, Seltenes).⁵⁾ Ins Lateinische übersetzt wurden seine Algebra, die *Tarā'if*, die hier behandelte Schrift „über das Fünfeck und Zehneck“, die ebenfalls im *Fihrist* nicht genannt ist, wenigstens nicht unter diesem Titel, und sehr wahrscheinlich die Schrift „über die Vermehrung und die Verminderung“; in den Verhandlungen des 3. inter-

1) SACERDOTE hat AT . 2) SACERDOTE hat wieder x^{16} statt x^8 .

3) Das hebräische Manuskript hat bloß den Kreis, das Dreieck HKT wurde von SACERDOTE hinzugefügt.

4) Vgl. H. SUTER, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, in Abhandl. z. Gesch. d. mathem. Wissenschaften 10, 1900, p. 43, Nr. 81.

5) Wenn es uns Zeit und Gesundheit erlauben, werden wir bald etwas Näheres über diese Abhandlung berichten können.

nationalen Mathematiker-Kongresses (p. 558—561) habe ich nämlich gezeigt, daß der von LIBRI¹⁾ veröffentlichte *Liber augmenti et diminutionis* sehr wahrscheinlich die Schrift über die beiden Fehler, oder über die Vermehrung und die Verminderung von SHOḠĀ' B. ASLAM sein werde. Ins Hebräische übersetzt existieren die Algebra, die Abhandlung über das Fünfeck und Zehneck und die Tarā'if, und zwar die erste in München (225,2^o) und Paris (1029,7^o), die zweite und dritte nur in München (225,3^o und 4^o). Diese hebräischen Übersetzungen wurden von MORDECHAI FINZI aus Mantua (ca. 1460) gemacht, und zwar nicht aus dem Arabischen und auch nicht aus dem Lateinischen, sondern aus dem Spanischen, worauf ich unten noch zu sprechen komme. Es ist also nicht zu verwundern, wenn von diesen Schriften ABŪ KĀMILS nur noch das Materielle geblieben, die Form aber sehr alteriert worden ist.

Unsere Schrift beginnt mit einem kurzen Vorwort, dann geht der Autor sofort zur Auflösung der zwanzig geometrischen Probleme über. Ich gebe im folgenden die Hauptstellen des Vorwortes aus der lateinischen Übersetzung des Pariser Manuskripts 7377A, die SACERDOTE in Note 3 (p. 172) hinzufügt²⁾:

Dixit ABUCAMEL SSAGIA, filius ABRAHIM, aggregator istius libri: postquam exposuimus quod indiget exponere in eo quod est occultum ex computatione restaurationis et oppositionis respicientium antiquorum in scientia et in aggravatione in eo et intelligentium ex geometris et sapientibus in libro EUCLIDIS et aliis, et glosavimus illud et discooperuimus in libro nostro isto, evenimus nunc ad exponendum quantitatem vel mensuram cuiusque lateris de lateribus cuiusque figure pentagoni et decagoni equilateri et equianguli descripti intra circulum notum, vel extra circulum notum, etc. . . . et alia ex eis que exponemus in libro nostro isto ex illo per quod est inventio multa, et ego iudico in bonum quos vidi compotistas et geometras nostri temporis huius et antiquos de quibus³⁾ audiivi sapientes in numero et mensura; creator tamen erexit me ad posse applicare ad id quod eis fuit impossibile contingere.

Diese Vorrede ist jedenfalls etwas verdorben oder nicht ganz korrekt aus dem Pariser Kodex abgeschrieben. Wie man sieht, erwähnt er seine vorher verfaßte Abhandlung über die Algebra und rühmt sich dann am Schlusse etwas, indem er behauptet, durch des Schöpfers Hilfe erreicht zu haben, was anderen unmöglich war.

1) *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, 2^e édit. (1865) 1, p. 304—369, Note XIV.

2) Er sagt, daß die Übersetzung von GERHARD von Cremona sei; woher er dies hat, weiß ich nicht, wahrscheinlich steht dies im Pariser Kodex.

Von der hebräischen Übersetzung unserer Abhandlung sagt G. SACERDOTE: „Aus welcher Sprache er (MORDECHAI FINZI) übersetzt habe, ist nicht möglich nachzuweisen. Die größte Wahrscheinlichkeit oder wenigstens Vermutung, die sich sogleich uns aufdrängt, ist die, daß er sich eines lateinischen oder italienischen Textes bedient habe; und auf einen italienischen Text möchte wirklich jenes sepher lō'ēz¹⁾ hinweisen, von dem er in der 15. Prop. spricht, wenn nur nicht gerade in der ersten Linie zwei spanische Wörter auftreten würden, von denen das erste nicht einmal für ein phonetisch modifiziertes oder fehlerhaft transkribiertes italienisches Wort gehalten werden könnte. Zudem werden auch einige spanische Wörter hier und da im zweiten Traktat des hebräischen Kodex, der die Algebra des ABŪ KĀMIL enthält, gebraucht; aus allem diesem ergibt sich ungezwungen die Vermutung, daß das Original, dessen sich FINZI bei seiner Übersetzung bediente, in spanischer Sprache geschrieben gewesen sei. — Doch dieses sind Vermutungen, die allerdings alle ihre gute Stütze haben, aber von denen bis jetzt keine Berechtigung besitzt, zur Wirklichkeit zu werden. Übrigens ist der hebräische Text, der uns hier am meisten interessiert, uns in einer sehr schlechten Abschrift überliefert worden, in der weder unnütze Wiederholungen, noch wichtige Lücken, noch lästige Transkriptionsfehler mangeln.“

SACERDOTE schreibt im Anfang dieser Stelle die „größte Wahrscheinlichkeit“ der Vermutung zu, die Übersetzung sei nach einem lateinischen oder italienischen Texte gemacht worden, am Schlusse neigt er sich aber mehr einer spanischen Vorlage zu. Wir können dieses Schwanken nicht recht begreifen, sondern müssen uns entschieden auf den letzteren Standpunkt stellen. Das Sepher lō'ēz bezieht sich gar nicht auf die Hauptvorlage FINZIS, sondern auf ein anderes Buch, das er neben der Hauptvorlage noch benutzt zu haben scheint²⁾, und zudem bedeutet la'az im allgemeinen nur eine fremde Sprache und nicht eine ganz bestimmte, oder immer dieselbe.³⁾ Das Entscheidende sind unbedingt einige technische Ausdrücke, die der hebräische Übersetzer teilweise unübersetzt gelassen hat, und die auch in der Algebra vorkommen; ich erwähne hier nur die folgenden: cobramiento, confrontamiento, algo (bzw. algos). Untersuchen wir diese Wörter etwas näher: vom ersten gibt SACERDOTE selbst zu, daß

1) Sepher lō'ēz=fremdsprachliche Buch (von lā'az=eine fremde Sprache sprechen).

2) Siehe unten p. 41.

3) Die Hebraisten sind hierüber selbst nicht einig: nach STEINSCHNEIDER (*Hebr. Übersetzungen d. Mittelalters*, Berlin, 1893, p. 587) bedeutet es meistens das Italienische, aber nach der Vorrede zu diesem Werke, p. XVI, „nicht hebräisch, insbesondere Landessprache“; nach DALMAN (*Aramäisch-neuhebräisches Wörterbuch* etc., Frankfurt a. M., 1901) und LEVI (*Neuhebräisches und chaldäisches Wörterbuch* etc., Leipzig, 1876—1889) aber besonders das Griechische!

es kaum aus einem italienischen Worte durch falsche Lesart entstanden sein könne; es ist in der Tat ein echt spanisches, wenn auch altes Wort: cobrar bedeutet jetzt wiedererlangen, zurücknehmen, im Mittelalter aber auch reparar, corregir, d. h. wiederherstellen, verbessern¹); cobramiento entspricht also genau dem arabischen gebr. Das zweite Wort könnte wohl auch aus einer italienischen Übersetzung stammen, das spanische confrontamiento und das italienische, jetzt allerdings wenig mehr gebräuchliche confronto bedeuten beide Gegenüberstellung, Vergleichung, sie entsprechen also gut dem arabischen muqābala. Das dritte Wort ist wieder echt spanisch, SACERDOTE nennt seine Bedeutung nicht; daß es das Quadrat der Unbekannten bezeichnet, weiß er selbstverständlich aus dem Text. Algo bedeutet im Neuspanischen = etwas, einiges; im Mittelalter aber hatte es auch die Bedeutung, und zwar häufig im Plural, von bienes, hacienda, caudal¹), d. h. Güter, Besitz, Vermögen, es ist also genau das arabische māl; daß es stets im Plural gebraucht wird, auch wenn es sich nur um ein x^2 handelt, kann übrigens auch von Übersetzungs- und Abschreiberfehlern herrühren. Dies wird wohl genügen, um es so viel als sicher hinstellen zu können, daß MORDECHAI FINZI aus einem spanischen Text übersetzt hat.

Wir kommen zum Inhalt unserer Abhandlung. Wie SACERDOTE richtig bemerkt, sind die Aufgaben alle in einfacher und klarer Weise gelöst, durch Anwendung der Algebra auf Geometrie. Nur zwei Aufgaben (VI und XI) sind ohne Einführung einer Unbekannten und Aufstellung einer Gleichung gelöst, weil die gesuchte Größe aus vorhergehenden Aufgaben durch Anwendung bekannter geometrischer Sätze sich unmittelbar ergibt. Von geometrischen Sätzen benutzt der Verfasser (abgesehen von den aus der Ähnlichkeit hervorgehenden Proportionen) die folgenden: den pythagoräischen und den ptolemäischen Lehrsatz, die Sätze vom rechtwinkligen Dreieck, die über mittlere Proportionale handeln, den goldenen Schnitt und die Sätze des 13. Buches des EUKLIDES, die die gegenseitigen Beziehungen von Radius, Fünfeck-, Sechseck- und Zehneckseite behandeln. Er kommt bei seinen Ableitungen auf Gleichungen vierten Grades, die auf quadratische reduzierbar sind, auf reine und gemischt quadratische Gleichungen und auf Gleichungen ersten Grades. Interessant, weil hier zum erstenmal in diesem Umfange auftretend, sind die Reduktionen von Gleichungen mit irrationalen Koeffizienten auf solche mit rationalen, ja direkt auf solche mit dem Koeffizienten 1.²)

1) Vgl. den *Diccionario de construccion y regimen de la lengua Castellana* por R. J. CUERVO, Paris 1886—1893, welches Werk leider unvollendet geblieben ist.

2) Sie beruhen natürlich auf dem Satze $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ (bzw. $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$), der als Satz 114 des 10. Buches des EUKLIDES den Arabern bekannt war.

Wie seine Zeitgenossen und auch lange nachher noch seine Nachfolger konnte sich Shoḡā' nicht zu der Abstraktion erheben, die gegebene Größe (wie z. B. den Durchmesser des Kreises oder die Seite des Vielecks) mit einem besonderen Worte oder einem Buchstaben zu bezeichnen oder gar $= 1$ zu setzen, sondern er nimmt einen speziellen Zahlwert dafür an, meistens die Zahl 10, wie dies auch schon AL-KHWĀRIZMĪ in seinen Aufgaben getan hat. Daher kommt eben auch seinen Resultaten nicht die Anschaulichkeit einer Formel zu. Nur zweimal (Aufgabe XVI und XVII) drückt er den in früheren Aufgaben (V und IX) gefundenen Wert der Unbekannten allgemein in Worten aus. Es mag daher angebracht sein, im folgenden für die elf Hauptaufgaben die Formeln beizufügen, denen seine speziellen Auflösungen entsprechen (s_5 bedeutet die Seite des einbeschriebenen, S_5 die des umbeschriebenen Fünfecks, ebenso entsprechend für das Zehneck und Fünfzehneck):

$$\begin{aligned}
 \text{I. } s_5 &= \sqrt{\frac{5}{8}d^2 - \frac{5}{64}d^4} = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \\
 \text{II. } s_{10} &= \sqrt{\frac{5}{16}d^2 - \frac{d}{4}} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1) \\
 \text{III. } S_5 &= \sqrt{5d^2 - \sqrt{20}d^4} = 2r\sqrt{5-2\sqrt{5}} \\
 \text{IV. } S_{10} &= \sqrt{d^2 - \sqrt{\frac{4}{5}}d^4} = 2r\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}} \\
 \text{V. u. VII. } d &= \sqrt{2s_5^2 + \sqrt{\frac{4}{5}}s_5^4} = s_5\sqrt{2 + \frac{2}{5}\sqrt{5}} \\
 \text{VI. u. VIII. } d &= \sqrt{S_5^2 + \sqrt{\frac{4}{5}}S_5^4} = S_5\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}} \\
 \text{IX. } d &= s_{10} + \sqrt{5s_{10}^2} = s_{10}(1 + \sqrt{5}) \\
 \text{X. } d &= \sqrt{5S_{10}^2 + \sqrt{20}S_{10}^4} = S_{10}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \\
 \text{XI. } s_{15} &= \sqrt{\frac{5}{32}d^2 + \sqrt{\frac{5}{1024}}d^4} + \sqrt{\frac{3}{64}d^2 - \sqrt{\frac{15}{64}}d^2} \\
 &= \frac{r}{4}(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}).
 \end{aligned}$$

Wenn man bei Aufgabe XV die Seite des Quadrates mit a bezeichnet, so lautet die Formel für die Seite des einbeschriebenen gleichseitigen Fünfecks: $2a + \sqrt{2a^2} - \sqrt{2a^2 + \sqrt{32}a^4} = a(2 + \sqrt{2} - \sqrt{2 + 4\sqrt{2}})$.

ABŪ KĀMIL ist allerdings nicht der erste arabische Mathematiker, der geometrische Aufgaben auf algebraischem Wege löste, wir finden zwei Aufgaben auf diesem Wege schon bei MUḤ. B. MŪSĀ EL-KHWĀRIZMĪ gelöst, aber dieselben führen auf viel einfachere Gleichungen ohne irrationale Koeffizienten; die Arbeit ABŪ KĀMILS bedeutet also einen nicht unwichtigen Fortschritt auf diesem Gebiete.

Es ist schon bekannt, daß LEONARDO von Pisa diese Schrift ABŪ KĀMILS gekannt und für seine Arbeiten ausgiebig benutzt hat; SACERDOTE ist der erste, der hierauf ausdrücklich aufmerksam gemacht hat¹⁾; von den 20 Aufgaben des arabischen Mathematikers finden sich bei LEONARDO 17 mit denselben Zahlenbeispielen wieder, es sind dies die folgenden:

Prop.	I	findet sich bei LEONARDO ²⁾	p. 207 (Z. 1)
"	II	" " " "	" 208 (Z. 5)
"	III	" " " "	" 209 (Z. 7)
"	IV	" " " "	" 209 (Z. 3 v. u.)
"	V ³⁾	" " " "	" 210 (Z. 25)
"	VI	" " " "	" 212 (Z. 4 v. u.)
"	VII ³⁾	" " " "	" 211 (Z. 1)
"	IX	" " " "	" 211 (Z. 18)
"	X	" " " "	" 213 (Z. 23) ⁴⁾
"	XII	" " " "	" 213 (Z. 27)
"	XIII	" " " "	" 220 (Z. 2)
"	XV	" " " "	" 213 (Z. 3 v. u.)
"	XVI	" " " "	" 214 (Z. 17)
"	XVII	" " " "	" 214 (Z. 4 v. u.)
"	XVIII	" " " "	" 215 (Z. 24)
"	XIX	" " " "	" 215 (Z. 7 v. u.)
"	XX	" " " "	" 216 (Z. 16).

Wir wollen im folgenden die Abweichungen, die sich in der Behandlung einzelner Aufgaben bei den beiden Mathematikern zeigen, etwas näher betrachten.

Aufgabe I. L.⁵⁾ fügt am Schlusse noch eine etwas andere Ableitung hinzu; er gibt auch am Ende dieser Ableitung den angenäherten Wert von $62\frac{1}{2} - \sqrt{781\frac{1}{4}}$ zu $34\frac{1}{2}$ und die Wurzel hieraus zu $5\frac{7}{8}$ an. Wir können nicht sagen, ob diese Werte auch bei SH. ursprünglich vorgekommen seien; es ist dies wohl möglich und um so mehr anzunehmen, als L. nicht bei allen Aufgaben diese angenäherten Werte angibt.

Aufgabe II. Hier gibt L. ebenfalls noch eine andere Ableitung mit Hilfe des Satzes, daß die Zehneckseite gleich dem größeren Abschnitt des stetig geteilten Radius ist.

1) Vgl. auch Biblioth. Mathem. 6., 1905, p. 106.

2) *Scritti di LEONARDO PISANO*, pubbl. da B. BONCOMPAGNI, ROMA 1857—1862, T. II (*Practica geometriae*).

3) V u. VII sind bei LEONARDO zu einer zusammengezogen; VII ist in der Tat bei ABŪ KĀMIL nur eine andere Lösung von V, die auch bei LEONARDO vorkommt.

4) SACERDOTE hat Z. 2.

5) L. bezeichnet im folgenden stets LEONARDO, SH. SHOĠĀ' R. ASLAM.

Aufgabe III. L. hat auch den Bruchbruch $48\frac{6}{8}\frac{5}{8}$; statt $\frac{1}{5} + \frac{1}{25}$ aber hat er $\frac{6}{25}$ und statt $\frac{20}{625}$ den abgekürzten Bruch $\frac{4}{125}$; dann gibt er noch eine andere, etwas kürzere Ableitung.

Aufgabe IV. L. hat $7\frac{13}{16}$ statt $7\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{16}$. Auch hier folgt wiederum eine zweite Ableitung.

Aufgabe V u. VII. Statt $\sqrt{\frac{5}{62500}}$ steht bei L. unrichtig $\sqrt{\frac{1}{3125}}$ ¹⁾ Die beiden Ableitungen, die SH. in V u. VII gibt, folgen bei L. unmittelbar aufeinander; dann gibt er noch eine dritte, für die er das 14. Buch des EUKLIDES (HYPsikLES), und zwar den Satz 3 zu Hilfe nimmt: Das Quadrat der Fünfeckseite plus dem Quadrat der Diagonale des Fünfecks ist gleich dem fünffachen Quadrat des Radius des umbeschriebenen Kreises. Interessant ist, daß SH. nur das 12. und 13. Buch des EUKLIDES zitiert, LEONARDO aber auch das 14. Am Ende der zweiten Lösung (= VII.) fügt L. hinzu, der Ausdruck $\sqrt{200 + \sqrt{8000}}$ sei nahezu = 17.²⁾

Aufgabe VI. Hier beweist L. schon den Satz, den SH. in der zweiten Lösung dieser Aufgabe auch benutzt, aber erst in Aufgabe X beweist.

Aufgabe VIII. Diese enthält nur eine andere Lösung von VI und fehlt bei L.

Aufgabe IX. Hier gibt L. nach der Lösung SH.'s noch zwei andere; die erste von diesen benutzt dieselbe Figur wie in Aufgabe II und wendet den ptolemäischen Lehrsatz an und den Satz, daß das Quadrat der Fünfeckseite gleich sei der Summe der Quadrate der Zehneckseite und des Radius; die zweite benutzt die Figur der Konstruktion der Fünfeck- und Zehneckseite mittels der stetigen Teilung des Radius.

Aufgabe X. Hier gibt SH. zwei Lösungen, L. dagegen nur die zweite SH.'s, die sich auf den von L. in der unmittelbar vorhergehenden Aufgabe VI bewiesenen Satz stützt.

Aufgabe XI fehlt bei L., es wäre möglich, daß sie auch in der Originalabhandlung SH.'s nicht vorhanden gewesen wäre.

Aufgabe XII wird von L. ganz gleich gelöst wie von SH.

Aufgabe XIII. Diese Aufgabe wird von L. viel eingehender behandelt. Er berücksichtigt beide Rechtecke, die möglich sind, berechnet ihre Basen und Höhen und gibt am Schlusse die angenäherten Werte für beide in einfachen Brüchen an. Zur Vergleichung geben wir im folgenden die Lösung L.'s für den entsprechenden Fall, der sich bei SH. findet, nämlich die Berechnung der Höhen:

1) Auch in der Ausgabe der *Practica geometriae* durch BONCOMPAGNI kommen häufig Fehler in den Buchstaben und Zahlen vor.

2) Der Wert ist auf zwei Stellen = 17,01...

„Wenn wir (Fig. 21) die Seiten cd und hi kennen wollen, setzen wir jede derselben (also z. B. cd) $= \sqrt{x}$; weil nun die Dreiecke cbd und feg

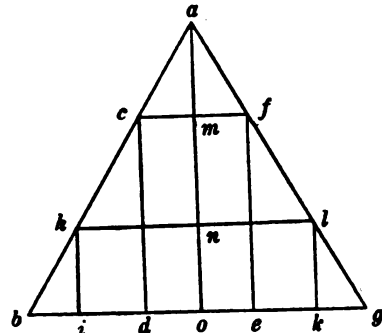


Fig. 21.

dem Dreieck abo ähnlich sind, hat man $bd^2:cd^2=eg^2:ef^2=bo^2:ao^2$; aber $bo^2=\frac{1}{3}ao^2$, daher ist $bd^2=\frac{1}{3}x$, da $cd=\sqrt{x}$ ist; aus dem gleichen Grunde ist $eg^2=\frac{1}{3}x$, also jede der Geraden bd und $eg=\sqrt{\frac{1}{3}x}$; beide abgezogen von bg , das $=10$ ist, bleibt $de=10-2\sqrt{\frac{1}{3}x}=10-\sqrt{1\frac{1}{3}x}$. Multiplizieren wir nun cd mit de , also $\sqrt{x}$ mit $10-\sqrt{1\frac{1}{3}x}$, so erhalten wir: $\sqrt{100x}-\sqrt{1\frac{1}{3}x^2}$, und dieses ist

$=10$. Wenn auf beiden Seiten der Gleichung $\sqrt{1\frac{1}{3}x^2}$ addiert wird, so erhält man: $10+\sqrt{1\frac{1}{3}x^2}=\sqrt{100x}$. Multipliziere beide Seiten mit sich selbst, so hast du: $100+1\frac{1}{3}x^2+\sqrt{533\frac{1}{3}x^2}=100x$. Reduziere alles, was du hast, auf x^2 , indem du alles mit $\frac{3}{4}$ Drachmen multiplizierst, so ergibt sich: $x^2+75+\sqrt{300x^2}=75x$. Subtrahiere auf beiden Seiten $\sqrt{300x^2}$, so bleibt: $x^2+75=75x-\sqrt{300x^2}$. Multipliziere die Hälfte der Anzahl der x , nämlich $37\frac{1}{2}-\sqrt{75}$ mit sich selbst, so ergibt sich $1481\frac{1}{4}-75\sqrt{75}$, von diesem subtrahiere 75, die bei dem Quadrate stehen, gibt $1406\frac{1}{4}-\sqrt{421875}$; die Wurzel aus diesem addiere zu der Hälfte der x , d. h. zu $37\frac{1}{2}-\sqrt{75}$, die Summe ist das Quadrat der Linie cd , das $ca\cdot 56\frac{1}{4}$ ist, seine Wurzel cd ist dann $ca\cdot 7\frac{1}{2}$, das mit $cf=ca\cdot 1\frac{1}{3}$ (in der vorigen Ableitung gefunden) multipliziert 10 ergibt, wie es sein muß.“ (Es folgt noch eine andere Ableitung mit Hilfe der Höhen am und an , die von $ao=\sqrt{75}$ abgezogen, die Seiten cd und hi ergeben.)

Man vergleiche nun diese Ableitung mit derjenigen Sn.'s, und man wird nicht recht begreifen, warum L. die seinige vorgezogen hat. Es ist ja wohl ein wirkliches Verdienst und ein Fortschritt L.'s, daß er beide Rechtecke berücksichtigt und parallel nebeneinander behandelt; wenn er aber die gesuchte Größe mit $\sqrt{x}$ statt x bezeichnet, so kompliziert er die Lösung, indem dadurch größere Zahlen auftreten, da er doch wieder eine quadratische Gleichung für x zu erhalten sucht (die Gleichung Sn.'s heißt: $x^2+\sqrt{75}=\sqrt{75x^2}$).

1) L. setzt also Faktoren vor Wurzeln, unmittelbar nachher aber nimmt er das 75 unter die Wurzel.

2) Zieht er die Wurzel von der Hälfte der x ab, so erhält er das Quadrat von hi ; L. berücksichtigt also beide Wurzeln der quadratischen Gleichung; es scheint, daß Sn. die Gültigkeit beider Wurzeln in diesem Falle nicht erkannt hat, doch steht dies nicht unbedingt fest, seine Lösung kann durch Abschreiber und Übersetzer verkürzt worden sein.

Aufgabe XIV fehlt bei L., dafür hat er¹⁾ die einfachere: In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 10 sei ein Quadrat einzuschreiben, wie groß ist seine Seite? Es ist möglich, daß SH. die Aufgabe aus dem Grunde etwas umgestaltet hat, weil die einfachere Aufgabe (nur mit einem gleichschenkligen statt einem gleichseitigen Dreieck) schon von MUH B. MŪSĀ gelöst worden ist.²⁾ — Es muß wieder erwähnt werden, daß L. bei der einen Lösung seiner einfacheren Aufgabe die Quadratseite mit $\sqrt{x}$ bezeichnet und dabei auf die Gleichung $x^2 + 90000 = 4200x$ kommt, während er bei Bezeichnung derselben mit x die Gleichung $x^2 + 60x = 300$ erhalten hätte.

Aufgabe XV. Die Lösung ist bei L. etwas ausführlicher dargestellt als bei SH., wo sie sehr stark gekürzt ist. Der Übersetzer ins Hebräische, MORDECHAI FINZI, verstand diese Aufgabe nicht recht, wie er selbst in einer Anmerkung gesteht. Er war der Ansicht, es handle sich darum, ein regelmäßiges Fünfeck in ein Quadrat zu zeichnen; er probierte dies mit verschiedenen Stellungen des Fünfecks und bemerkt dann ganz richtig: „Nachdem ich aber die zweite Figur gezeichnet hatte, sah ich ein, daß das dem Fünfeck umbeschriebene Viereck ein Rechteck und nicht ein Quadrat sein müsse“; aber auch diese Einsicht brachte ihn noch nicht auf die Idee, daß es sich vielleicht nur um ein gleichseitiges Fünfeck handeln könnte. — Uns interessiert hier aber besonders der Schluß der Anmerkung FINZIS, wo er sagt, er habe die erste Figur aus einem Buche in fremder Sprache³⁾ kopiert, habe sie aber, da er sie als falsch ansah, verbessert.⁴⁾

Hieraus geht doch hervor, daß FINZI neben seiner Hauptvorlage (in spanischer Sprache) noch ein anderes Buch in anderer Sprache geschrieben vor sich hatte, aus dem er die erste Figur entnahm. In welcher Sprache war nun aber dieses andere Buch geschrieben. Wie wir oben (p. 35) schon gesehen haben, sind die Hebraisten über die Bedeutung von lō'ēz selbst nicht einig, es kann daher wohl auch einmal „lateinisch“ bedeuten; es liegt nämlich die Vermutung sehr nahe, jenes Buch möchte die *Practica geometriae* des LEONARDO von Pisa gewesen sein, zumal jene erste Figur mit derjenigen bei LEONARDO sogar bis auf die unnötig gezogene Linie *EM* übereinstimmt. Es wäre freilich nicht unmöglich, daß FINZI eine italienische Übersetzung der *Practica geometriae* besessen hätte,

1) P. 223, Z. 28.

2) Dieser nimmt den Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks = 10 und die Basis = 12 an und erhält dadurch eine rationale Höhe, was die Lösung sehr vereinfacht.

3) SACERDOTE übersetzt sepher lō'ēz mit: „aus einem italienischen Buche“.

4) Worin diese „Verbesserung“ bestanden hat, wissen wir nicht; wir geben die Figur der Aufgabe entsprechend, wie wir sie auch bei SACERDOTE gefunden haben.

obgleich man heutzutage von einer solchen nichts weiß; aber es ist doch unwahrscheinlich, daß der in Mantua lebende FINZI ein in italienischer Sprache geschriebenes Buch ein Sepher lō'ēz genannt hätte.

Aufgaben XVI—XX sind im ganzen übereinstimmend behandelt bei beiden Autoren; nur bei XVIII macht sich L. die Lösung leichter, indem er erkennt, daß in diesem Falle das Dreieck BED in Seiten und Winkeln genau mit dem Dreieck MFZ in Aufgabe XVII übereinstimme, sich also für DE derselbe Wert ergeben müsse wie für FZ ; er braucht also die Höhe BH nicht, wie SH.

Aus dieser Vergleichung ergibt sich, daß die Auflösungen SH.'s im allgemeinen kürzer sind als diejenigen L.'s, der auch öfters Beweise hinzufügt, die jener nicht für nötig hielt anzuführen. Ob diese kürzere Redaktion SH. zuzuschreiben sei, oder ob sie das Resultat der mehrfachen Übersetzungen sei, können wir nicht entscheiden, neigen uns aber zur letzteren Ansicht hin, da im allgemeinen die arabischen Mathematiker in ihren Darstellungen sich nicht durch prägnante Kürze ausgezeichnet haben.

L. lehnt sich oft sehr eng an die Ausdrucksweise SH.'s an, das beweisen Ausdrücke wie: *Restaura, reduc totum quod habes, et si dicetur oder et si dicemus tibi etc.* Dafür zeigt sich aber seine Selbständigkeit wieder in den zweiten, oft dritten Lösungen, die er bei verschiedenen Aufgaben hinzufügt, und besonders in der oben (p. 40) schon besprochenen Berücksichtigung zweier Lösungen einer Aufgabe, bzw. der beiden positiven Wurzeln einer quadratischen Gleichung.

Man gestatte uns zum Schlusse noch folgende Bemerkung: Im 15. Abschnitt von LEONARDOS *Liber Abbaci* befindet sich bekanntlich seine Algebra, d. h. die Auflösung der sechs Fälle mit den verschiedenartigsten Aufgaben. In diesen kommen nun auch die soeben angeführten Wendungen, wie *restaura etc.*, vor. Liegt da nicht die Vermutung nahe, die Algebra LEONARDOS, oder wenigstens gewisse Teile derselben, sei der Algebra SH.'s entnommen? Dazu kommt noch, daß einige Angaben STEINSCHNEIDERS¹⁾ über den Inhalt der in München vorhandenen hebräischen Übersetzung der Algebra SH.'s mit Stellen der Algebra LEONARDOS im Einklang zu stehen scheinen. Freilich wäre auch die Erklärung dieser Erscheinung nicht zu verwerfen, wenn auch nicht wahrscheinlich, LEONARDO möchte sich durch das Studium der Abhandlung SH.'s über das Fünfeck und Zehneck diese Ausdrücke zu eigen gemacht und in seinen späteren Schriften verwendet haben.

1) *Die hebräischen Übersetzungen des Mittelalters*, p. 586.

Über das angebliche Vorkommen krummliniger Koordinaten bei Leibniz.

Von G. ENESTRÖM in Stockholm.

In seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* berichtet M. CANTOR¹⁾ über die Abhandlung LEIBNIZENS *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente*²⁾ und gibt dabei an, daß diese Abhandlung zwei neue folgewichtige Begriffe in die Geometrie einführte, von denen der eine der Begriff der krummlinigen Koordinaten war; er fügt hinzu, daß diese Koordinaten „allerdings nur beiläufig aber deshalb nicht mit geringerer Deutlichkeit erwähnt sind“. Dann gibt CANTOR eine deutsche Übersetzung des betreffenden Passus und teilt in einer Fußnote den Originaltext mit. Hier unten bringe ich sowohl diesen wie die CANTORSche Übersetzung zum Abdruck.

Originaltext LEIBNIZENS.

Ego sub ordinatim ductis non tantum rectas, sed et curvas lineas qualescunque accipio, modo lex habeatur, secundum quam dato lineae cujusdam datae (tanquam ordinatricis) puncto, respondens ei puncto linea duci possit, quae una erit ex ordinatim ducendis, seu ordinatim positione datis.

Übersetzung nach CANTOR.

Unter Koordinaten verstehe ich nicht nur Gerade, sondern beliebige Kurven, wenn nur ein Gesetz vorhanden ist, nach welchem, sofern ein bestimmter Punkt einer als Koordinate gegebenen Linie gleichfalls gegeben ist, diesem Punkte entsprechend eine Linie gezogen werden kann, welche dem anderen Systeme der als Koordinaten gewählten angehört.

Vergleicht man jetzt die Übersetzung mit dem Originaltext, so findet man:

1. daß im Originaltext das Wort „coordinatae“ gar nicht vorkommt;
2. daß in der Übersetzung der Ausdruck: „dem anderen Systeme“ angewandt wird, obgleich der Originaltext kein Wort hat, das „anderen“ entspricht.

1) M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 3, Leipzig [1894—]1898. S. 204; 3², Leipzig 1901, S. 211.

2) *Acta eruditorum* 1692, S. 168—171; *LEIBNIZENS Mathematische Schriften*, herausgeg. von C. I. GERHARDT 5, Halle 1858, S. 266—269

Der zweite Umstand ist nicht an sich von großem Belang, aber dennoch geeignet, die CANTORSche Übersetzung ein wenig verdächtig zu machen. Dagegen ist der erste Umstand sehr auffällig, besonders weil später in der Abhandlung das Fachwort „coordinatae“ zur Anwendung kommt¹⁾, und man muß sich darum sofort fragen: „Wie weiß CANTOR, daß der Ausdruck „lineae ordinatim ductae“ Koordinaten bedeutet?“ Auf diese Frage kann man nur antworten: Vielleicht hat CANTOR die zwei Ausdrücke „lineae ordinatim applicatae“ und „lineae ordinatim ductae“ verwechselt, von denen der erste allerdings im 17. Jahrhundert die Bedeutung „Ordinaten“ (nicht „Koordinaten“) hatte, während der zweite, soviel ich weiß, erst bei LEIBNIZ als Fachwort vorkommt und auf unsere mathematische Sprache mit „Schar von Linien“ wiedergegeben werden kann.²⁾ Daß der Ausdruck „lineae ordinatim ductae“ nicht immer mit „Koordinaten“ übersetzt werden kann, geht schon aus dem Titel der Abhandlung LEIBNIZENS hervor, denn es wäre ja unsinnig, von einer Kurve zu sprechen, die von einer unendlichen Zahl von Koordinaten gebildet wird.³⁾ Daß der Ausdruck überhaupt nichts mit Koordinaten zu tun hat, sieht man unmittelbar, wenn man den Anfang der Abhandlung LEIBNIZENS liest, denn dort kommt folgender Passus vor, der fast als eine Definition des Ausdruckes betrachtet werden kann:

quia multis aliis modis fieri potest, ut infinitae duci intelligantur lineae secundum legem quandam communem, quae tamen non sint parallelae vel convergentes ad punctum omnibus commune, aut a puncto omnibus communi divergentes, ideo nos tales lineas generaliter vocabimus ordinatim ductas, vel ordinatim (positione) datas

Freilich könnte man sagen, daß der Ausdruck „lineae ordinatim ductae“ hier in einer Bedeutung vorkommt, die gewissermaßen als eine Verallgemeinerung des Begriffes Ordinatergerade betrachtet werden kann. Wählt man nämlich eine gegebene Linie zur Abscissenachse und nimmt

1) „Tam ordinata, quam abscissa, . . . quas et coordinatas appellare soleo.“

2) Dies stimmt auch sehr wohl mit der von LEIBNIZ selbst benutzten französischen Übersetzung „rang de lignes“ überein; siehe seinen Brief an HÔPITAL aus dem Jahre 1693 (*LEIBNIZENS Mathematische Schriften*, herausgeg. von C. I. GERHARDT, 2, Berlin 1850, S. 230). G. KOWALEWSKI (*LEIBNIZ über die Analysis des Unendlichen*, Leipzig 1908, S. 35) übersetzt „lineae ordinatim positione datae“ mit „ihrer Lage nach gegebene Linien in bestimmter Anordnung“, was natürlich nicht unrichtig ist, obgleich die Übersetzung „Schar von Linien“ meines Erachtens besser wäre.

3) M. MARIE (*Histoire des sciences mathématiques et physiques* 6, Paris 1885, S. 198) übersetzt den Titel auf folgende Weise: „De la ligne formée des rencontres successives d'une infinité de lignes menées régulièrement et les touchant toutes.“ Bei seinem Berichte über den Inhalt der Abhandlung bedient sich MARIE des Ausdruckes „courbes ordonnées“ (S. 199).

auf derselben einen beliebigen Punkt, dessen Abscisse x_0 sei, denkt man sich ferner, daß durch jeden Punkt x_0 eine Kurve geht, deren Gleichung $\eta = F(x_0, \xi)$ ist, so kann diese Kurve als eine Verallgemeinerung der Ordinatengerade $\xi = x_0$ betrachtet werden. Man könnte dann auf den Gedanken kommen, eine beliebige Kurve durch eine Gleichung zwischen der Abscisse x_0 und der Bogenordinate $\int \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ zu repräsentieren. Auf diese Weise wäre es also möglich, „una ex ordinatim ductis“ durch „krummlinige Ordinate“ zu übersetzen. Aber teils findet sich bei LEIBNIZ nicht die geringste Andeutung, daß er daran gedacht hat, eine beliebige Kurve durch eine Gleichung zwischen Abscisse und Bogenlänge einer „linea ordinatim ducta“ zu repräsentieren, teils wäre dennoch die CANTORSche Übersetzung unrichtig, weil es heißen sollte: „Unter Ordinaten verstehe ich . . . einer als Abscisse gegebenen Linie . . . der als Ordinaten gewählten angehört.“

Die richtige Übersetzung der von CANTOR zitierten Stelle bei LEIBNIZ lautet also etwa auf folgende Weise:

Unter Schar von Linien verstehe ich nicht nur Gerade, sondern beliebige Kurven, wenn nur ein Gesetz vorhanden ist, nach welchem, sobald ein Punkt einer (als Beziehungslinie) gegebenen Geraden gegeben ist, eine diesem Punkt entsprechende Linie gezogen werden kann, die der Schar angehört.

Aber dadurch geht auch hervor, daß bei LEIBNIZ nicht ein einziges Wort über krummlinige Koordinaten vorkommt.¹⁾

Auch an den anderen Stellen, wo LEIBNIZ von „lineae ordinatim ductae“ oder „curvae ordinatim positione datae“ spricht, habe ich vergebens eine Andeutung, daß er diese Kurven als Ordinaten betrachtete, gesucht. Wie fern LEIBNIZ in Wahrheit von einer solchen Betrachtungsweise war, sieht man z. B. aus seinem Brief an JOHANN BERNOULLI vom 6./16. Mai 1695, wo er sich über die Konstruktion von Differentialgleichungen erster Ordnung durch „curvae ordinatim positione datae“ äußert.²⁾ Diese Kurven sind mit denjenigen identisch, die jetzt zuweilen „isokline Linien“ genannt werden; ist $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ die gegebene

1) Es ist mir nicht gelungen, bei früheren mathematisch-historischen Verfassern auch nur eine Andeutung von dem Vorkommen krummliniger Koordinaten in der Abhandlung LEIBNIZENS aus dem Jahre 1692 aufzufinden (vgl. z. B. C. I. GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, München 1877, S. 166, Fußnote 1; MARIE, a. a. O. 6, S. 198—200).

2) *LEIBNIZENS Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. GERHARDT, 3:1, Berlin 1855, S. 178. Bekanntlich wurde die betreffende Konstruktion von Differentialgleichungen 1694 von JOHANN BERNOULLI gelehrt.

Differentialgleichung, so ist die Gleichung dieser Kurven $f(x, y, a) = 0$, wo a ein arbiträrer Parameter ist. Hätte LEIBNIZ überhaupt an krummlinige Koordinaten gedacht, so würde es wohl nahe gelegen haben, die successiven Werte von a als Abscissen und die entsprechenden isoklinen Linien als Ordinaten zu betrachten, aber, wie schon bemerkt, kommt bei ihm keine Andeutung von einer solchen Betrachtungsweise vor.¹⁾

Es ist sehr interessant zu sehen, welche hypnotisierende Wirkung die zuversichtlich ausgesprochene Behauptung CANTORS auch auf Personen, die nicht kritiklos genannt werden können, gehabt hat. Die Behauptung wurde 1894 im Heft 3 : 1 der ersten Auflage der *Vorlesungen*²⁾ veröffentlicht, und zwei Jahre später bemerkte G. LORIA in der zweiten Auflage seiner Arbeit *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*³⁾: „La bella teoria delle coordinate curvilinee su una superficie che GAUSS fondò, applicando forse inconsciamente un geniale concetto di LEIBNIZ . . .“ und als Beleg verwies LORIA auf die am Anfang dieses Artikels zitierte Abhandlung von LEIBNIZ. Ebenso behauptet J. TROPFKE in seiner *Geschichte der Elementarmathematik*⁴⁾ kategorisch, daß man LEIBNIZ den Begriff der krummlinigen Koordinaten verdankt, und er druckt die von CANTOR zitierte Stelle wörtlich ab, ohne zu untersuchen, ob diese Stelle überhaupt von Koordinaten handelt. Ohne Zweifel wird die falsche Angabe CANTORS noch lange Zeit in mathematisch-historischen Arbeiten wiederholt werden und auch in mathematischen Lehrbüchern ihren Platz behaupten.

Ich benutze diese Gelegenheit, um ein paar Bemerkungen über die Anfänge der Geschichte der krummlinigen Koordinaten hinzuzufügen. Bekanntlich hat JAKOB BERNOULLI 1691 im Vorübergehen als Abscissenachse einen Kreis benutzt⁵⁾, und HÔPITAL hat 1696 ebenfalls im Vorüber-

1) Was LEIBNIZ „lineae ordinatim ductae“ oder „lineae ordinatim positione datae“ nannte, heißt bei EULER „curvae ejusdem generis“ (vgl. die Abhandlung EULERS *De infinitis curvis ejusdem generis*; Comment. acad. sc. Petrop. 7 [1734/5], 1740, S. 174) und, soviel ich weiß, ist auch nicht EULER auf den Gedanken gekommen, seine „curvae ejusdem generis“ als krummlinige Ordinaten zu benutzen. Dieser Gedanke scheint also den Mathematikern des 17. und des 18. Jahrhunderts ziemlich fern gelegen zu haben.

2) Vgl. oben S. 43, Fußnote 1.

3) G. LORIA, *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*, seconda edizione, Torino 1896, S. 183—184. Selbstverständlich findet sich die Bemerkung auch in der sogenannten „Terza edizione“ (Torino 1907), die den Druckbogen 12 der zweiten Auflage enthält.

4) J. TROPFKE, *Geschichte der Elementarmathematik* 2, Leipzig 1903, S. 428.

5) JAKOB BERNOULLI, *Specimen calculi differentialis in dimensione parabolae helicoidis, ubi de flexuris curvarum in genere, earundem evolutionibus, aliisque*; Acta eruditorum 1691, S. 13—23; *Opera* I, Genevae 1744, S. 431—442. BERNOULLI biegt

gehen als Abscissenachse eine Kurve angewandt, die so beschaffen ist, daß man ihre Tangente konstruieren kann.¹⁾ Aber weder BERNOULLI noch HÔPITAL hat daran gedacht, krummlinige Ordinaten einzuführen, und darum wäre es meines Erachtens nicht ganz richtig zu sagen, daß bei ihnen krummlinige Koordinaten vorkommen. Soviel ich weiß, findet sich auch im 18. Jahrhundert kein Beispiel einer Anwendung von zwei krummlinigen Koordinaten²⁾, so daß es am richtigsten sein dürfte, die Geschichte der krummlinigen Koordinaten mit GAUSS beginnen zu lassen.

die Achse einer Parabel in Gestalt eines Kreises zusammen und studiert die Eigenschaften der Kurve, die aus der Parabel entsteht.

1) *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris 1696, S. 16. Bei HÔPITAL kommen verschiedene Probleme vor, in denen eine Kurve auf eine andere bezogen wird, aber nur in einem einzigen Problem kann die letztere Kurve als Abscissenachse betrachtet werden. In diesem Problem handelt es sich darum, an die erstere Kurve eine Tangente zu ziehen.

2) Zwei Koordinaten, von welchen die eine krummlinig ist, werden beispielsweise von L. EULER benutzt; die krummlinige Koordinate ist die Länge des Bogens der gegebenen Kurve selbst (siehe z. B. *Investigatio curvarum quae evolutae sui similes producunt*; *Comment. acad. sc. Petrop.* 12 [1740], 1750, S. 8).

On the course in the history of mathematics in the Massachusetts Institute of Technology.

By H. W. TYLER in Boston.

The Massachusetts Institute of Technology has from its foundation, in comparison with other American institutions of similar type, laid considerable stress on the fundamentals of general education for its students, and has reserved in all departments a substantial portion of the students' time for work in history, economics, English and the modern languages. For many years a course on the history of inductive sciences was given to students who were candidates for the degree in the departments of physics and biology. A few years ago, in connection with a higher admission requirement in modern languages, it was found practicable to introduce into the third year a group of general subjects among which each regular student is required to choose one. Among these general subjects stands History of Science, with 15 lectures in the first term and 30 in the second. Neither the degree of maturity of the students, nor the time at their disposal, warrants us in making the course a severe one. On the other hand we deem it particularly important that technological students should by means of such a course gain a broader outlook and some appreciation of that evolution of which their present work represents the latest development. It would seem that a course of this kind should appeal to them somewhat more strongly than a course in general history, and our only regret is that we are not yet in a position to make the subject a requirement instead of merely an elective. In the conduct of the work Professor SEDGWICK, of our department of biology, who formerly gave the course on inductive science, presents the development of the natural and physical sciences, while the writer deals with the mathematical, including astronomy and mechanics, as well as mathematics. Covering so broad a field, we must naturally confine ourselves to selected matters of particular significance, avoiding whatever would be difficult on account of unfamiliarity of the

On the course in the history of mathem. in the Massachusetts Institute of Technology. 49

students with the subject matter. The difficulty of selection is naturally rather considerable, and the literature which we can recommend to the students is limited.

Outline of the mathematical part of the course for 1908.

First semester.

Introduction: Points of view.

Study of history of science necessary for perspective.

Repetition of race development by individuals.

Antiquity of mathematics in comparison with natural science.

Remoteness of present progress; difficulty and specialization.

Mathematics not merely a deductive science, but a necessary method of dealing with phenomena.

Applied mathematics: astronomy, mechanics etc.

Prehistoric mathematics and astronomy.

Primitive counting and ideas of number; the decimal and other systems.

Primitive astronomy and time-divisions; year, month, day; Sun, Moon, planets, stars, comets, ecliptic, eclipses.

Chaldean astronomy.

The AHMES manuscript, fractions, simple equations, progressions, geometry (areas of circles, trapezoids and isosceles triangles).

Greek mathematics.

Indebtedness of Greek science to Egypt.

The Ionian school (Miletus).

THALES.

Angles, triangles and circles, astronomical theories, eclipses.

ANAXIMANDER.

Spheres, infinity, globes, gnomon, meridian, solstices, latitude.

PYTHAGORAS and the Pythagorean School.

Migration to Sicily and Croton; scientific brotherhood; pentagram.

Geometry, theory of numbers, music, astronomy, the „quadrivium“.

Pythagorean astronomy; rotundity of Earth; central fire.

ARCHYTAS of Tarentum.

Athens and the Athenian philosophers.

Classical problems: duplication of cube, trisection of angle, squaring of circle.

HIPPIAS.

The quadratrix.

HIPPOCRATES of Chios.

Circular lunes; limits; method of exhaustions; Achilles and the tortoise.

Bibliotheca Mathematica. III. Folge. X.

PLATO and his school.

Tendencies abstract and philosophical; systematises methods of mathematical reasoning.

MENAECHMUS.

Conic sections.

EUDOXUS.

„Golden section“; pyramids, cones, spheres etc.; celestial spheres.

ARISTOTLE.

Sphericity of heavenly bodies.

First Alexandrian School.

EUCLID.

„Elements“, „Data“, „Phenomena“, „Optics“, Fallacies, Conic sections, Loci.

ARISTARCHUS of Samos.

Motions of Earth; celestial distances.

ARCHIMEDES.

Mathematician, inventor, engineer.

Quadrature of parabola, sphere and cylinder, spirals, conoids and spheroids, measurement of circle, sand-counter, center of gravity, floating bodies.

APOLLONIUS of Perga.

Conic sections.

ERATOSTHENES.

Size of Earth.

HIPPARCHUS.

Astronomical observations, eccentrics and epicycles, trigonometry, precession of equinoxes.

HERO.

Mensuration, weights and measures.

Second Alexandrian School.

PTOLEMY.

The „Almagest“; geocentric system; refraction.

PAPPUS.

Commentaries on EUCLID's „Elements“, on „Almagest“; mathematical collections; volumes of revolution.

Greek Arithmetic and Algebra. Numerals and computation, cattle problem.

DIOPHANTUS.

Second semester.

Attitude of the early Christian church towards science; shape of Earth, antipodes, motions of Earth.

Science in Mohammedan countries; Greek and Indian sources; Mongolian derivatives: Meraga, Samarcand.

Transmission of Science through the Saracens into western Europe.

ALFONSO of Castile, GERBERT, LEONARDO of Pisa.

Reaction of the Crusades.

Founding of schools and universities; trivium and quadrivium; abacus, accounts, calendar (Easter). ROGER BACON, SACROBOSCO, NICHOLAS DE CUSA, PEURBACH, REGIOMONTANUS.

The new astronomy.

NICHOLAS COPERNICUS. The heliocentric theory, *De revolutionibus*; astronomical clocks (BURGI).

TYCHO BRAHE. Systematic observations, new stars, comets, geocentric theory.

GALILEO GALILEI. Physical astronomy; mechanics, pendulum, falling bodies, laws of motion, telescope, surface of Moon, satellites of Jupiter, phases of Venus, Sun spots.

JOHANN KEPLER. Discovery of astronomical laws, relations with TYCHO BRAHE, study of Mars.

CHRISTIAN HUYGENS.

ISAAC NEWTON. Celestial mechanics, gravitation.

Renaissance Mathematics and Mechanics.

Influence on mathematical science of

- a) printing and a common language;
- b) developments in astronomy and physics;
- c) architecture and military engineering.

Arithmetic: computation and theory of numbers; almanacks; use of Arabic numerals; simplification of multiplication and division; decimal fractions; logarithms.

Algebra: gradual introduction of symbols; quadratic, cubic and bi-quadratic equations; theory of equations; negative and imaginary numbers.

Geometry: method of indivisibles; quadrature of circle.

Trigonometry: plane and spherical; solution of triangles; tables; trigonometric functions; surveying.

Mechanics: force; motion; equilibrium; center of gravity.

STIFEL, TARTAGLIA, CARDAN, RECORDE, FERRARI, VIETA, NAPIER, BRIGGS, KEPLER, etc.

Modern Mathematical Science based on

Analytic Geometry, involving the ideas of continuous variation and function.

The Calculus, involving besides these ideas, those of limit of a ratio (of which terms approach 0 at same time) and limit of a sum (in which number of terms increases without limit as each term approaches zero).

Higher mathematics

1. based mainly on the preceding, including differential equations, theory of functions, etc. etc.
2. collateral development in extension of theory of numbers, theory of equations, geometry, etc.
3. continued work on the logical foundations of mathematics.

Applications of analytic geometry, calculus and the higher mathematics in astronomy, mechanics, physics, engineering, etc.

DESARGUES, projective geometry.

DESCARTES, equation and locus.

FERMAT, theory of numbers; probabilities.

WALLIS, negative and fractional exponents; integration.

PASCAL, first computing machine.

HUYGENS, pendulum clock; watch.

BARROW, Lucasian professor.

WREN, Savilian professor.

NEWTON, calculus; binomial theorem; theory of gravitation; theory of light; sextant; Principia; warden of mint; optics; Lucasian professor.

LEIBNIZ, calculus; mechanics; philosophy; diplomacy; controversy with NEWTON.

BERNOULLIS, applications of the calculus.

DE MOIVRE, TAYLOR, MACLAURIN.

Tendencies of mathematical science since NEWTON; LAPLACE, LAGRANGE, EULER; ADAMS and LEVERRIER, discovery of Neptune, etc.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage¹⁾ von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“.

BM = Bibliotheca Mathematica.

1^s: 12, 15, 22, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 61. — **1^s: 33**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 307. — **1^s: 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 61–64. — **1^s: 163–165**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 64, 173–174. — **1^s: 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 64–65. — **1^s: 198, 201**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 237. — **1^s: 202**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 307–309. — **1^s: 208**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 65, 309. — **1^s: 206**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 237–238. — **1^s: 213, 225, 236, 245**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 65. — **1^s: 257**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 139. — **1^s: 270, 287, 297, 298**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 66.

1^s: 298. In einer früheren Bemerkung (BM **8_s**, 1907/8, S. 66) habe ich die Gründe angegeben, die dafür sprechen, daß ARCHIMEDES vielleicht in einer der verlorenen Schriften die Gerade als die kürzeste Entfernung zweier Punkte definiert hat. Denselben Gegenstand hat ZEUTHEN kürzlich in seinem Artikel *Über einige archimedische Postulate* (Arch. für die Gesch. d. Naturwiss. **1**, 1909, S. 320–327) behandelt und ist dabei zu dem Ergebnis gekommen, daß ARCHIMEDES die fragliche Erklärung der Geraden nicht als eine gute Definition betrachten konnte. Mit diesem Ergebnis kann ich im wesentlichen einverstanden sein, aber wenn Herr ZEUTHEN weiter behauptet, es sei also undenkbar, daß ARCHIMEDES den geometrischen Begriff der Länge einer Linie zur Definition der Geraden benutzt haben könnte, so scheint er zu übersehen, daß man unter Umständen genötigt wird, Definitionen zu benutzen, die nicht vollständig befriedigend sind, und eben hier dürfte ein solcher Fall vorliegen. ZEUTHEN gibt ja selbst zu, daß die EUKLIDISCHE Definition der Geraden nichtssagend ist, und eine nichtssagende Definition ist wohl viel schlechter als eine nicht ganz einwandfreie. ZEUTHEN sollte also nachweisen, daß ARCHIMEDES eine dritte Definition der Geraden gekannt hat, die weniger nichtssagend als die EUKLIDISCHE und besser als die ist, um die es sich hier handelt.

Aber auch wenn es sicher wäre, daß die Definition: „Die Gerade ist die kürzeste Entfernung zweier Punkte“ nicht in einer der verlorenen Schriften des ARCHIMEDES vorkommt, so ist doch der von mir in der früheren Bemerkung

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

zitierte Passus der CANTORSchen *Vorlesungen* zu beanstanden. CANTOR untersucht nämlich nicht, ob ARCHIMEDES diese Definition gutheißen konnte, sondern aus dem Umstande, daß sie nicht als Definition in den jetzt bekannten Schriften des ARCHIMEDES vorkommt, schließt er ohne weiteres, daß die Definition nicht ARCHIMEDISCH ist, und die Schlußweise ist in dem jetzt vorliegenden Falle unkritisch, weil man weiß, daß die Definition schon im Altertum als ARCHIMEDISCH bezeichnet worden ist.

G. ENESTRÖM.

1^s: 310, siehe BM S₃, 1907/8, S. 66. — 1^s: 335, 339—340. 344, 348, siehe BM S₃, 1907/8, S. 174—176. — 1^s: 351, siehe BM S₃, 1907/8, S. 66. — 1^s: 365, 368, siehe BM S₃, 1907/8, S. 177. — 1^s: 372, siehe BM S₃, 1907/8, S. 411—412; 9₃, 1908/9, S. 238. — 1^s: 374, 376, siehe BM S₃, 1907/8, S. 412—413. — 1^s: 380, siehe BM S₃, 1907/8, S. 66—67. — 1^s: 388, siehe BM S₃, 1907/8, S. 177. — 1^s: 401—402, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 239. — 1^s: 406, 409, siehe BM S₃, 1907/8, S. 177—178. — 1^s: 409, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 239. — 1^s: 410, siehe BM S₃, 1907/8, S. 178. — 1^s: 429, siehe BM S₃, 1907/8, S. 67. — 1^s: 431, siehe BM S₃, 1907/8, S. 67; 9₃, 1908/9, S. 139—140. — 1^s: 432, siehe BM S₃, 1907/8, S. 67, 178—179. — 1^s: 433, siehe BM S₃, 1907/8, S. 179. — 1^s: 447, 448, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 239—240. — 1^s: 452, siehe BM S₃, 1907/8, S. 179. — 1^s: 459, siehe BM S₃, 1907/8, S. 309—310. — 1^s: 464, siehe BM S₃, 1907/8, S. 179. — 1^s: 470, siehe BM S₃, 1907/8, S. 311. — 1^s: 471, siehe BM S₃, 1907/8, S. 413. — 1^s: 476, siehe BM 9₃, 1908, S. 71—72. — 1^s: 488, siehe BM S₃, 1907/8, S. 67. — 1^s: 498, siehe BM S₃, 1907/8, S. 180. — 1^s: 500, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 321—322. — 1^s: 500, 502, siehe BM S₃, 1907/8, S. 67. — 1^s: 503—504, siehe BM S₃, 1907/8, S. 180—181; 9₃, 1908/9, S. 240—241. — 1^s: 509, 510, siehe BM S₃, 1907/8, S. 67. — 1^s: 512, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 140—141. — 1^s: 513, 515, 528, 545, siehe BM S₃, 1907/8, S. 68—69. — 1^s: 551, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 141—142.

1^s: 556. Herr CANTOR spricht hier (Z. 2—5 v. u.) von „einem massivem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck, längs dessen Hypotenuse man bei horizontaler Lage der einen Kathete den Gipfel eines Baumes einvisiert“, ohne auch nur anzudeuten, daß seine Vorlage nicht ein einziges Wort hierfür enthält. Die wörtliche Übersetzung der fraglichen Stelle hat Herr CANTOR in seinem Buche *Die römischen Agrimensoren* (Leipzig 1875, S. 120) gegeben und dabei bemerkt: „Wir können diesen Worten einen Sinn nur dann beilegen, wenn wir uns den Feldmesser mit einem gleichseitigen rechtwinkligen Dreiecke oder irgend einem diesem entsprechenden Apparate bewaffnet denken“ und mit dieser Bemerkung kann ich mich einverstanden erklären, wenn „ein diesem entsprechender Apparat“ auch eine einfache Stange bedeuten kann. Bekanntlich wurden im Mittelalter zuweilen Höhenmessungen nur mit Hilfe einer Stange ausgeführt und zwar so, daß sich der Beobachter, ganz wie in dem hier besprochenen Falle, platt auf die Erde legte (siehe z. B. GERBERTI *Opera mathematica* ed. N. BUBNOV, Berlin 1899, S. 324, Z. 2; *Practica geometriae*, herausg. von M. CURTZE, Monatsh. für Mathem. 8, 1897, S. 207, Z. 34—46; LEONARDO PISANO, *Practica geometriae*, ed. B. BONCOMPAGNI, Roma 1862, S. 203) und ich sehe nicht ein, warum nicht der römische Feldmesser ebensogut dies Verfahren hätte meinen können (vgl. N. BUBNOV, a. a. O. S. 551). Aber auch wenn die CANTORSche Erklärung als richtig betrachtet wird, sollte angegeben werden, daß der römische Feldmesser selbst gar nicht von einem massiven gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck spricht.

G. ENESTRÖM.

1^s: 563—564, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 69. — **1^s: 567**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 241. — **1^s: 576**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 69—70, 181; **Q₃**, 1908/9, S. 142. — **1^s: 580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 70. — **1^s: 706**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 70, 181. — **1^s: 710**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 241. — **1^s: 713**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 70. — **1^s: 715**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 241. — **1^s: 715—716**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 70—71, 181. — **1^s: 717**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 71, 182—183. — **1^s: 718**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 71; **Q₃**, 1908/9, S. 242. — **1^s: 719**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 183—184. — **1^s: 720**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 71. — **1^s: 730**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 71, 184—185. — **1^s: 734**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 71. — **1^s: 736**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 242. — **1^s: 736—737**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 71—72, 185. — **1^s: 738**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 72. — **1^s: 742**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 242. — **1^s: 743, 748, 750**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 72. — **1^s: 763**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 242. — **1^s: 764**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 185. — **1^s: 766**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 143. — **1^s: 770**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 185. — **1^s: 771**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 143. — **1^s: 779**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 243. — **1^s: 780, 781**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 72. — **1^s: 792**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 143—144. — **1^s: 794**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 72. — **1^s: 795**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 243. — **1^s: 798**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 144. — **1^s: 800**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 73; **Q₃**, 1908/9, S. 144—145. — **1^s: 801**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 185—186; **Q₃**, 1908/9, S. 145. — **1^s: 802**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 73, 186—187, 414—415. — **1^s: 805—806**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 73. — **1^s: 809—810**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 243. — **1^s: 815**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 73. — **1^s: 838**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 415. — **1^s: 842**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 243.

1^s: 854. Hier wäre es angebracht, Z. 30—31 die Worte: „was er allenfalls noch finden werde“ zu streichen. Nach BUBNOV (GERBERTI *Opera mathematica*, Berlin 1899, S. 101) hat die Handschrift, welche OLLERIS benutzte, die von einer anderen Hand geschriebene Glosse „s. reperimus“ [= scilicet reperimus], und die Worte der Ausgabe von OLLERIS „si reperimus“ sollten also in Fortfall kommen. — Z. 33 lies „S. 577“ statt „S. 576“. — In der Fußnote 1) ist „et quos post reperimus“ statt „et quae post reperimus“ zu lesen und überdies (siehe oben) sind die zwei letzten Worte „si reperimus“ zu streichen.

G. ENESTRÖM.

1^s: 855, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 73. — **1^s: 857**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 73; **Q₃**, 1908/9, S. 243—244. — **1^s: 859, 862, 863**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 73—74. — **1^s: 867**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 74, 187. — **1^s: 869, 875—876, 877, 878**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 74—76. — **1^s: 881**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 415—416. — **1^s: 882, 889, 893**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 77—78. — **1^s: 900**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 78, 187—188. — **1^s: 901**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 145—146. — **1^s: 902**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 78—79. — **1^s: 906**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 79, 188—189; **Q₃**, 1908/9, S. 244. — **1^s: 908**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 79; **Q₃**, 1908/9, S. 146—147. — **1^s: 909**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 79. — **1^s: 910**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 79, 416. — **1^s: 911**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 79—80.

2: 5, siehe BM **7₃**, 1906/7, S. 286; **S₃**, 1907/8, S. 80. — **2: 7**, siehe BM **2₃**, 1901, S. 351. — **2: 8**, siehe BM **1₃**, 1900, S. 501; **6₃**, 1905, S. 309. — **2: 9**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 147. — **2: 10**, siehe BM **1₃**, 1900, S. 502; **Q₃**, 1908/9, S. 147—148. — **2: 11**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 189. — **2: 14—15**, siehe BM **2₃**, 1901, S. 144; **5₃**, 1904, S. 200; **6₃**, 1905, S. 208—209. — **2: 17**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 189. — **2: 20**, siehe BM **1₃**, 1900, S. 502; **3₃**, 1902, S. 239. — **2: 25**, siehe BM **1₃**, 1900, S. 274; **Q₃**, 1908/9, S. 148. — **2: 26**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 244—245. — **2: 30**, siehe BM **6₃**, 1905, S. 105. — **2: 31**, siehe BM **2₃**, 1901, S. 351—352; **3₃**, 1902, S. 239—240; **6₃**, 1905, S. 309—310. — **2: 32**, siehe BM **6₃**, 1905, S. 105. — **2: 34**, siehe BM **2₃**, 1901, S. 144; **6₃**, 1905, S. 310; **S₃**, 1907/8, S. 190. — **2: 37**, siehe BM **1₃**, 1900, S. 502; **6₃**, 1905, S. 105. — **2: 38**, siehe BM **2₃**, 1901, S. 352; **Q₃**, 1908/9, S. 147.

S. 148. — 2:39, siehe BM 1₁, 1900, S. 502; 6₁, 1905, S. 209; 9₁, 1908/9, S. 245. — 2:41, siehe BM 2₁, 1901, S. 352; 8₁, 1907/8, S. 80—81; 9₁, 1908/9, S. 72—73. — 2:45, siehe BM 9₁, 1908/9, S. 148—150. — 2:46, siehe BM 8₁, 1907/8, S. 81. — 2:51, siehe BM 6₁, 1905, S. 106; 9₁, 1908/9, S. 150. — 2:52, siehe BM 8₁, 1907/8, S. 190—191. — 2:53, siehe BM 5₁, 1904, S. 201. — 2:57, siehe BM 2₁, 1901, S. 352. — 2:59, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 207—208. — 2:59—60, siehe BM 1₁, 1900, S. 502; 6₁, 1905, S. 310—311. — 2:61, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 85—86, 208—209, 286—287; 9₁, 1908/9, S. 150. — 2:63, siehe BM 4₁, 1903, S. 206. — 2:65, siehe BM 9₁, 1908/9, S. 151. — 2:67, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 209—210. — 2:70, siehe BM 1₁, 1900, S. 417. — 2:73, siehe BM 1₁, 1900, S. 502. — 2:77, siehe BM 9₁, 1908/9, S. 152. — 2:82, siehe BM 1₁, 1900, S. 502. — 2:87, siehe BM 1₁, 1900, S. 502; 9₁, 1908/9, S. 323. — 2:88, siehe BM 1₁, 1900, S. 503; 6₁, 1905, S. 395. — 2:89, siehe BM 1₁, 1900, S. 503; 9₁, 1908/9, S. 245—246. — 2:90, siehe BM 1₁, 1900, S. 503. — 2:91—92, siehe BM 1₁, 1900, S. 503; 5₁, 1904, S. 409—410; 6₁, 1905, S. 395—396; 8₁, 1907/8, S. 191; 9₁, 1908/9, S. 152. — 2:97, siehe BM 3₁, 1902, S. 406. — 2:98—99, siehe BM 1₁, 1900, S. 269—270; 6₁, 1905, S. 106—107; 7₁, 1906/7, S. 210. — 2:100, siehe BM 3₁, 1902, S. 140; 8₁, 1907/8, S. 81; 9₁, 1908, S. 73—74. — 2:101, siehe BM 3₁, 1902, S. 325; 6₁, 1905, S. 396; 9₁, 1908/9, S. 152—153. — 2:104—105, siehe BM 1₁, 1900, S. 503; 4₁, 1903, S. 397—398; 9₁, 1908/9, S. 153. — 2:106, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 380. — 2:111, siehe BM 2₁, 1901, S. 352.

2:112. Ich möchte empfehlen, Z. 20 die Worte: „der griechischen Sprache etwas mächtige“ zu streichen, denn die Angabe über die Bedeutung des Wortes „Geometria“ konnte der englische Übersetzer der „Ars metrica“ sehr wohl aus den ersten Zeilen der „Geometria GERBERTI“ entnommen haben, und man hat keinen Grund, anzunehmen, daß er von der griechischen Sprache mehr als diese zwei Wörter verstand. Ich kenne Personen, die von der schwedischen Sprache sogar fünf Wörter, nämlich: „tändstickor“, „utan“, „svafvel“, „och“, „fosfor“ verstehen, aber ich glaube nicht, daß sie deswegen behaupten können, sie seien der schwedischen Sprache etwas mächtig.

G. ENESTRÖM.

2:112—113. Der ganze Absatz: „Eine Abhandlung . . . wieder umbre“ ist nach der ersten Auflage abgedruckt, nur mit dem Zusatz (Z. 17—19): „und stellt eine Übersetzung einer unter dem Titel Ars metrica gehenden Bearbeitung des zweiten Teiles der Schrift des ROBERTUS ANGLICUS über den Quadranten dar“; zu diesem Zusatze gehört die neue Fußnote 3): „CURTZE brieflich“. Aber da es sich herausgestellt hatte, daß der englische Traktat nur eine Übersetzung ist (vgl. M. CURTZE, Biblioth. Mathem. 1896, S. 72, Anm. 12), sollte wohl: a) die Bemerkung Z. 10—14 („Eine Abhandlung von hohem Interesse . . . uns gleich unbekannt ist“) modifiziert werden; b) der Bericht über den Inhalt entweder gestrichen oder nach der Seite 96 versetzt werden, wo es sich um den Quadranten des ROBERTUS ANGLICUS handelt. Denn wie nahe sich der englische Traktat an den „Tractatus quadrantis ROBERTI ANGLICI“ anschließt, geht aus folgender Zusammenstellung hervor:

Robertus Anglicus.

Si uis ergo scire altitudinem alicuius magne rei accessibilis, respice altitudinem rei per ambo foramina uno oculo, et accede ad rem vel recede a re in

Tretis of Geometri.

When you wille wite þe heghte of any thyng þat you may negh. biholde þan þe heght of þat thyng by bothe holes of þe quadrant and come toward

tantum donec perpendicularum cadat super lineam mediam quadrantis id est super 45 grad. Deinde accipe altitudinem oculi tui usque ad plantam pedum, et tantum accipias retro te quantum est altitudo oculi tui ad terram et nota locum. Deinde mensura quot sunt pedes inter notam et fundamentum turris vel alterius rei mensurande, et habebis altitudinem eius.

and go froward til þe perpendicle þat es to say þe threde whereon þe plumbe henges falle upon þe mydel lyne of þe quadrant. þat es to say þe 45 degre. þan take als mykel lande behynde ye as fro þethen to þe erthe and marke wele þat place. þan mete howe many fete are bytwene þi mark and þe fondement of þat thyng whos heght you sekest. and sekirly so many fete heght it es.

Aber auch wenn man damit einverstanden ist, daß das Referat an dem Bericht über die Übersetzung und nicht an dem Bericht über das Original (wo Herr CANTOR kein einziges Wort über die Anwendung des Quadranten sagt) untergebracht wird, so müssen dennoch die Figuren geändert werden. Es ist nämlich unrichtig, daß sich der Text auf zwei verschiedene Instrumente bezieht; vielmehr handelt es sich um ein einziges Instrument, ganz wie bei LEONARDO PISANO und bei ROBERTUS ANGLICUS, und in diesem Instrument ist das Quadrat das wichtigste, während der Quadrant eigentlich weggelassen werden könnte.

Die Erklärung (S. 113, Z. 6—7): „Die betreffenden Einteilungen der das Quadrat bildenden Stäbe heißen wieder umbre“ ist nicht gut redigiert. In Wirklichkeit waren nicht, wie Herr CANTOR einige Zeilen vorher angibt, die vier Stäbe, sondern nur zwei derselben in 12 Teile eingeteilt, und der eine Stab war, um mit dem Übersetzer zu sprechen, „þe side of þe umbre toward“, der andere Stab „þe side of þe umbre froward“. Die Einrichtung war also ganz dieselbe wie auf dem Instrumente LEONARDO PISANOS, das Herr CANTOR S. 38 beschrieben hat.

G. ENESTRÖM.

2:114. Hier hat Herr CANTOR (Z. 34—36) in die 2. Auflage der *Vorlesungen* ein paar kurze Notizen über RAIMUNDUS LULLUS als Mathematiker eingeschaltet, aber ohne Beleg. Vermutlich ist eine Fußnote „CURTZE brieflich“ weggefallen und weitere Auskunft gibt CURTZE in seinem Aufsatz *Eine Studienreise* (Centralbl. für Bibliothekswesen **16**, 1899, S. 268). Der Traktat über die Quadratur des Kreises findet sich handschriftlich im Cod. lat. Monac. 10543 und die Geometrie, die vom Jahre 1299 datiert ist, im Cod. lat. Monac. 10544.

G. ENESTRÖM.

2:114, siehe BM **9**, 1908/9, S. 153. — **2:116,** siehe BM **3**, 1902, S. 406; **9**, 1908/9, S. 153—154. — **2:117—118,** siehe BM **6**, 1905, S. 107, 311. — **2:122,** siehe BM **1**, 1900, S. 503—504; **6**, 1905, S. 397. — **2:126,** siehe BM **3**, 1902, S. 406; **6**, 1905, S. 210. — **2:127,** siehe BM **3**, 1902, S. 406. — **2:128,** siehe BM **1**, 1900, S. 504; **8**, 1907/8, S. 191—192. — **2:129,** siehe BM **7**, 1906/7, S. 287. — **2:132,** siehe BM **1**, 1900, S. 515—516. — **2:143,** siehe BM **1**, 1900, S. 504. — **2:144,** siehe BM **7**, 1906/7, S. 381. — **2:145,** siehe BM **7**, 1906/7, S. 287. — **2:148,** siehe BM **7**, 1906/7, S. 381—382. — **2:150—151,** siehe BM **7**, 1906/7, S. 288. — **2:155,** siehe BM **9**, 1908/9, S. 323—325. — **2:155—156,** siehe BM **5**, 1904, S. 410—411; **7**, 1906/7, S. 86—87. — **2:157, 158,** siehe BM **2**, 1901, S. 352. — **2:160—162,** siehe BM **6**, 1905, S. 311—312; **7**, 1906/7, S. 87—88; **9**, 1908/9, S. 154. — **2:163,** siehe BM **1**, 1900, S. 504; **6**, 1905, S. 312. — **2:164,** siehe

BM 6_s, 1905, S. 313. — 2:165, siehe BM 7_s, 1906/7, S. 382; 9_s, 1908/9, S. 246 — 247. — 2:166, siehe BM 1_s, 1900, S. 504.

2:171. Der Passus: „Wenn z. B. Höhenmessungen mit der festen Stange vorgenommen werden, so ist das doch ein entschiedener Rückschritt“ sollte gestrichen oder modifiziert werden, weil er eine unbegründete Folgerung enthält. Aus dem Umstande, daß es einen von HALLIWELL veröffentlichten kurzen Traktat in englischer Sprache gibt, in dem Höhenmessung mit einer Stange gelehrt wird (welcher Traktat aus dem 15. Jahrhundert herzurühren scheint), kann man gar nichts über den Stand der Mathematik in England im 15. Jahrhundert schließen, bevor man weiß, für welchen Zweck dieser Traktat verfaßt wurde. HALLIWELL behauptet, daß der Traktat offenbar für solche geschrieben ist, die nicht Mathematik verstanden („the more ignorant classes“) und in diesem Falle kann der Traktat natürlich nicht als Beleg für einen Rückschritt der englischen Mathematik benutzt werden. Selbstverständlich kann man die Behauptung HALLIWELLS als unbelegt bezeichnen, aber der Umstand, daß der Traktat nicht lateinisch sondern englisch geschrieben ist, kann doch als eine Stütze für die Behauptung angeführt werden. Dagegen ist die CANTORSche Folgerung, wie gesagt, durchaus unbegründet.

In der Fußnote 2) steht unrichtig „pag. 29—31“ statt „pag. 27—28“.

Z. 15 beginnt ein Bericht über den von HALLIWELL herausgegebenen Traktat „JOHANNES NORFOLK in artem progressionis summula“ und Herr CANTOR gibt ohne weiteres an, daß es sich um Vorlesungen handelt, welche 1445 gehalten wurden. Allerdings steht bei HALLIWELL (S. 103): „et sic perfectus est iste tractatus brevissimus in collegio animarum Oxoniae anno domini millesimo quadringentesimo quadragesimo quinto“ aber unmittelbar nachher folgt: „quod NORFOLK scriptor ac compiler hujus tractatus“ und das Wort „quod“ scheint mir darauf hinzudeuten, daß HALLIWELL den Passus nicht richtig deuten konnte. Nimmt man noch hinzu: a) daß der bekannte Mathematiker JOHANNES BACONTHORP, der um 1346 starb, aus Norfolkshire stammte und Lehrer in Oxford war; b) daß, so viel ich weiß, der von HALLIWELL veröffentlichte Traktat der einzige ist, in dem ein Mathematiker JOHANNES NORFOLK erwähnt wird; c) daß sowohl am Anfang als am Ende des Traktates steht „secundum magistrum JOHANNEM NOREFOLK“ oder „secundum NOREFOLK“, so scheint aus diesen Umständen hervorzugehen, daß sich die Datierung 1445 sehr wohl auf die von HALLIWELL benutzte Handschrift beziehen kann und nicht auf die Abfassung des Traktates, der möglicherweise von JOHANNES BACONTHORP herrührt. Jedenfalls wäre es angebracht, die Worte „welche 1445 gehalten wurden“ zu modifizieren, da diese Angabe bis auf weiteres als unsicher betrachtet werden muß.

G. ENESTRÖM.

2:175, siehe BM 3_s, 1902, S. 140. — 2:178—179, siehe BM 8_s, 1907/8, S. 192—193.

2:179. Z. 19 ist 1437 vermutlich Druckfehler statt 1439; nach der von Herrn CANTOR zitierten Ausgabe des *Algorismus prosaycus* war KRISTIAN VON PRACHATIC 1368 geboren und starb 1439.

G. ENESTRÖM.

2:206, siehe BM **6**, 1905, S. 313. — **2:208**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 247. — **2:210**, siehe BM **2**, 1901, S. 352—353. — **2:218**, siehe BM **4**, 1903, S. 284. — **2:219**, siehe BM **2**, 1901, S. 353. — **2:222**, siehe BM **6**, 1905, S. 397—398. — **2:224—226**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 155. — **2:228**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 193. — **2:229**, siehe BM **1**, 1900, S. 504—505; **8**, 1907/8, S. 194. — **2:230**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 195—196; **9**, 1908/9, S. 155—157. — **2:232, 234, 237, 238**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 196—198.

2:238. Mit der Bemerkung (Z. 4—6): „Zwei Quellen waren ja auch hier . . . vorhanden, aus welchen die Kenntnis der Gleichungen und ihrer Auflösung nach Deutschland abfließen konnte“ bin ich nicht ganz einverstanden. Wie aus dem Folgenden hervorgeht, sind die zwei von Herrn CANTOR gemeinten Quellen die Schrift des JORDANUS *De numeris datis* und „der italienische Kaufmann“. Aber S. 240 gibt Herr CANTOR selbst noch zwei andere Quellen als möglich an, nämlich teils das arabische Original, teils die lateinische Übersetzung der Algebra ALKHWARISMIS. Daß das arabische Original der Algebra in Betracht kommen kann, halte ich mit Herrn CANTOR für höchst unwahrscheinlich; um so wahrscheinlicher ist dagegen meines Erachtens, daß die lateinische Übersetzung der Algebra um die Mitte des 15. Jahrhunderts in Deutschland bekannt war; wir wissen ja, daß JOHANN WIDMANN im Besitze einer Handschrift dieser Übersetzung war (siehe E. WAPPLER, *Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert*, Zwickau 1887, S. 1, 9). Der lange Absatz der Seite 238 sollte also auf andere Weise redigiert werden, und dabei wäre es angebracht, den folgenden Passus (Z. 28—32) vollständig zu streichen: „Daß durch ihn [d. h. den italienischen Kaufmann] Teile davon nach Deutschland, nach Frankreich, nach England, überallhin wo italienische Handelsniederlassungen waren, oder von wo man regelmäßig um des Handels willen nach Italien zog, gelangen konnten, das steht nicht minder außer allem Zweifel.“ Dieser Passus enthält nämlich nur eine durchaus unbelegte und meiner Ansicht nach sehr unwahrscheinliche Mutmaßung des Herrn CANTOR.

G. ENESTRÖM.

2:240. Der ganze Absatz (Z. 27—35): „Eine Wiener Handschrift . . . in Übung war“ sollte entweder gestrichen oder modifiziert werden. Der Absatz ist unverändert aus der ersten Auflage abgedruckt, aber in die zweite Auflage hat Herr CANTOR Z. 11—26 einen Bericht über den Traktat „Regule delacose secundum 6 capitula“ eingefügt, wodurch die Angabe Z. 31—32: „und so dürfte die WIDMANNsche Stelle von der Regel Algebre oder Cosse die älteste sein“ in Fortfall kommen muß. Die ganze Handschrift Cod. lat. Monac. 14 908, wo der soeben erwähnte Traktat vorkommt, ist nämlich nach CURTZE (siehe Arch. der Mathem. **13**, 1895, S. 396) in den Jahren 1456 bis 1464 geschrieben, und WIDMANN wurde erst 1480 Student. Man hat also nicht den geringsten Grund anzunehmen, daß die WIDMANNsche Stelle die älteste sei, „welche als Zeugnis dafür betrachtet werden kann, daß der Verfasser wußte, daß in Italien, wohin allein das Wort Cosse verweisen kann, die Kunst der Algebra in Übung war“.

G. ENESTRÖM.

2:240, siehe BM **8**, 1907/8, S. 198—199. — **2:242**, siehe BM **1**, 1900, S. 505; **8**, 1907/8, S. 199—200. — **2:243**, siehe BM **1**, 1900, S. 505; **6**, 1905, S. 398; **7**, 1906/7, S. 382; **8**, 1907/8, S. 200. — **2:245**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 383. — **2:246**, siehe BM **7**.

1906/7, S. 283; **8**₃, 1907/8, S. 200. — **2:247**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 383—384; **9**₃, 1908/9, S. 247. — **2:249**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 200—201. — **2:250**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 82. — **2:253**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 353. — **2:272**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 247. — **2:273**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 505. — **2:274**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 325. — **2:281**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 411. — **2:282, 288**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 506; **2**₃, 1901, S. 353—354. — **2:284**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 506; **9**₃, 1908/9, S. 157—158. — **2:286, 287, 289, 290, 291**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 506—507. — **2:296**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 354. — **2:304**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 201. — **2:305**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 88. — **2:306, 308**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 248. — **2:313**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 507. — **2:314**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 288—289. — **2:317**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 69; **7**₃, 1906/7, S. 384. — **2:318**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 158. — **2:319**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 201—202. — **2:320**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 88—89; **9**₃, 1908/9, S. 248. — **2:322**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 399; **8**₃, 1907/8, S. 202—203. — **2:325**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 313—314. — **2:327**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 248—249. — **2:328**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 140; **4**₃, 1903, S. 285. — **2:334**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 507. — **2:339**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 82. — **2:351**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 399. — **2:353**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 507; **4**₃, 1903, S. 87. — **2:355, 357**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 399—400. — **2:358**, siehe BM **4**₃, 1903, S. 87; **8**₃, 1907/8, S. 203. — **2:360**, siehe BM **4**₃, 1903, S. 87. — **2:371**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 314. — **2:375**, siehe BM **9**₃, 1908, S. 75. — **2:379**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 400; **7**₃, 1906/7, S. 384. — **2:380**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 400—401. — **2:381**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 507.

2:382. Z. 5 steht ganz wie in der ersten Auflage unrichtig „2 Rechten“ statt „4 Rechten“; bekanntlich kann die Winkelsumme nur für Sternecke mit ungerader Seitenzahl 2 Rechte betragen und man weiß, daß die Winkel des regelmäßigen eigentlichen Sternachtecks 45° sind. Übrigens wäre es viel besser gewesen, statt der Ausführungen (Z. 5—11): „Daß das letztere ... bemerklich macht“ ganz einfach zu setzen: „Ob BOUVELLES für das eigentliche Sternachteck als Winkelsumme 4 Rechte angibt, erwähnt unsere Quelle nicht“; GÜNTHER zitiert nämlich nach seiner eigenen Aussage nur die „hauptsächlichen Sätze“ über das Sternachteck, und auf Grund dieser Aussage kann man gar nicht entscheiden, ob bei BOUVELLES der Satz über die Winkelsumme vorkommt oder nicht.

In Wirklichkeit hat BOUVELLES den fraglichen Satz ausdrücklich angegeben. Der Satz findet sich S. 59 und lautet: „Ast majoris octogoni secundò egredientis omnes anguli sunt tantum quatuor rectis aequales“: das Wort „tantum“ bezieht sich auf den unmittelbar vorhergehenden Satz über die Winkelsumme des uneigentlichen Sternachtecks, die bekanntlich 8 Rechte beträgt. G. ENESTRÖM.

2:385, siehe BM **3**₃, 1902, S. 81; **4**₃, 1903, S. 207; **7**₃, 1906/7, S. 289. — **2:386**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 507; **5**₃, 1904, S. 306. — **2:388**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 289. — **2:392**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 82. — **2:395**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 507—508. — **2:396**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 82. — **2:397**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 211. — **2:398**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 204; **9**₃, 1908/9, S. 158—160. — **2:399**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 107—108; **8**₃, 1907/8, S. 204—205. — **2:401, 405**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 507. — **2:410**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 290. — **2:411, 412**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 89. — **2:413**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 205. — **2:419**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 205—206; **9**₃, 1908/9, S. 249—250. — **2:420**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 83, 206. — **2:421, 422**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 206. — **2:425**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 507. — **2:426**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 207.

2:426. In einer früheren Bemerkung (BM **7**₃, 1906/7, S. 387) habe ich darauf hingewiesen, daß CARDANO nicht nur Größen durch Buchstaben bezeichnete, sondern auch durch Buchstaben Rechenoperationen ausführte.

Etwas Ähnliches kommt schon bei RUDOLFF vor, wie aus dem folgenden Zitat hervorgeht (*Behend vnnd hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre*, Straßburg 1525, Bl. Gij^a):

Nim $\frac{1}{2}$ solchs collects / setz es auff ein ort / dz werd von lere wegen c genennt. Darnach subtrahier das c vom a / das übrig werd gesprochen d . Nun sag ich dz $\sqrt{c} + \sqrt{d}$ ist quadrata radix des ersten binomij.

Hier bedient sich RUDOLFF also der Buchstaben c und d , als wenn sie gewöhnliche Zahlen wären.

G. ENESTRÖM.

2: 427, siehe BM **6**₃, 1906, S. 314–315; **8**₃, 1907/8, S. 207. — **2: 428**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 208; **9**₃, 1908/9, S. 160. — **2: 429**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 201–202; **8**₃, 1907/8, S. 208–209. — **2: 430**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 145. — **2: 434**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 160–161. — **2: 437–438**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 209–210. — **2: 440**, siehe BM **4**₃, 1903, S. 285. — **2: 441**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 161. — **2: 442**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 325. — **2: 444**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 210. — **2: 446**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 250. — **2: 449**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 140. — **2: 452**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 210. — **2: 454**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 242. — **2: 457**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 250–251. — **2: 471**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 161. — **2: 474**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 140–141; **9**₃, 1908/9, S. 161, 251. — **2: 476**, siehe BM **9**₃, 1908, S. 75. — **2: 479–480**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 141; **7**₃, 1906/7, S. 290–291, 385; **9**₃, 1908, S. 75, 251. — **2: 481**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 508; **8**₃, 1907/8, S. 83. — **2: 482**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 508; **2**₃, 1901, S. 354; **3**₃, 1902, S. 240; **6**₃, 1905, S. 401. — **2: 483**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 291. — **2: 484**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 141. — **2: 486, 489**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 509. — **2: 490**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 509; **7**₃, 1906/7, S. 385–386. — **2: 497**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 509; **4**₃, 1903, S. 87; **7**₃, 1906/7, S. 291, 386. — **2: 503, 505**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 292. — **2: 506, 507**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 162–163. — **2: 509**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 270, 509. — **2: 510**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 509. — **2: 512**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 141. — **2: 514, 516, 517**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 509. — **2: 524**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 90. — **2: 527**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 387. — **2: 529**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 91. — **2: 530**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 354–355; **3**₃, 1902, S. 141. — **2: 531**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 212. — **2: 532**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 509; **7**₃, 1906/7, S. 292; **8**₃, 1907/8, S. 84; **9**₃, 1908/9, S. 163–164. — **2: 535**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 509. — **2: 536**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 212–213. — **2: 537**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 387. — **2: 539**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 293; **9**₃, 1908/9, S. 252. — **2: 541**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 509. — **2: 547**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 84. — **2: 548**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 510; **9**₃, 1908, S. 76. — **2: 549**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 510; **6**₃, 1905, S. 401. — **2: 550**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 355; **9**₃, 1908, S. 76. — **2: 554**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 510. — **2: 555**, siehe BM **4**₃, 1903, S. 285; **6**₃, 1905, S. 322. — **2: 558**, siehe BM **9**₃, 1908, S. 76. — **2: 561**, siehe BM **7**₃, 1906, S. 91. — **2: 565**, siehe BM **4**₃, 1903, S. 285. — **2: 566**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 85. — **2: 567, 568**, siehe BM **4**₃, 1903, S. 286. — **2: 569**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 510. — **2: 572–573**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 510; **3**₃, 1902, S. 141. — **2: 576**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 355–356. — **2: 579**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 145. — **2: 580–581**, siehe BM **4**₃, 1903, S. 207; **8**₃, 1907/8, S. 85–86; **9**₃, 1908/9, S. 326–327. — **2: 582**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 510. — **2: 583**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 270; **2**₃, 1901, S. 356. — **2: 585**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 69–70. — **2: 592**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 146. — **2: 593**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 387. — **2: 594**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 270. — **2: 597**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 270; **2**₃, 1901, S. 146. — **2: 599–600**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 146. — **2: 602**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 270. — **2: 603–604**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 270–271; **6**₃, 1905, S. 108; **8**₃, 1907/8, S. 211. — **2: 605**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 86. — **2: 610**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 388. — **2: 611**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 356–357. — **2: 612**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 277; **2**₃, 1901, S. 146; **8**₃, 1907/8, S. 212. — **2: 612–613**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 91–92. — **2: 613**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 357; **5**₃, 1904, S. 306; **7**₃, 1906/7, S. 294, 388–389. — **2: 614**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 141. — **2: 617, 619**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 108–109. — **2: 620**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 141. — **2: 621**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 277; **2**₃, 1901, S. 146; **6**₃, 1905, S. 402; **7**₃, 1906/7, S. 214, 389; **8**₃, 1907/8, S. 86–87; **9**₃, 1908, S. 77. —

2:622, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 87. — 2:623, siehe BM 1₃, 1900, S. 277; 2₃, 1901, S. 146—147. — 2:624, 625, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 87—88. — 2:626, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 389—390. — 2:632, siehe BM 6₃, 1905, S. 109. — 2:634, 637, siehe BM 6₃, 1905, S. 315—316. — 2:638, siehe BM 2₃, 1901, S. 147. — 2:639, siehe BM 9₃, 1908, S. 77. — 2:641, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 253. — 2:642, siehe BM 1₃, 1900, S. 271. — 2:643, siehe BM 1₃, 1900, S. 271; 7₃, 1906/7, S. 391. — 2:644, siehe BM 6₃, 1905, S. 402—403. — 2:655, siehe BM 2₃, 1901, S. 357. — 2:656, siehe BM 4₃, 1903, S. 286. — 2:659, 660, siehe BM 2₃, 1901, S. 147—148. — 2:661, siehe BM 6₃, 1905, S. 403. — 2:665, siehe BM 1₃, 1900, S. 271. — 2:666, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 88—89; 9₃, 1908/9, S. 164—165. — 2:667, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 89. — 2:669, siehe BM 5₃, 1904, S. 203. — 2:670, siehe BM 6₃, 1905, S. 403; 7₃, 1906/7, S. 391. — 2:674, siehe BM 4₃, 1903, S. 88. — 2:683, siehe BM 2₃, 1901, S. 148; 9₃, 1908/9, S. 328. — 2:687, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 294. — 2:689, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 391; 8₃, 1907/8, S. 89; 9₃, 1908/9, S. 253. — 2:693, siehe BM 4₃, 1903, S. 287; 7₃, 1906/7, S. 394—395. — 2:699, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 165—166. — 2:700, 701, siehe BM 1₃, 1900, S. 271. — 2:703, siehe BM 1₃, 1900, S. 271—272; 8₃, 1907/8, S. 212. — 2:704, 705, siehe BM 1₃, 1900, S. 272—273. — 2:712, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 212—213. — 2:713, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 254. — 2:714, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 89—90. — 2:715, siehe BM 5₃, 1904, S. 412. — 2:716, siehe BM 6₃, 1905, S. 404. — 2:717, 718, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 92—93. — 2:719, siehe BM 2₃, 1901, S. 357. — 2:720, siehe BM 4₃, 1903, S. 287; 6₃, 1905, S. 404. — 2:721, siehe BM 1₃, 1900, S. 273; 6₃, 1905, S. 404—405. — 2:726, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 90. — 2:727, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 392. — 2:741, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 395—396. — 2:742, siehe BM 1₃, 1900, S. 273; 3₃, 1902, S. 142. — 2:746, siehe BM 1₃, 1900, S. 273. — 2:747, siehe BM 1₃, 1900, S. 173; 2₃, 1901, S. 225. — 2:749, siehe BM 4₃, 1903, S. 88. — 2:753—754, 758, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 254—255. — 2:763, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 166. — 2:765, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 90—91. — 2:766, siehe BM 3₃, 1902, S. 142; 5₃, 1904, S. 412—413. — 2:767, siehe BM 2₃, 1901, S. 148, 357—358. — 2:770, siehe BM 4₃, 1903, S. 208. — 2:772, siehe BM 2₃, 1901, S. 358; 7₃, 1906/7, S. 392—393. — 2:773, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 213; 9₃, 1908/9, S. 167. — 2:775, siehe BM 2₃, 1901, S. 358—359. — 2:777, siehe BM 2₃, 1901, S. 148; 3₃, 1902, S. 204. — 2:780, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 78, 167. — 2:783, siehe BM 2₃, 1901, S. 359; 4₃, 1903, S. 88—89. — 2:784, siehe BM 2₃, 1901, S. 148. — 2:787, siehe BM 6₃, 1905, S. 405; 7₃, 1906/7, S. 296. — 2:790, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 393; 9₃, 1908/9, S. 255.

2:790. Hier steht ganz wie an der entsprechenden Stelle (S. 719 Z. 4 v. u.) der 1. Auflage des 2. Bandes der *Vorlesungen* durch einen Schreib- oder Druckfehler $\alpha > \sqrt[3]{a}$ statt $\alpha < \sqrt[3]{a}$. Eigentlich irreleitend ist der Fehler wohl nicht, da sich bei Herrn CANTOR S. 789 Z. 4 v. u. die richtige Ungleichung $a > \alpha^3$ findet, aber auch nachdem man den Fehler verbessert hat, ist der Ausdruck (S. 790 Z. 1) „alle $\alpha < \sqrt[3]{a}$ “ zu beanstanden, denn aus S. 789 Z. 3 v. u. kann man nur schließen, daß α eine rationale Zahl ist, und es gibt ja unendlich viele positive rationale Zahlen, die kleiner als $\sqrt[3]{a}$ sind. In Wirklichkeit ist bei GIRARD α eine ganze Zahl, obgleich dies nicht ausdrücklich von ihm hervorgehoben wird, und sonst wäre offenbar sein Verfahren fast wertlos. Statt „alle $\alpha < \sqrt[3]{a}$ “ sollte also „alle ganze Zahlen $< \sqrt[3]{a}$ “ gesetzt werden, und die folgenden Worte Z. 1—2 sind demgemäß zu modifizieren.

Außer dem von Herrn CANTOR erwähnten Verfahren gibt es bei GIRARD ein anderes, das von jenem Verfahren durchaus verschieden ist, das aber Herr CANTOR nicht einmal andeutet. Bei diesem Verfahren sucht GIRARD nicht nur den Wert von α , sondern auch den Wert von $\sqrt{\beta}$ zu bestimmen. Für diesen Zweck bemerkt er (Bl. C 3^a), daß, wenn z. B. $\sqrt[3]{72 + \sqrt{5120}}$ gesucht wird,

man die Teiler von $\sqrt{5120}$ aufsuchen soll; ein Teiler ist $\sqrt{5}$, ein anderer $\sqrt{20}$, aber da $(\sqrt{20})^3 > \sqrt{5120}$, so kann dieser Teiler nicht in Betracht kommen, also ist $\sqrt{\beta} = \sqrt{5}$, wenn die gesuchte Kubikwurzel überhaupt ein Binom ist, und jetzt ist es leicht, durch Probieren den Wert von α zu ermitteln. Da GIRARD gar nicht $\sqrt{10}$, das ja auch ein Teiler von $\sqrt{5120}$ ist, in Betracht zieht, wußte er höchstwahrscheinlich, daß $\sqrt{\beta}$ die Form $\sqrt{k^3 \cdot 5}$ haben muß, wo k eine ganze Zahl ist, aber selbst sagt er kein Wort hierüber, und noch weniger deutet er an, daß im allgemeinen, wenn $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = \alpha + \sqrt{\beta}$ und c^2 das Produkt der quadratischen Faktoren von b ist, β von der Form $\frac{k^2 b}{c^2}$ sein muß.

G. ENESTRÖM.

2: 791, siehe BM 6_a, 1905, S. 405. — 2: 793—794, siehe BM 5_a, 1904, S. 307; 6_a, 1905, S. 316—317, 405—406. — 2: 795, siehe BM 6_a, 1905, S. 317. — 2: 797—798, siehe BM 5_a, 1904, S. 307; 6_a, 1905, S. 317.

2: 797—798. Hier erwähnt Herr CANTOR einen Brief von DESCARTES an J. VAN WAESSENAER vom 1. Februar 1640 über Ausziehung der Kubikwurzel aus einem Binom von der Form $a + \sqrt{b}$. Indessen ist dieser Brief, wie Herr CANTOR selbst angibt, erst in unseren Tagen veröffentlicht worden, und es wäre darum von Interesse, zu bemerken, teils daß das Verfahren schon 1640 von WAESSENAER in seiner Arbeit: *Den on-wissen wis-konstenaer J. J. STAMPIOENIUS ontdeckt* (Leyden 1640) veröffentlicht wurde, teils daß FR. VAN SCHOOTEN 9 Jahre später das Verfahren auseinandersetzte und einen (von DESCARTES herrührenden) Beweis desselben brachte (*Geometria a RENATO DES CARTES anno 1637 gallicè edita*, Lugduni Batavorum 1649, S. 323—335). Auch in DESCARTES' *Opuscula posthuma* (Amsterdam 1701, Anhang S. 5; vgl. *Oeuvres de DESCARTES* 10, Paris 1908, S. 302—304) ist das Problem behandelt, aber auf eine Weise, die mit dem BOMBELLISCHEN Verfahren übereinstimmt und darum für die Geschichte der mathematischen Theorien von geringer Bedeutung ist. Dagegen ist DESCARTES' Verfahren vom Jahre 1640 von besonderem Interesse. Zuerst wird bemerkt, daß, wenn die Ausziehung möglich ist, der Ausdruck $\sqrt[3]{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ auf die Form $\sqrt[3]{c} \sqrt[3]{h + \sqrt{k}}$ zurückgeführt werden kann, wo h und k rationale ganze Zahlen sind und überdies $\sqrt[3]{h^2 - k}$ eine rationale ganze Zahl ist. Es genügt also zu versuchen, den Wert $\alpha + \sqrt{\beta}$ von $\sqrt[3]{h + \sqrt{k}}$ zu ermitteln, wo h und k die soeben erwähnten Bedingungen erfüllen. Nehmen wir z. B. $h = 20$, $k = 392$, so berechnet DESCARTES zuerst $\sqrt[3]{h^2 - k} = \sqrt[3]{8} = 2$ und sucht dann einen einfachen Näherungswert r' von $r = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}}$ derart, daß $r < r' < r + \frac{1}{2}$; ein solcher Wert ist offenbar $3\frac{1}{2}$. Dann berechnet er $3\frac{1}{2} + \frac{2}{3\frac{1}{2}} = 4\frac{1}{14}$, und diese Zahl ist annäherungsweise gleich 2α , so daß $\alpha = 2$ sein muß, wenn $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}}$ überhaupt von der Form $\alpha + \sqrt{\beta}$ ist. Aber wenn α bekannt ist, so kennt man auch den Wert von β , nämlich $\alpha^2 - \sqrt[3]{h^2 - k} = 2$, und folglich ist $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} =$

$2 + \sqrt{2}$. Der Beweis bei SCHOOTEN ist sehr einfach; 2 ist nämlich $= \alpha^2 - \beta$, und da $3\frac{1}{2}$ zwischen $\alpha + \sqrt{\beta}$ und $\alpha + \sqrt{\beta} + \frac{1}{2}$ liegt, so muß $3\frac{1}{2} + \frac{2}{3\frac{1}{2}}$ annäherungsweise gleich $\alpha + \sqrt{\beta} + \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha + \sqrt{\beta}} = \alpha + \sqrt{\beta} + \alpha - \sqrt{\beta} = 2\alpha$ sein, und zwar so, daß die Differenz kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.

Der Vollständigkeit halber sei hinzugefügt, daß DESCARTES sein Verfahren auf $\sqrt[n]{h + \sqrt{k}}$ erstreckte, wo n eine beliebige ganze Zahl ist, und auch diese Verallgemeinerung setzte SCHOOTEN 1649 auseinander. G. ENESTRÖM.

2: 799, siehe BM **5₃**, 1904, S. 307. — **2: 802**, siehe BM **4₃**, 1903, S. 208. — **2: 812**, siehe BM **4₃**, 1903, S. 37.

2: 815. Die Bemerkung (Z. 28—30): „In dieser Allgemeinheit ist die Behauptung allerdings nicht richtig, vielmehr nur dann zutreffend, wenn die Raumkurve eben ist“, ist ein Zusatz zur zweiten Auflage der *Vorlesungen*. Daß „die Normale“ zu einer Raumkurve in einem ihrer Punkte nicht auf die von DESCARTES angegebene Weise erhalten wird, hat schon CHASLES mehr als 50 Jahre vor dem Erscheinen der ersten Auflage des zweiten Bandes der *Vorlesungen* hervorgehoben (siehe *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, éd. 1875, S. 140); für Kurven doppelter Krümmung ist ja die Frage sinnlos, da nicht „die Normale“, sondern eine Normalebene vorhanden ist, und daß die Behauptung DESCARTES' nur ausnahmsweise zutrifft, wenn die Raumkurve eben ist, ist nicht schwer zu finden. Zieht man z. B. in Betracht einen größten Kreis einer Kugel und läßt die eine der senkrechten Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, aber nicht mit der Ebene des Kreises parallel sein, so sieht man leicht ein, daß eine Normale der Raumkurve, d. h. ein Halbmesser der Kugel, und die entsprechende Normale seiner Projektion (diese ist ja eine Ellipse) im allgemeinen nicht in derselben Ebene liegen. Eine Ebene, die durch eine Normale der Projektion geht, kann folglich nicht von einer anderen Ebene so geschnitten werden, daß die Durchschnittslinie mit der entsprechenden Normalen der Raumkurve zusammenfällt.

G. ENESTRÖM.

2: 820, siehe BM **2₃**, 1901, S. 148; **5₃**, 1904, S. 307. — **2: 825**, siehe BM **2₃**, 1901, S. 148. — **2: 827, 830**, siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 256—257. — **2: 832**, siehe BM **5₃**, 1904, S. 203—204; **6₃**, 1905, S. 211. — **2: 840**, siehe BM **2₃**, 1901, S. 148—149. — **2: 843**, siehe BM **3₃**, 1902, S. 328. — **2: 850**, siehe BM **6₃**, 1905, S. 109—110. — **2: 856, 865**, siehe BM **2₃**, 1901, S. 149. — **2: 876, 878, 879**, siehe BM **1₃**, 1900, S. 511. — **2: 891**, siehe BM **1₃**, 1900, S. 273. — **2: 897**, siehe BM **6₃**, 1905, S. 406. — **2: 898**, siehe BM **4₃**, 1903, S. 37, 208. — **2: 901**, siehe BM **1₃**, 1900, S. 511. — **2: 902**, siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 329—330.

2: 902. In meiner früheren Bemerkung (BM **9₃**, 1908/9, S. 329—330) kommt viermal unterhalb des Zeichens Σ der Schreibfehler $h=0$ statt $h=1$ vor.

G. ENESTRÖM.

2: 911, siehe BM **9₃**, 1908, S. 78—79. — **2: 919**, siehe BM **5₃**, 1904, S. 204. — **2: VIII** (Vorwort), siehe BM **3₃**, 1902, S. 142. — **2: IX, X** (Vorwort), siehe BM **1₃**, 1900, S. 511—512.

3: 4. Die Angabe (Z. 22—26): „Durch das Studium HARRIOTS soll [nach der Behauptung von WALLIS] z. B. DESCARTES auf den Satz von Zeichenwechsel und Zeichenfolge gekommen sein, von welchem jener nicht ein Wort gesagt hat, noch sagen konnte, weil für ihn negative Wurzeln nicht vorhanden waren“ ist nicht ganz genau und wird besonders durch den Zusatz: „von welchem . . . vorhanden waren“ irreleitend. An der von Herrn CANTOR zitierten Stelle (S. 171 Z. 2—4 v. u.) sagt WALLIS: „CARTESIUS in *Geometria sua* (à sola forsan inspectione casuum ab HARRIOTO enumeratorum, absque ulteriori examine,) hanc (sine limitatione) habet regulam . . .“; die englische Originalausgabe hat (S. 159) einen entsprechenden Wortlaut: „. . . from a bare inspection, perhaps of the cases mentioned by HARRIOT . . .“. Nach WALLIS ist also DESCARTES möglicherweise durch Einsehen der Formeln von HARRIOT auf seinen Satz gekommen und das ist doch etwas anderes als die CANTORSche Angabe. Freilich geht WALLIS an einer anderen Stelle (S. 211 Z. 17—18) einen kleinen Schritt weiter, indem er den Ausdruck: „praesumpsisse videtur ex inspectione quarundam aequationum HARRIOTI“ anwendet, aber auch nicht hier deutet er an, daß der Satz selbst bei HARRIOT vorkommt. Im Gegenteil hebt er einige Seiten weiter unten (S. 215 Z. 28—29) ausdrücklich hervor, daß die Zeichenregel sich nicht bei HARRIOT findet („Hanc regulam agnosco in HARRIOTO non haberi. CARTESIANUM utique hoc est“). Die Bemerkung des Herrn CANTOR: „von welchem . . . vorhanden waren“ ist also gegenstandslos und eben dadurch irreleitend.

G. ENESTRÖM.

3: 4. Hier findet sich meines Erachtens ein gutes Beispiel, wie man Geschichte der Mathematik nicht schreiben soll. Der fragliche Passus lautet (Z. 26—30):

Sich selbst schreibt WALLIS die Ausziehung der Kubikwurzel aus einem Binomium $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$ zu; er will diese Lehre und ihre Anwendung bei dem irreduktiblen Falle der Gleichung dritten Grades erfunden haben, Dinge von damals schon mehr als hundertjährigem Alter.

Um meine Behauptung zu beweisen, bringe ich erst den Anfang der betreffenden Stelle bei WALLIS (*De algebra tractatus*, Oxoniae 1693, S. 187) zum Abdruck:

Haec aequationis cubicae resolutio, aliam suggessit investigationem ipsi necessariam; de extrahenda radice binomii cubi. Quippe cum eo rem redire jam ostensum sit, ut binomii et apotomes radices cubicae, vel addendae sint, vel haec ab illa subducenda; omnino opus esse censui, hac de re sollicitum esse; methodumque excogitari has radices exquirendi. Quam rem alicubi tractat FRANCISCUS SCHOOTENIUS, in ejus iterata editione *Geometriae CARTESIANAE*, Anno 1659. Idemque in *CARTESII Epistolis* habetur, post editis. Sed ea tum temporis nondum extabant, quum ego meam methodum excogitabam.

Methodoque tunc excogitata (quia commodiorem nondum comperi) etiamnum utor.

Aus dieser Stelle ersieht man: a) daß sich WALLIS eine gewisse Methode der Ausziehung der Kubikwurzel aus einem Binomium zuschreibt; b) daß er allerdings nebenbei ein paar historische Notizen über die Frage bringt, aber gar nicht behauptet, daß diese vollständig seien und nicht einmal andeutet, daß er zuerst die Frage in Angriff genommen oder erledigt habe.

Anderseits bemerkt er, daß die Ausziehung der Kubikwurzel aus einem Binomium für die Lösung kubischer Gleichungen notwendig sei und S. 189 gibt er ein paar Beispiele der Lösung kubischer Gleichungen mittels seiner Kubikwurzelausziehungsmethode. Dagegen ist es mir nicht gelungen, bei WALLIS auch nur ein einziges Wort über seine angebliche Erfindung der Lösung kubischer Gleichungen durch Kubikwurzelausziehung zu entdecken.

Das Vorhergehende dürfte genügen um zu erklären, was ich mit meiner Behauptung am Anfange dieser Bemerkung gemeint habe. Daraus geht nämlich hervor:

A) Daß WALLIS sich selbst nicht die Ausziehung der Kubikwurzel aus einem Binomium, sondern eine bestimmte Methode für diesen Zweck zuschreibt;

B) Daß WALLIS nicht einmal andeutet, daß er diese Lehre und ihre Anwendung bei dem „Casus irreducibilis“ erfunden habe.

Indessen gibt es noch eine Frage, die für die Beurteilung des CANTORSchen Ausspruches von Interesse ist, nämlich die folgende: „War die Methode WALLIS' von damals schon mehr als hundertjährigem Alter?“

Um diese Frage zu erledigen, muß man die Regeln kennen, die Herr CANTOR durch seine Worte andeuten dürfte, nämlich die von STIFEL (1553) und von BOMBELLI (1572) gelehrt.

STIFEL's Verfahren ist auseinandergesetzt in der Neuausgabe der Algebra RUDOLFFS (in der Ausgabe 1615 S. 815—816, vgl. die *Vorlesungen* 2³, S. 446). Eigentlich gibt STIFEL drei Regeln an, aber sie sind alle vom methodischen Gesichtspunkte aus gleichwertig und ich beschränke mich darum auf die zweite, die Herr CANTOR an der soeben zitierten Stelle nicht erwähnt. Um $\sqrt[3]{135 + \sqrt{18252}}$ zu ermitteln, berechnet STIFEL erst $\sqrt[3]{18252 - (135)^2} = 3$, und sucht ferner eine Quadratzahl k^2 , die so beschaffen ist, daß $\frac{18252}{3 + k^2}$ eine Quadratzahl wird. Dann ist $3 + \sqrt{3 + k^2}$ die gesuchte Kubikwurzel. Durch Probieren findet STIFEL $k^2 = 9$, weil in diesem Falle $\frac{18252}{3 + k^2} = 1521 = (39)^2$ ist, also ist $\sqrt[3]{135 + \sqrt{18252}} = 3 + \sqrt{12}$. Bewiesen wurden von STIFEL weder diese noch die andern zwei Regeln.

Über BOMBELLIS Verfahren habe ich schon in der BM 8., 1907/8, S. 87—88 Auskunft gegeben. BOMBELLI führt die Kubikwurzelausziehung auf die Lösung einer kubischen Gleichung zurück und bestimmt die Wurzel, die eine ganze Zahl sein muß, durch Probieren zwischen gewissen Grenzen.

Bei WALLIS ist der Ausgangspunkt ein anderer als bei STIFEL und BOMBELLI. WALLIS bemerkt nämlich, daß wenn das gegebene Binomium $a + \sqrt{b}$ ist und $\sqrt{b}$ auf die Form $c\sqrt{d}$ gebracht wird, wo d keinen quadratischen Faktor enthält, die Kubikwurzel des Binomiums die Form $h + k\sqrt{d}$ haben muß, vorausgesetzt, daß sie wirklich ein Binomium ist; die Werte von h und k werden dann durch Probieren ermittelt. Um zu zeigen, wie die Methode in der Praxis verwertet werden kann, wähle ich das zweite Beispiel bei WALLIS, das dasselbe wie das oben behandelte ist, nämlich $\sqrt[3]{135 + \sqrt{18252}}$. Hier ist $d = 3$, $c = 78$ und WALLIS setzt also $\sqrt[3]{135 + 78\sqrt{3}} = h + k\sqrt{3}$

oder $135 + 78\sqrt{3} = (h + k\sqrt{3})^3$, woraus $135 = h^3 + 9hk^2$ und $78 = 3h^2k + 3k^3$. Für $k=1$ erhält man aus der zweiten Gleichung $h=5$, aber die Werte $h=5$, $k=1$ genügen nicht der ersten Gleichung; WALLIS setzt darum versuchsweise $k=2$, woraus wie früher $h=3$ und die Werte $h=3$, $k=2$ genügen wirklich der ersten Gleichung, so daß $\sqrt[3]{135 + \sqrt{18252}} = 3 + 2\sqrt{3}$.

Für meinen jetzigen Zweck ist es unnötig zu untersuchen, inwieweit die WALLISSche Methode einen wirklichen Fortschritt repräsentiert und aus demselben Grunde gehe ich nicht auf die Geschichte der Frage im 17. Jahrhundert ein (vgl. oben die Bemerkungen zu 2: 790, 797/8). Ich konstatiere nur, daß man die Kubikwurzelausziehung aus einem Binomium nicht vor WALLIS endgültig erledigt hatte, daß das Verfahren WALLIS' nicht früher gelehrt worden war und daß es wenigstens nicht als ein Rückschritt betrachtet werden kann. Damit dürfte ich alles Material herbeigeschafft haben, das für die Beurteilung des von mir bemängelten Ausspruches des Herrn CANTOR nötig ist, und das Ergebnis ist, daß die Angaben fast vollständig falsch oder irreleitend sind; das einzige Wahre ist, daß sich WALLIS mit einer Frage beschäftigt hat, die schon früher behandelt, aber nicht erledigt worden war!

Unmittelbar nach dem fraglichen Ausspruch bemerkt Herr CANTOR: „Das schlimmste war, daß kritiklose Leser den zuversichtlich ausgesprochenen Behauptungen vertrauten, und so entstanden Irrtümer, welche lange Zeit unangefochten von Lehrbuch zu Lehrbuch sich forterbten.“ Hier kann ich mich im wesentlichen mit ihm einverstanden erklären, wenn ich von dem Zusammenhang absehe, in dem die Bemerkung vorkommt, und leider gilt diese Bemerkung nicht nur in betreff der Algebra WALLIS', sondern auch hinsichtlich mathematisch-historischer Arbeiten weit späteren Datums. Überdies muß man mit Bedauern anerkennen, daß nicht nur kritiklose Leser durch zuversichtlich ausgesprochene Behauptungen gewisser Historiker der Mathematik irre geführt werden (vgl. BM 10₃, 1909/10, S. 46), denn auch kritische Leser können oft nicht die Behauptungen auf ihre Richtigkeit prüfen, weil ihnen die für diesen Zweck nötige Literatur nicht zugänglich ist. Es wäre darum dringend zu wünschen, daß die Historiker der Mathematik mehr, als es bisher der Fall gewesen ist, eine wirkliche Selbstkritik zur Anwendung kommen ließen.

G. ENESTRÖM.

3:9, siehe BM 2₃, 1901, S. 359. — 3:10, siehe BM 1₃, 1900, S. 518; 6₃, 1905, S. 211; 7₃, 1906/7, S. 393—394. — 3:11, siehe BM 4₃, 1903, S. 209. — 3:12, siehe BM 1₃, 1900, S. 512. — 3:14—15, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 296—297. — 3:17, siehe BM 1₃, 1900, S. 512. — 3:18, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 168.

3:19. Der Schluß der Angabe (Z. 9—12): „Die auf der Axe gemessene Entfernung von dem Scheitel des Kegelschnittes bis zum Eintreffen einer Ordinate heißt [bei DECHALES] Sagitta, während in den Indivisibilen das Wort Abscissa dafür im Gebrauch war“, ist auffällig, unabhängig von der Frage, ob er richtig sei oder nicht. In der zweiten Auflage des zweiten Bandes der *Vorlesungen* gibt Herr CANTOR nämlich an (S. 898), daß bei STEFANO DEGLI ANGELI, von dem er zwei bzw. 1654 und 1659 erschienene Schriften zitiert, der Ausdruck: „ad partem abscissam ab ordinatim applicata versus verticem“ vorkommt und fügt hinzu: „Wir kennen keine ältere Benutzung

5*

des Wortes Abscisse in lateinischen Originalschriften.“ Aber als Herr CANTOR die zweite Auflage des zweiten Bandes der *Vorlesungen* herausgab, lag ihm ja die erste Auflage des dritten Bandes seit ein paar Jahren vor, und dort findet sich (S. 17) genau die am Anfang dieser Bemerkung zitierte Angabe, und „Indivisibilia“ bedeutet in den *Vorlesungen* die CAVALIERISCHE Arbeit *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, von der die erste Auflage 1635, die zweite 1653 erschien. Fragt man jetzt: „Welches ist die älteste Benutzung des Wortes Abscisse, die MORITZ CANTOR im Jahre 1900 kannte?“, so bekommt man aus den *Vorlesungen* folgende Antwort: MORITZ CANTOR wußte (siehe die *Vorlesungen* 3¹, 1898, S. 17, 3², 1901, S. 19), daß bei CAVALIERI (also spätestens 1653, vermutlich schon 1635) das Wort Abscissa für die auf der Axe gemessene Entfernung von dem Scheitel des Kegelschnittes bis zum Eintreffen einer Ordinate im Gebrauch war, aber MORITZ CANTOR kannte dennoch (siehe die *Vorlesungen* 2², 1900, S. 898) keine ältere Benutzung des Wortes Abscissa für die auf der Axe gemessene Entfernung von dem Scheitel einer Parabel bis zum Eintreffen einer Ordinate als eine Stelle bei STEFANO DEGLI ANGELI aus der Zeit nach 1653. Wenn Herr CANTOR die Absicht gehabt hätte, seine Leser nicht zu belehren, sondern zu verwirren, so könnte er kaum zweckmäßiger verfahren sein. Freilich fehlt im Register des 3. Bandes das Wort „Abscisse“, so daß die Angabe über das Vorkommen dieses Wortes vor 1654 bei dem Benutzen des Registers nicht aufgefunden wird, aber mit dem Register hat Herr CANTOR sicherlich nichts zu tun gehabt.

Sehe ich jetzt von dem Widerspruch zwischen den zwei erwähnten Angaben ab, so möchte ich dennoch empfehlen, die Angabe: „während in den Indivisibilia das Wort Abscissa dafür im Gebrauch war“ zu streichen, denn freilich wird bei CAVALIERI das Wort Abscissa zuweilen benutzt, aber nicht als mathematischer Term, sondern nur in der Bedeutung „Abschnitt“. Beispielsweise kommt S. 52 (Z. 20—23) der Ausgabe 1653 folgender Passus vor: „Similes portiones sectionum coni sunt, in quarum singuli ductis lineis basi parallelis numero aequalibus, sunt ipsae parallelae, et bases ad abscissas diametrorum partes sumptas a verticibus, in iisdem rationibus, tum abscissae ipsae ab abscissis.“ Andererseits heißt es bei CAVALIERI S. 101 (Z. 15—19): „Si inter alterum extremorum punctorum propositae rectae lineae, et singula puncta . . . sumamus interiacentes lineas, dicantur istae simul collectae: Omnes abscissae propositae lineae“; hier bedeutet Abscissa offenbar ganz einfach „Strecke“ und hat nichts mit Koordinaten eines Punktes zu tun. In betreff der Frage, ob bei STEFANO DEGLI ANGELI das Fachwort „Abscissa“ vorkommt, verweise ich auf eine Bemerkung im folgenden Heft der Bibliotheca Mathematica.

G. ENESTRÖM.

3:22, siehe BM 1₂, 1900, S. 512; 4₂, 1903, S. 209. — 3:23, siehe BM 7₂, 1906/7, S. 297—298; 8₂, 1907/8, S. 91. — 3:24, siehe BM 4₂, 1903, S. 209. — 3:25, siehe BM 4₂, 1903, S. 209, 399; 9₂, 1908/9, S. 168. — 3:26, siehe BM 2₂, 1901, S. 359; 7₂, 1906/7, S. 394. — 3:29, siehe BM 9₂, 1908/9, S. 331. — 3:37, siehe BM 8₂, 1907/8, S. 91—92. — 3:39, siehe BM 6₂, 1905, S. 407. — 3:40, siehe BM 7₂, 1906/7, S. 394. — 3:45—48, 49, 50, siehe BM 1₂, 1900, S. 512—513. — 3:57, siehe BM 7₂, 1906/7, S. 298—299. — 3:63, siehe BM 7₂, 1906/7, S. 93—94. — 3:68, siehe BM 7₂, 1906/7, S. 299; 9₂, 1908/9, S. 257—258.

3:69. Die Angabe (Z. 3—5): „Und doch bildete einen wesentlichen Bestandteil der *Analysis per aequationes* ... die Binomialreihe“ ist ungenau; es sollte vielmehr „Reihenentwicklungen“ statt „Binomialreihe“ stehen. Die eigentliche Binomialreihe bildet nicht nur nicht einen wesentlichen Bestandteil der *Analysis*, sondern NEWTON vermeidet sogar absichtlich die Anwendung derselben, und aus dem Traktat kann man nicht ausfindig machen, daß NEWTON 1669 im Besitze der Binomialreihe für gebrochene und negative Exponenten war. Im Gegenteil berechnet er (siehe die „*Demonstratio quadraturae curvarum simplicium in regula prima*“) die Fluxion y von $z = cx^{\frac{p}{q}}$ dadurch, daß er erst die Gleichung auf die Form $z^q = c^q x^p$ bringt, ferner bzw. $z + oy$ und $x + o$ statt z und x einsetzt und dann die Binomialreihe für ganze positive Exponenten benutzt, was ja ein Umweg ist, wenn man das allgemeine Binomialtheorem kennt. Über Reihenentwicklung von Binomen, deren Exponenten nicht positive ganze Zahlen sind, handelt die „*Regula III*“, und darin lehrt NEWTON nicht Reihenentwicklung durch das Binomialtheorem, sondern nur (vgl. S. 72) durch Division (Beispiel $\frac{aa}{b+x}$) oder Wurzelausziehen (Beispiele $\sqrt{aa \pm xx}$, $\sqrt{x - xx}$) oder Division und Wurzelausziehen (Beispiel $\frac{\sqrt{1+ax^3}}{\sqrt{1-bx^3}}$).

Zeile 24—26 bemerkt Herr CANTOR: „NEWTONS Leistung bestand in der Ausdehnung der Reihe auf den Fall solcher Exponenten, welche die Eigenschaft positiver Ganzzahligkeit nicht besaßen“, und aus dem Zusammenhang wird man fast genötigt anzunehmen, daß sich das Wort „Leistung“ auf die *Analysis* bezieht. Sicherlich hat sich J. TROPFKE (*Geschichte der Elementarmathematik* II, Leipzig 1903, S. 329) von dieser Bemerkung zu einer Angabe verleiten lassen, die noch entschiedener aussagt, daß die Binomialreihe für ein ganz allgemeines n in der Erstlingsarbeit NEWTONS vorkommt.

Unmittelbar nach den von mir beanstandeten Worten setzt Herr CANTOR die Geschichte der Binomialreihe fort und gibt dabei Auskunft über den Brief NEWTONS an LEIBNIZ vom 24. Oktober 1676. Daß aber NEWTON schon in dem vorhergehenden Briefe vom 13. Juni 1676 das allgemeine Binomialtheorem mitgeteilt hatte, übergeht Herr CANTOR hier stillschweigend, und erst S. 79 erwähnt er im Vorübergehen, daß dieser Brief die Binomialreihe enthält. Auffälligerweise fehlt im Register unter dem Stichwort „Binomialreihe“ der Verweis auf S. 79, so daß es äußerst schwierig ist, aus den *Vorlesungen* richtige Auskunft über das erste Aktenstück, wo sich das allgemeine Binomialtheorem findet, zu bekommen.

G. ENESTRÖM.

3:70, siehe BM **2**₃, 1901, S. 360; **9**₃, 1908/9, S. 258. — **3:78,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 92.

3:79. Herr CANTOR bemerkt (Z. 9—12): „Das Datum der sicherlich vor dem 6. November 1674 an HUYGENS gelangten Mitteilung [LEIBNIZENS über die Arcustangensreihe] genau zu kennen, wäre von einiger Wichtigkeit, weil es allem Anscheine nach dem der Entdeckung durch LEIBNIZ entsprach.“ Das fragliche Datum dürfte freilich nicht ganz genau festgestellt werden können, aber annäherungsweise kann man dasselbe aus einem Passus des Briefes LEIBNIZENS an OLDENBURG vom 15. Juli 1674 bestimmen. Dieser Passus, der

einer der bekanntesten des ganzen Briefwechsels LEIBNIZENS ist (siehe z. B. J. WALLIS, *Opera mathematica* 3, Oxoniae 1699, S. 618; *Commercium epistolicum J. COLLINS et aliorum*, ed. J. B. BIOT et F. LEFORT, Paris 1856, S. 91; *LEIBNIZENS Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. GERHARDT 1, Berlin 1849, S. 53), lautet: „illud [theorema] imprimis mirabile est, cujus ope area circuli, vel sectoris ejus dati, exacte exprimi potest per seriem quendam numerorum rationalium continue productam in infinitum“. Vor dem 15. Juli 1674 hatte LEIBNIZ also die Arcustangensreihe entdeckt, und da er nach seiner eigenen Aussage („Historia et origo calculi differentialis“, *Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. GERHARDT 5, Halle 1858, S. 402—403) den Brief an OLDENBURG erst nach der Mitteilung an HUYGENS schrieb, dürfte diese Ende Juni oder Anfang Juli 1674 stattgefunden haben. Wahrscheinlich entdeckte LEIBNIZ also die Arcustangensreihe im Juni 1674.

G. ENESTRÖM.

3 : 79. Hier kommt (Z. 15—22) folgender Passus vor:

Gegen April 1675 schickte alsdann LEIBNIZ seine Reihe auch an OLDENBURG, welcher am 12. dieses Monats den Empfang bestätigte und dabei GREGORYS Arcustangensreihe angab. Ende Juli 1676 hat dann OLDENBURG weitere Reihen des seit Oktober 1675 verstorbenen GREGORYS brieflich an LEIBNIZ mitgeteilt, und am gleichen Datum schickte er ihm die Abschrift eines für LEIBNIZ bestimmten Briefes NEWTONS, in welchem die Binomialreihe, die Sinusreihe und die Cosinusreihe enthalten war.

Dieser Passus gibt zu verschiedenen Bemerkungen Anlaß. Erstens ist die Zeitangabe „gegen April 1675“ veraltet, nachdem GERHARDT 1899 (*Der Briefwechsel von G. W. LEIBNIZ mit Mathematikern* 1, Berlin 1899, S. 110—112) das Original des betreffenden Briefes von LEIBNIZ veröffentlichte (die Lieferung 3¹: 1 der *Vorlesungen* erschien 1900); das Original ist vom 30. März 1675 datiert. Zweitens enthielt dieser Brief, wie schon aus dem 1849 von GERHARDT veröffentlichten Entwurf des Briefes hervorgeht, nicht die LEIBNIZsche Reihe. Hier unten bringe ich zum Abdruck Auszüge teils aus dem Entwurf, den Herr CANTOR bei der Bearbeitung der 1. Auflage seiner *Vorlesungen* zur Verfügung hatte, teils aus der Reinschrift, die GERHARDT 1899 veröffentlichte:

Entwurf.

Mittam tibi inventum meum, satis certe memorabile, quod magnitudinem circuli per seriem numerorum rationalium infinitam mire simplicem exprimit: si mihi vicissim duo vestratium inventa geometrica pollicearis.

Reinschrift.

si mihi eam [d. h. rationem COLLINI ineundi summas serierum finitarum numericarum] consensu auctoris miseris, vicissim vobis simplicissimam illam numerorum rationalium seriem, cujus summa (si in infinitum continuetur series) circulo aequalis est, mittam.

LEIBNIZ hat also seine Reihe nicht am 30. März 1675 an OLDENBURG gesandt, sondern nur versprochen, dieselbe unter einer gewissen Bedingung zu senden. Die Bedingung wurde von OLDENBURG durch seinen Brief vom 12. April 1675 erfüllt, aber dennoch erfolgte nicht die Übersendung der LEIBNIZschen Reihe, und der Grund dazu ist sehr einfach: OLDENBURG hatte nämlich, wie Herr CANTOR angibt, in seinem Briefe die GREGORYsche Reihe

$$r \arctan \frac{t}{r} = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} \text{ etc.}$$

mitgeteilt, von der die LEIBNIZsche nur ein Spezialfall ist! Die erste Mitteilung von LEIBNIZ an OLDENBURG, in der jener seine Arcustangensreihe bringt, ist vom 27. August 1676 datiert. Die ersten Zeilen des von mir zitierten Passus der *Vorlesungen* sollen also etwa auf folgende Weise modifiziert werden:

Am 30. März 1675 schrieb LEIBNIZ einen Brief an OLDENBURG, worin er versprach, seine Reihe zu senden, aber die Erfüllung dieses Versprechens wurde unnötig, weil ihm OLDENBURG am 12. April 1675 die GREGORYsche Arcustangensreihe mitteilte.

Das übrige des fraglichen Passus ist an sich nicht unrichtig, aber auffallend unvollständig. Herr CANTOR übergeht nämlich stillschweigend, daß OLDENBURG am 12. April 1675 an LEIBNIZ nicht nur die Arcustangensreihe, sondern noch einige andere Reihen sandte, darunter die Arcussinusreihe und die Sinusreihe (nach Mitteilungen von NEWTON durch BARROW) sowie eine Arcussinusversusreihe und die Tangentenreihe (nach GREGORY). Es ist mir besonders unverständlich, warum Herr CANTOR angibt, daß die Sinusreihe im Briefe NEWTONS vom 13. Juni 1676 enthalten ist, obgleich LEIBNIZ zweimal früher von dieser Reihe Kenntnis bekommen hatte, nämlich teils durch den Brief OLDENBURGS vom 12. April 1675, teils mündlich durch GEORG MOHR (vgl. was Herr CANTOR weiter unten S. 179 mitteilt).

G. ENESTRÖM.

3:79. Die Angabe (Z. 9—10 v. u.): „in welchem auch eigene Ableitungen der Sinusreihe und der Cosinusreihe sich vorfinden“ ist ungenau. Die Cosinusreihe wird nämlich in dem Briefe von LEIBNIZ an OLDENBURG vom 27. August 1676 nicht abgeleitet, sondern nur die Sinusreihe, und zwar geschieht dies durch einfache Integration der Cosinusreihe.

G. ENESTRÖM.

3:82, siehe BM 5₁, 1904, S. 308. — **3:97**, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 394. — **3:100**, siehe BM 2₁, 1901, S. 149; 7₁, 1906/7, S. 299—300. — **3:102**, siehe BM 6₁, 1905, S. 318; 7₁, 1906/7, S. 300; 9₁, 1908/9, S. 169. — **3:104**, siehe BM 9₁, 1908/9, S. 331. — **3:112**, siehe BM 4₁, 1903, S. 209—210; 6₁, 1905, S. 318. — **3:113**, siehe BM 9₁, 1908/9, S. 258—259. — **3:116**, siehe BM 1₁, 1900, S. 513. — **3:117**, siehe BM 1₁, 1900, S. 518; 9₁, 1908/9, S. 259—260. — **3:118**, siehe BM 8₁, 1907/8, S. 92—93. — **3:122**, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 301. — **3:123**, siehe BM 1₁, 1900, S. 513; 4₁, 1903, S. 399; 7₁, 1906/7, S. 301—302. — **3:124**, siehe BM 3₁, 1902, S. 407—408; 4₁, 1903, S. 400. — **3:126**, siehe BM 4₁, 1903, S. 288. — **3:129—130**, siehe BM 8₁, 1907/8, S. 93. — **3:131**, siehe BM 4₁, 1903, S. 210. — **3:151**, siehe BM 3₁, 1902, S. 326. — **3:166**, siehe BM 9₁, 1908/9, S. 332. — **3:167**, 172—173, siehe BM 4₁, 1903, S. 400. — **3:174**, siehe BM 2₁, 1901, S. 149—150.

3:179. Herr CANTOR nennt (Z. 12—13) GEORG MOHR „einen in Geometrie und Analysis wohl bewanderten Dänen“, aber vermutlich nicht weil er selbst etwas über MOHR als Mathematiker kennt, sondern nur weil LEIBNIZ in seinem Brief vom 12. Mai 1676 den Ausdruck: „GEORGIUS MOHR Danus in geometria et analysi versatissimus“ (*Der Briefwechsel von G. W. LEIBNIZ mit Mathematikern*, herausg. von C. I. GERHARDT 1, Berlin 1899, S. 167) anwendet. Dieser MOHR wird von OLDENBURG in seinen Briefen an LEIBNIZ vom 30. September und 20. Dezember 1675 erwähnt, aber dort „Belga quidam GEORGIUS

MOOR vocatus“ oder „GEORGIUS MORUS Belga“ genannt. In Wahrheit war GEORG (JÖRGEN) MOHR in Kopenhagen geboren, scheint aber als junger Mann nach Holland übersiedelt und nie nach Dänemark zurückgekehrt zu sein (vgl. J. WORM, *Lexicon over danske . . . laerde Mænd* 2, Kjøbenhavn 1773, S. 56; R. NYERUP og J. E. KRAFT, *Almindeligt Litteraturlæxicon*, Kjøbenhavn 1820, S. 391). MOHR hat eine Schrift geometrischen Inhalts veröffentlicht, deren Titel nach MURHARD (*Litteratur der mathematischen Wissenschaften* 2, Leipzig 1798, S. 36) lautet: *EUCLIDES Damicus bestaende in twee deelen: het eerste deel handelt van de meetkonstige werckstucken, begrepen in de ses eerste boecken EUCLIDES: het tweede deel geeft aenleyding om verscheyde werckstucken te maecken, als van snyding, raecking, deeling, perspective en sonnewysers. Alleenigh met een passer te wercken sonder kye of liniael te gebruycken door snyding van houden voorgesteld*. Amsterdam 1672. Nach BIERENS DE HAAN (*Bibliographie néerlandaise . . . sur les sciences mathématiques*, Rome 1883, S. 194) enthält die Schrift IV + 24 Seiten + 1 Tafel; nach einer Mitteilung von G. VALENTIN gibt es Exemplare mit 36 Seiten. Als Algebraiker scheint sich MOHR mit der Wurzelauziehung aus Binomen von der Form $A + \sqrt{B}$ beschäftigt zu haben, und eine von ihm holländisch geschriebene Abhandlung schickte OLDENBURG am 30. September 1675 an LEIBNIZ, aber aus der Antwort LEIBNIZENS vom 28. Dezember 1675 kann man schließen, daß die Abhandlung kaum etwas Neues brachte (*Der Briefwechsel von G. W. LEIBNIZ mit Mathematikern* 1, S. 140, 143, 146).

G. ENESTRÖM.

§: 181. Die Bemerkung (Z. 19—20): „aber daß LEIBNIZ sehr deutlich gesprochen hätte, kann kein Mensch behaupten“ sollte gestrichen werden. Über die Frage, ob die eigentliche Definition des Verfahrens, das LEIBNIZ „Transmutation“ nannte, in dem Briefe an OLDENBURG vom 27. August 1676 durchaus deutlich sei oder nicht, kann man ja streiten, aber diese Frage ist ziemlich belanglos, denn LEIBNIZ hat durch ein Beispiel klar gezeigt, wie man seine Definition deuten soll. Dieses Beispiel kann in unsere mathematische Sprache auf folgende Weise übersetzt werden: Wenn man das Integral $\int \sqrt{2rx - x^2} dx$ ermitteln will, so setze man $x = \frac{2r^2}{r^2 + z^2}$. Dann wird

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2rx - x^2} dx &= \int \frac{\sqrt{2r^3(2r^2 + 2rz^2 - 2r^5)}}{r^2 + z^2} \cdot \frac{4r^2 z dz}{(r^2 + z^2)^2} = \int \frac{8r^5 z^2 dz}{(r^2 + z^2)^3} \\ &= \int \frac{8r^5 z^2 dz}{r^6 + 3r^4 z^2 + 3r^2 z^4 + z^6}, \end{aligned}$$

und hier kann man das rechte Glied durch Division in eine unendliche Potenzreihe verwandeln, deren einzelne Terme leicht integriert werden können. Jetzt versteht man sofort, was LEIBNIZ meint, wenn er in betreff der Transmutation sagt: „Ita fiet, ut quaelibet figura, vel per extractionem radices cubicae vel quadraticae, NEWTONI more, vel etiam, methodo MERCATORIS, per simplicem divisionem, ad series infinitas reduci queat.“ Diese Worte bedeuten nämlich, daß jedes Integral $\int f(x) dx$ durch passende Substitution auf eine der drei Formen

$$\int \sqrt{P(x)} dz, \quad \int \sqrt[3]{P(x)} dz, \quad \int \frac{dx}{P(x)}$$

gebracht werden kann, wo $P(x)$ eine ganze rationale Funktion bedeutet. Allerdings dürfte für LEIBNIZ die Transformation

$$\int f(x) dx = \int \frac{dz}{P(z)}$$

die wichtigste gewesen sein, und auf diesen Umstand deutet auch NEWTON in seinem bekannten Antwortschreiben vom 24. Oktober 1676 hin, als er bemerkt: „... methodus quam ipse [d. h. LEIBNIZ] nobis communicavit, determinata videatur ad electionem talium indefinitarum quantitatum, quibus opus commode deduci potest ad fractiones, quae per solam divisionem evadant series infinitae.“

G. ENESTRÖM.

3:188, siehe BM **1**₃, 1900, S. 432. — **3:188**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 241.

3:195. Am Anfang meiner Abhandlung *Über die erste Aufnahme der LEIBNIZschen Differentialrechnung* (BM **9**₃, 1908/9, S. 309) habe ich hervor gehoben, daß die Druckfehler der Abhandlung LEIBNIZens im Oktoberheft der Acta eruditorum 1684 bei den Zeitgenossen das Verständnis des Inhaltes erschwert haben müssen. Eine Bestätigung dieser Bemerkung findet sich in dem Briefe von FATIO DE DUILLIER an HUYGENS vom 28. Dezember 1691 (siehe *Oeuvres complètes de CHR. HUYGENS* **10**, La Haye 1905, S. 213), wo folgender Passus vorkommt: „J'entens fort bien tout son [d. h. LEIBNIZens] calculus differentialis, non-obstant les fautes d'impression, qui sont en si grand nombre qu'on les croiroit faites à dessein: mais c'est que je n'ai étudié ce qu'il en a écrit que depuis que j'ai eu d'ailleurs les memes choses.“ Allerdings war FATIO ein Gegner von LEIBNIZ, aber wenn es sich nur um Druckfehler handelt, muß er wohl dessenungeachtet kompetent gewesen sein, ein zutreffendes Urteil zu fällen.

G. ENESTRÖM.

3:195, 196, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 332—333. — **3:201**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 518. — **3:207**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 519. — **3:215**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 150; **9**₃, 1908/9, S. 260—262. — **3:218**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 518. — **3:220**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 326. — **3:221**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 333. — **3:224**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 514. — **3:225**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 150. — **3:228**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 150; **9**₃, 1908/9, S. 333—334. — **3:230**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 211—212. — **3:232**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 514; **6**₃, 1905, S. 212; **7**₃, 1906/7, S. 303; **8**₃, 1907/8, S. 94; **9**₃, 1908/9, S. 334—335. — **3:244—245**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 205, 413; **7**₃, 1906/7, S. 303—304. — **3:246**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 514; **2**₃, 1901, S. 151. — **3:250**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 514.

3:253. Die Bemerkung (Z. 17—20): „Es ist keinem Zweifel unterworfen, daß NEWTON imstande gewesen wäre, diese beiden Briefe, beziehungsweise deren Auszüge, spätestens 1676 bekannt zu machen, und daß sie damals ein Aufsehen der Bewunderung erregt haben mußten. Ganz anders 1693“ ist an sich nicht unrichtig, aber wird gegenstandslos, wenn man nicht voraussetzt, daß es NEWTON war, der die Auszüge 1693 bekannt machte, und die Bemerkung sowie die Fortsetzung derselben: „Wenn die Briefe jetzt Aufsehen machten, so konnte es nur ein solches der Verwunderung sein“ sollte darum meines Erachtens modifiziert werden. Die Auszüge sind nämlich, wie Herr CANTOR S. 250 richtig

angibt, von WALLIS veröffentlicht worden, und dieser gibt ausdrücklich an, aus welchem Grunde sie zum Drucke gegeben wurden (*De algebra tractatus*, Oxoniae 1693, S. 390): „... Eo quod speraverim clarissimum virum voluisse tum illa tum alia quae apud ipsum premit edidisse. Cum vero illud nondum fecerit; libet eorum nonnulla hic attingere, ne pereant.“ Nun könnte man vielleicht einwerfen, daß in jedem Falle die Veröffentlichung 1693 ein Aufsehen der Verwunderung machen mußte, da es sich im wesentlichen um bekannte Sachen handelte, aber wenn man in Betracht zieht, daß WALLIS nach seiner eigenen Aussage (siehe BM 9, 1908/9, S. 312) die Differentialrechnung LEIBNIZENS noch 1696 nicht kannte, und daß dieser Umstand durch WALLIS' hohes Alter sich erklärt, so sieht man unmittelbar ein, daß die Veröffentlichung der Auszüge durch WALLIS 1693 gar nicht wundernehmen kann. Daß NEWTON selbst keinen Schritt gemacht hat, um seine alten Entdeckungen 1693 bekannt zu machen, sondern nur auf die Bitte von WALLIS die von diesem zitierten Briefe 1692 schrieb, weiß man aus dem bekannten Brief NEWTONS an LEIBNIZ vom ^{16.}/_{26.} Oktober 1693, wo er sogar den Ausdruck „coactus sum ... exponere methodum meam fluxionum“ benutzt (siehe *LEIBNIZENS Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. GERHARDT 1, Berlin 1849, S. 170). G. ENESTRÖM.

3 : 254. Die Worte (Z. 5—8): „Und betrachtet man nicht das Datum der Briefe, sondern das ihrer Drucklegung, so mußte letztere nun gar unbegreiflich erscheinen, denn inzwischen hatte das Aprilheft 1693 der A. E. LEIBNIZENS *Integration* von Differentialgleichungen in Reihengestalt gebracht“, sollten modifiziert werden. Erstens ist es fast unmöglich, daß WALLIS das Aprilheft der *Acta eruditorum* 1693 gesehen haben konnte, bevor die Bogen *Ccc* und *Ddd* (d. h. S. 385—400) seiner lateinischen Algebra schon gedruckt waren, denn in dem Vorworte, das vom 12. Juli 1693 datiert ist, teilt er mit, daß der Druck schon 1692 begann, und das Werk enthält beinahe 900 große Folioseiten. In Wahrheit weiß man aus einem schon 1833 von UYLENBROEK veröffentlichten Brief von HUYGENS an HÔPITAL vom 29. Dezember 1692 (siehe *Oeuvres complètes de CHR. HUYGENS* 10, La Haye 1905, S. 354), daß die fraglichen Bogen wahrscheinlich schon vor dem Ende des Jahres 1692 gedruckt waren (vgl. das folgende Zitat aus WALLIS' *Algebra*). Zweitens war WALLIS 1693 ein 77jähriger Greis, und es ist nicht nur nicht unbegreiflich, sondern sogar sehr leicht erklärlich, daß er von dem betreffenden Artikel LEIBNIZENS nicht Kenntnis nahm (vgl. die vorangehende Bemerkung zu **3 : 253**). Drittens war es damals in Oxford sehr schwierig, die Hefte der *Acta eruditorum* zu bekommen, so daß WALLIS z. B. 1692 das Juniheft der Zeitschrift erst viele Wochen später, als er es bestellt hatte, bekommen konnte. Über diese Schwierigkeit gibt WALLIS selbst (*De algebra tractatus*, Oxoniae 1693, S. 481—482) folgende Auskunft: „Postquam haec [es handelt sich um eine vom 2. September 1692 datierte Lösung des sogenannten Florentiner Problems] scripta fuerant, erantque sub prelo, rescivi tandem huic eidem problemati responsum dedisse CL. Virum D. LEIBNITZ, illudque in Actis Lipsicis comparere pro mense Junio 1692. Quod fecit ut prelum sufflammandum curaverim per aliquot septimanas donec illud conspicerem; quod aegre tandem obtinui (nam apud bibliopolas nostros liber non exstabat) exeunte Decembri nostro.“ Beiläufig bemerke ich, daß HUYGENS das Juniheft der *Acta eruditorum* 1693 am 1. September 1693

bekam (*Oeuvres complètes* 10, S. 494); man darf also annehmen, das WALLIS im besten Falle das Aprilheft am 1. Juli hätte bekommen können, während das Vorwort des dicken Folianten, wie oben erwähnt wurde, schon vom 12. Juli datiert ist.

G. ENESTRÖM.

3: 259. Herr CANTOR widmet beinahe zwei Seiten dem Berichte über die Verhandlungen in betreff der Auflösung der umgekehrten Tangentenaufgabe, die FATIO nach seiner eigenen Aussage schon 1687 gefunden hatte; aber über das Verfahren selbst gibt Herr CANTOR nicht die geringste Auskunft. Ob FATIO die Aufgabe für den Fall, daß Wurzelausdrücke vorkommen, lösen konnte, dürfte schwer festzustellen sein, aber über sein Verfahren, Differentialgleichungen von der Form $P_1(x, y)dy + P_2(x, y)dx = 0$ zu lösen, wenn P_1 und P_2 ganze rationale Polynome sind, bekommt man ziemlich vollständige Aufschlüsse aus dem Briefe von FATIO an HUYGENS vom 24. Juni 1687 und dem Briefe von HUYGENS an HÔPITAL vom 23. Juli 1693, welche Briefe schon 1833 von UYLENBROEK veröffentlicht worden sind (siehe *Oeuvres complètes de CHR. HUYGENS* 9, La Haye 1901, S. 169—170; 10, La Haye 1905, S. 464—468). Das ursprüngliche Verfahren FATIOs scheint sehr mangelhaft gewesen zu sein; eigentlich konnte er nur die Gleichungen $P_1(x)dx + P_2(y)dy = 0$, $P_1(x)dy = P_2(y)dx$ integrieren, von denen die erste ja gar keine Schwierigkeiten darbietet. Von der zweiten Gleichung behandelt er den Spezialfall $3xdy = 2ydx$ oder $3xdy - 2ydx = 0$ und scheint denselben durch Multiplikation mit $\frac{xy^2}{x^4}$ gelöst zu haben. Dagegen kann er die Gleichung

$$x dx - c dx + 6y dx - b dy + y dy - 2x dy = 0$$

nicht integrieren, weil das Resultat nach seinem Verfahren

$$\frac{1}{2}x^2 - cx + \frac{2x^3}{y} - by + \frac{1}{2}y^2 = K$$

sein sollte, und diese Gleichung, wie er nachweist, nicht durch Differentiation in die vorgelegte Differentialgleichung übergeht.

Das Verfahren FATIOs wurde allmählich von ihm in Gemeinschaft mit HUYGENS verbessert, und das verbesserte Verfahren bestand darin, daß man die gegebene Gleichung durch einen „Transformateur“, d. h. einen integrierenden Faktor auf die Formen

$$P_1(x)dx + P_2(y)dy + \frac{dP_3(x)}{dx} \cdot P_4(y)dx + P_5(x) \cdot \frac{dP_6(y)}{dy} dy = 0$$

zu bringen versuchte. Wie man sieht, ist das Verfahren nur von sehr beschränkter Anwendbarkeit.

G. ENESTRÖM.

3: 260. Der erste Absatz (Z. 1—7): „Mag sein . . . ganz zerschlug“, der sich auf die Verhandlungen zwischen LEIBNIZ und HUYGENS-FATIO in betreff der umgekehrten Tangentenaufgabe bezieht, enthält die Angabe, daß LEIBNIZ „die Sache so lange hinauszog, bis sie sich ganz zerschlug“ und überdies Mutmaßungen des Herrn CANTOR, die von der Angabe veranlaßt sind. Indessen ist die Angabe durchaus unrichtig, und dadurch werden die Mutmaßungen gegenstandslos. In Wahrheit sandte LEIBNIZ im Oktober 1691 an HUYGENS die in Aussicht gestellte Mitteilung über seine Auflösung der Aufgabe. Diese

Mitteilung ist in der GERHARDTSchen Auflage des Briefwechsels zwischen LEIBNIZ und HUYGENS (Berlin 1850, S. 116—121) zum Abdruck gebracht, aber als Beilage zu einem Briefe von HUYGENS an LEIBNIZ vom 1. Januar 1692 und ohne Angabe des Verfassers; überdies hat GERHARDT am Ende des Abdruckes eine Fußnote hinzugefügt, die mit folgenden Worten beginnt: „Die Methode FATIO's, von der in diesen Briefen die Rede ist.“ Bei einer flüchtigen Lektüre kann man darum leicht veranlaßt werden, anzunehmen, daß die Beilage von HUYGENS herrührt und vielleicht die Methode FATIOs enthält; freilich sagt HUYGENS am Anfange des soeben zitierten Briefes an LEIBNIZ: „vous attendez peut-estre ce que j'auray à dire touchant vostre escrit“ und teils aus der Fußnote GERHARDTS (S. 114): „Siehe am Ende dieses Briefes“, teils aus der Fortsetzung des HUYGENSSchen Briefes geht ziemlich deutlich hervor, daß die oben erwähnte „Beilage“ gerade diese Schrift von LEIBNIZ ist. Durch die Schrift, die den Titel: „Methodus, qua innumerarum linearum constructio ex data proprietate tangentium, seu aequatio inter abscissam et ordinatam ex dato valore subtangentialis, exhibetur“ trägt, hatte LEIBNIZ nach seiner eigenen Überzeugung (siehe seine Ausführungen in dem Briefe an HUYGENS vom 29. Dezember [a. St.] 1691; bei GERHARDT a. a. O., S. 121—123) seine Methode der Auflösung der umgekehrten Tangentenaufgabe mitgeteilt. Die weiteren Verhandlungen über diese Frage sind von geringerem Interesse, und da das Wenige, das Herr CANTOR darüber sagt, nicht direkt unrichtig ist, dürfte es unnötig sein, hier anzugeben, wie es meines Erachtens modifiziert werden sollte. Ich bemerke nur beiläufig, daß HUYGENS die Mitteilung LEIBNIZENS nicht an FATIO sandte.

G. ENESTRÖM.

3: 270, siehe BM **7**., 1906/7, S. 395. — **3: 276**, siehe BM **7**., 1906/7, S. 304.
— **3: 279**, siehe BM **9**., 1908/9, S. 335—336.

3: 286. Die Behauptung (Z. 17): „was ohne dessen [d. h. NEWTONS] Einwilligung kaum denkbar ist“ sollte gestrichen werden. Erstens widerlegt Herr CANTOR selbst einige Zeilen weiter unten die Behauptung, indem er auf gewisse Papiere hinweist, die „FATIO auch ohne NEWTONS Wissen [gesperrt von Herrn CANTOR selbst!] . . . gesehen haben könnte“. Zweitens ist die Behauptung in diesem Zusammenhang irreleitend, denn die Papiere, die FATIO andeutet, hatte er ganz gewiß schon 1691 gesehen (siehe die schon 1833 von UYLENBROEK veröffentlichten Briefe von FATIO an HUYGENS vom 28. Dezember 1691 und $\frac{5}{16}$. Februar 1692; *Oeuvres complètes de CHR. HUYGENS* **10**, La Haye 1905, S. 214, 257—258), aber aus der Behauptung des Herrn CANTOR bekommt der Leser den Eindruck, daß NEWTON 1699 gewisse Aktenstücke zur Verfügung gestellt hatte, um für die Streitschrift FATIOs benutzt zu werden.

Der Absatz (Z. 18—27): „Was für Papiere . . . gesehen haben“ sollte ebenfalls gestrichen oder modifiziert werden. FATIO war seit 1688 Mitglied der „Royal society“, und er konnte darum ohne Schwierigkeit die Papiere einsehen, die 1699 im Besitze der Gesellschaft waren und später im *Commercium epistolicum* veröffentlicht wurden. Jedenfalls sollten Z. 26—27 die Worte „in der Druckerei“ gestrichen oder verändert werden, denn der 3. Band der *Opera mathematica* von WALLIS wurde nicht in London, sondern in Oxford gedruckt.

G. ENESTRÖM.

3:303, siehe BM **2**₃, 1901, S. 155. — **3:306**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 304.

3:327. Die Angabe (Z. 10—11): „Nun hat aber OLDENBURG am 26. Juni 1676 überhaupt nicht an LEIBNIZ geschrieben“ ist vermutlich richtig, aber immerhin kann sie als ein wenig unkritisch bezeichnet werden. Herr CANTOR geht nämlich offenbar von der Voraussetzung aus, daß die Datierungen der GERHARDTSchen Ausgabe absolut zuverlässig seien, ohne zu untersuchen, ob sie mit den älteren Angaben übereinstimmen oder nicht. Aber schon aus dem *Commercium epistolicum* (ed. BIOT et LEFORT S. 102, Z. 20) geht hervor, daß man am Anfange des 18. Jahrhunderts einen Brief von OLDENBURG an LEIBNIZ vom 26. Juni 1676 zu kennen glaubte. Dasselbe Datum „26 Junii“ findet sich schon bei WALLIS (*Opera mathematica* **3**, Oxoniae 1699, S. 622) und wird noch in der Ausgabe der *Opuscula* von NEWTON (**1**, Lausannae et Genevae 1744, S. 307) wiederholt; freilich hat WALLIS das Datum im Druckfehlerverzeichnis in „23 Julii“ verbessert, aber die Verbesserung ist selbst durch einen Druckfehler unanwendbar gemacht, denn es steht „p. 662“ statt „p. 622“. Dieser Brief ist offenbar der letztere von den zweien, die in der GERHARDTSchen Ausgabe das Datum 26. Juli 1676 tragen. Daß dieser Brief wirklich vom 26. Juli 1676 ist, will ich gar nicht in Abrede stellen; dagegen ist es meines Erachtens wenigstens möglich, daß der erste der zwei Briefe in Wahrheit vor dem 26. Juli 1676 geschrieben wurde. Am Anfange dieses Briefes sagt OLDENBURG nämlich: „Dum prioris [d. h. NEWTONI] meditationes parantur, en tibi varia et accumulata COLLINII nostri communicata, donec scilicet alia a Dno NEWTONO succenturientur“, und die fraglichen „meditationes“ sind ja eben die Ausführungen NEWTONS im zweiten Briefe; als OLDENBURG seinen ersten Brief begann, war folglich die Abschrift des NEWTONSchen Briefes nur in Angriff genommen, und diese Abschrift scheint dem Abschreiber große Mühe gekostet zu haben (siehe den Schluß des zweiten Briefes). Es ist also nicht unmöglich, daß der erste Brief ursprünglich vom 26. Juni 1676 datiert war. Daß die zwei Briefe gleichzeitig an LEIBNIZ abgesandt wurden, geht wohl aus den Worten LEIBNIZENS: „Literae tuae, die 26 Julii datae“ hervor, denn diese Worte beziehen sich auf die beiden Briefe, und es ist darum anzunehmen, daß die Reinschrift des ersten Briefes das Datum 26. Juli 1676 trug, auch wenn das von OLDENBURG aufbewahrte Konzept das Datum 26. Juni 1676 hatte.

Wie oben angedeutet wurde, hat diese Bemerkung nur den Zweck, hervorzuheben, daß man nicht ohne weiteres die Angaben der GERHARDTSchen Ausgabe als absolut zuverlässig betrachten darf.

G. ENESTROM.

3:330—331, siehe BM **3**₃, 1902, S. 241—242. — **3:337**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 206. — **3:350**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 336. — **3:364**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 304—305. — **3:365**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 94. — **3:367**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 215. — **3:370—371**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 308. — **3:382**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 213. — **3:384**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 319. — **3:397**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 94. — **3:398**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 305—306; **8**₃, 1907/8, S. 94—95.

3:399. Es dürfte sehr schwierig sein, sachliche Gründe aufzufinden, wodurch der letzte Absatz dieser Seite motiviert werden könnte. Bei einer

historischen Darstellung genügt es natürlich nicht, daß die Angaben an sich richtig sind, sondern es muß auch irgendeinen Grund geben, warum sie mitgeteilt werden.

In der *Arithmetica universalis* NEWTONS findet sich (siehe S. 49—52 der Ausgabe Leiden 1732) ein Abschnitt „De reductione radicalium ad simpliciores radicales per extractionem radicum“, und über diesen Abschnitt berichtet Herr CANTOR auf folgende Weise:

Zur Ausziehung der Quadratwurzel aus selbst schon mit Irrationalitäten behafteten Binomien führt die Formel

$$\sqrt{A+B} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}}.$$

Aber bekanntlich kommt dieselbe Regel schon bei EUKLIDES vor (vgl. BM 3₂, 1902, S. 238), und seit der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts wurde die Regel fast in jeder ausführlichen Darstellung der Algebra gelehrt (vgl. z. B. CHR. RUDOLFF, *Behend vnnd hupsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre*, Straßburg 1525, Bl. Gij^a—Gij^b; CHR. CLAVIUS, *Algebra*, Rom 1608, S. 150; A. DE GRAAF, *De beginselen van de Algebra*, Amsterdam 1672, S. 30—33). Es ist also sinnlos, das Vorkommen der Regel in der *Arithmetica universalis* zu erwähnen; mit ebenso gutem Rechte könnte man z. B. mitteilen, daß daselbst die Regel: „ $\frac{2ax}{b} + \frac{3ax}{b}$ faciunt $\frac{5ax}{b}$ “ gelehrt wird.

Besonders auffällig wird indessen das Verfahren des Herrn CANTOR dadurch, daß er das übrige des zitierten Abschnittes als nicht existierend behandelt. Hier lehrt nämlich NEWTON die Ausziehung von Wurzeln beliebigen Grades aus Binomien, und in den *Vorlesungen* sind früher nur Notizen über Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln aus Binomien vorgekommen. Freilich stimmt das Verfahren NEWTONS im wesentlichen mit dem DESCARTESSCHEN (*Geometria a RENATO DES CARTES anno 1637 gallice edita . . . in linguam latinam versa . . . opera . . . F. A. SCHOOTEN*, Lugduni Batavorum 1649, S. 323—336) überein. Anscheinend ist NEWTONS Methode etwas allgemeiner, denn DESCARTES nimmt an, daß $\sqrt[n]{A^2-B^2}$ eine rationale Zahl ist, wenn $\sqrt[n]{A+B}$ den gegebenen Wurzel Ausdruck darstellt, aber diese Annahme enthält keine Beschränkung der Anwendbarkeit des Verfahrens; DESCARTES zeigt nämlich, daß die Ausziehung unmöglich ist, wenn $\sqrt[n]{M+N}$ nicht auf diese Form gebracht werden kann (vgl. die Bemerkung zu 2: 797—798). G. ENESTRÖM.

3: 406, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 262. — 3: 408, siehe BM 6₃, 1906, S. 213. — 3: 412, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 306. — 3: 427, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 169. — 3: 447, 455, siehe BM 2₃, 1901, S. 151. — 3: 461, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 337. — 3: 478, siehe BM 2₃, 1901, S. 154—155; 4₃, 1903, S. 401.

3: 475. Ob nicht die Angabe (Z. 3): „In den Jahren 1722 und 1723“ auf einem Mißverständnis oder Versehen beruht? Als seine Quelle gibt Herr CANTOR Notizen von LORIA an, aber dieser behauptet selbst (siehe *Il „Giornale de' letterati d'Italia“ di Venezia e la „Raccolta CALOGERA“*; Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 9, 1899, S. 247, 273), daß die fragliche Methode RICCATTI schon 1715 veröffentlicht wurde, und zwar im Artikel: *Controrisposta alle annotazioni*

del sig. NICCOLÒ BERNULLI inserite nel XX Giornale d'Italia art. XIII con un metodo di separar le indeterminate nell'equazioni differenziali, e con alcune riflessioni intorno le forze centrali, tanto nel voto, quanto nel pieno (Giornale de'letterati d'Italia **21**, 1715, S. 304—354).

G. ENESTRÖM.

3:475. Der Passus (Z. 2—5 v. u.): „Die Methode hälftiger Trennung kam durch einen mit LEIBNIZ in Briefwechsel stehenden Italiener zu dessen Kenntnis, und er zollte ihr uneingeschränkten Beifall“ sollte meines Erachtens gestrichen werden. Das eigentliche Gewicht liegt natürlich auf den Worten: „und er zollte ihr uneingeschränkten Beifall“, aber wenn man nachsieht, was LEIBNIZ wirklich in dem angedeuteten Briefe über die Methode sagt, so findet man das folgende Urteil: „Le discours analytique sur la manière de séparer les inconnues dans les équations différentielles, me paraît ingénieux“ (siehe S. 273 der in der vorangehenden Bemerkung zitierten Abhandlung von LORIA). Nun kann man sehr wohl ein Verfahren als „ingénieux“ bezeichnen, auch wenn es eigentlich fast wertlos ist, und der Ausdruck: „uneingeschränkten Beifall zollen“ ist darum keine gute Übersetzung des LEIBNIZschen Ausspruches. In Wirklichkeit ist ja die Anwendbarkeit der Methode RICCATI so beschränkt, daß sie kaum eine Methode genannt werden kann, und dies sah LEIBNIZ sicherlich sofort ein. Wenn man den ganzen CANTORSchen Passus streicht, so kommt dadurch auch eine andere Ungenauigkeit in Fortfall, die freilich an sich ziemlich bedeutungslos ist. Der von Herrn CANTOR angedeutete Italiener war B. ZENDRINI, aber der Briefwechsel LEIBNIZens mit diesem begann erst im Juni 1715, während LEIBNIZ schon 1714 über die Methode RICCATI Auskunft bekam, und zwar durch L. BOURQUET (1678—1742), dem ZENDRINI die Methode mitgeteilt hatte.

G. ENESTRÖM.

3:476, siehe BM **9**, 1908/9, S. 169—170, 476. — **3:477, 479**, siehe BM **2**, 1901, S. 151—152. — **3:480**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 95.

3:481. Die Worte (Z. 5—9): „so daß, wenn nicht die (S. 477) erwähnte Äußerung DANIEL BERNOULLI schnurstracks entgegenstände, man sich fragen müßte, ob letzterer bei dem oben erörterten Aufsätze von 1725 ganz unabhängig verfuhr und nicht Anregung von seinem Bruder erhielt“, sollten gestrichen werden. Nicht nur die fragliche Äußerung DANIEL BERNOULLI, sondern auch ein Ausspruch von NIKOLAUS II BERNOULLI selbst ist hier zu berücksichtigen, nämlich die folgende (Comment. acad. sc. Petrop. 1 [1726], 1728, S. 205—206): „Haec iam inveneram cum Venetiis agerem eademque cum fratre DANIELE per literas communicaveram, qui alia methodo aequationes illas . . . eruit, postquam prius iam casus separabilitatis reperisset.“ Freilich kann man bemerken, daß die Abhandlung, worin diese Worte vorkommen, von DANIEL BERNOULLI nach dem Tod seines Bruders zum Druck gebracht wurde, aber meines Erachtens soll der Geschichtschreiber der Mathematik nicht ohne besonderen Grund annehmen, daß ein so gewissenhafter Mann wie DANIEL BERNOULLI möglicherweise die Angaben seines verstorbenen Bruders zu seinen Gunsten verändert hat; und daß zwei Brüder, die fast denselben mathematischen Unterricht bekommen haben, bei der Lösung eines sehr speziellen Problems fast dasselbe Verfahren benutzen, ist gar nicht auffällig.

G. ENESTRÖM.

3:496, siehe BM **9**, 1908/9, S. 337—338. — **3:497, 498**, siehe BM **5**, 1904, S. 309. — **3:507**, siehe BM **5**, 1904, S. 71—72. — **3:507—509, 509**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 338—339. — **3:521**, siehe BM **2**, 1901, S. 441. — **3:527**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 95. — **3:535**, siehe BM **4**, 1903, S. 401. — **3:536**, siehe BM **5**, 1904, S. 206. — **3:560**, siehe BM **6**, 1905, S. 319—321. — **3:565**, siehe BM **3**, 1902, S. 326—327. — **3:571**, siehe BM **3**, 1902, S. 327; **5**, 1904, S. 72; **9**, 1908/9, S. 170. — **3:575**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 263. — **3:578**, siehe BM **3**, 1902, S. 327; **5**, 1904, S. 309. — **3:582**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 307.

3:583. Der Irrtum, daß die DESCARTESSCHE Zeichenregel von HARRIOT herrührt, ist nicht durch WALLIS verbreitet worden (vgl. die Bemerkung zu **3:4**), so daß Z. 7 statt WALLIS ein anderer Name gesetzt werden soll. Merkwürdigerweise scheint LEIBNIZ der erste gewesen zu sein, bei dem der Irrtum vorkommt. In zwei posthumen Traktaten („Nova algebrae promotio“ und „De ortu, progressu et natura algebrae“, siehe *LEIBNIZENS Mathematische Schriften*, herausgegeben von C. I. GERHARDT **7**, Halle 1863, S. 157, 213) schreibt er ausdrücklich die Zeichenregel HARRIOT zu und auch seine Briefe an CHR. WOLFF vom Januar 1707 (siehe *Briefwechsel zwischen LEIBNIZ und CHR. WOLFF*, herausgegeben von C. I. GERHARDT, Halle 1860, S. 64), und an J. HERMANN vom 18. Januar 1707 (siehe *LEIBNIZENS Mathematische Schriften*, herausgegeben von C. I. GERHARDT **4**, Halle 1859, S. 308) enthalten dieselbe unrichtige Behauptung. WOLFF wiederholte dann die Angabe in seinen gedruckten Lehrbüchern (siehe *Elementa matheseos universae* **1**, editio novissima, Halle 1742, S. 417; *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften* **4**, Aufl. 3, Halle 1725, S. 1667), und dadurch wurde der Irrtum wenigstens in Deutschland allgemein verbreitet (siehe z. B. J. A. SEGNER, *Dissertatio . . . qua regulam HARRIOTI . . . demonstrare . . . conatur*, Jena 1728, S. 4; A. G. KASTNER, *Demonstratio theorematis HARRIOTI*, Leipzig 1745, Bl. *2^b; L. EULER, *Institutiones calculi differentialis*, Berlin 1755, S. 709). In Frankreich dagegen dürfte die richtige Angabe von MONTUCLA (*Histoire des mathématiques*, éd. 1, tome II, S. 86; éd. 2, tome II, S. 114) bewirkt haben, daß der Irrtum weniger Eingang fand.

G. ENESTRÖM.

3:586, siehe BM **5**, 1904, S. 309. — **3:593**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 214. — **3:609**, siehe BM **5**, 1904, S. 309—310. — **3:612**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 307—308; **9**, 1908/9, S. 339—340. — **3:614—615**, siehe BM **4**, 1903, S. 89—90; **7**, 1906/7, S. 308. — **3:616**, siehe BM **6**, 1905, S. 214, 408; **9**, 1908/9, S. 263. — **3:617**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 263.

3:617. In dem Artikel über befreundete Zahlen, die EULER in den *Acta eruditorum* 1747 veröffentlichte (siehe BM **9**, 1908/9, S. 263), kommt, wie mir Herr K. HUNRATH mitteilt, wenigstens ein Fehler vor, nämlich in betreff des Paares XIII ($2^4 \cdot 19 \cdot 8563$ und $2^4 \cdot 83 \cdot 2039$). Herr HUNRATH hat für die zwei Zahlen die Summen der Teiler berechnet und dabei gefunden:

Summe der Teiler von $2^4 \cdot 19 \cdot 8563 = 2603152$:

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 19 + 38 + 76 + 152 + 304 + 8563 + 17126 \\ &+ 34252 + 68504 + 137008 + 162697 + 325394 + 650788 + 1301576 \\ &= 2706528. \end{aligned}$$

Summe der Teiler von $2^4 \cdot 83 \cdot 2039 = 2707792$:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 83 + 166 + 332 + 664 + 1328 + 2039 + 4078 \\ + 8156 + 16312 + 32624 + 169237 + 338474 + 676948 + 1353896 \\ = 2604368.$$

Hieraus folgt, daß die zwei Zahlen nicht befreundete Zahlen sind. Herr HUNRATH hat versucht, ob man durch Änderung einer Ziffer der Zahl 8563 den Fehler verbessern kann, und in der Tat ist $2^4 \cdot 19 \cdot 8567 = 2604368$, aber 8567 ist keine Primzahl, und da EULER überall die Primfaktoren angibt, kann man nicht annehmen, daß 8563 ein Druckfehler statt 8567 sei. Sehr auffällig ist indessen, daß, wie Herr HUNRATH gefunden hat, die Summe der Teiler der Zahl $2^4 \cdot 19 \cdot 8567$ gleich 2707792 sein würde, wenn 8567 eine Primzahl wäre, denn

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 19 + 38 + 76 + 152 + 304 + 8567 + 17134 \\ + 34268 + 68536 + 137072 + 162773 + 325546 + 651092 + 1302184 \\ = 2707792.$$

In Wahrheit wird natürlich die Summe der Teiler viel größer, da $8567 = 13 \cdot 659$.

Entweder ist also in betreff des Paares XIII ein Rechenfehler begangen, oder es finden sich bei EULER wenigstens zwei Druckfehler. G. ENESTRÖM.

3: 636—637, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 441. — **3: 646—647**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1904, S. 206—207. — **3: 652**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 446; $\mathfrak{Z}_3$, 1904, S. 207. — **3: 660**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 441. — **3: 667**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 441—442; $\mathfrak{Z}_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3: 675**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 340—341. — **3: 682**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1905, S. 408. — **3: 686**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1904, S. 208. — **3: 688**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 341. — **3: 689**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 442; $\mathfrak{Z}_3$, 1907/8, S. 215. — **3: 692**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1907/8, S. 215. — **3: 693**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 341. — **3: 695**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 442. — **3: 700**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 171, 342. — **3: 702**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 171. — **3: 703, 705**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 342—343. — **3: 722**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 172. — **3: 726—728**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 343—344. — **3: 736**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1905, S. 111. — **3: 749**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 172. — **3: 750**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 446. — **3: 753**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 172—174. — **3: 754**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 344—345. — **3: 758**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 446; $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 345—346. — **3: 759**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1904, S. 208. — **3: 760**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 447. — **3: 762**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 346. — **3: 766**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 446. — **3: 773**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 174—175, 346—347. — **3: 774**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 442—443. — **3: 792**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 347. — **3: 798**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 443. — **3: 813**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1908/9, S. 348. — **3: 819**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1905, S. 321. — **3: 845**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 447; $\mathfrak{Z}_3$, 1902, S. 327—328. — **3: 848**, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 443.

3: 870—871. In betreff der Abhandlung EULERS *Solutio problematum rectificationem ellipsis requirentium* (Comment. acad. sc. Petrop. 8 [1736], gedruckt 1741, S. 86—98) bemerkt Herr CANTOR, daß die Ergebnisse derselben hinsichtlich der Lehre von den elliptischen Integralen „für die spätere Entwicklung der Wissenschaft nicht von solcher Tragweite gewesen sind, wie die Untersuchungen MACLAURINS“. Die Bemerkung ist nicht unrichtig, aber wenn man von dem wesentlichen Inhalt der Abhandlung Kenntnis genommen hat, wird man geneigt, das Urteil auf andere Weise zu formulieren. Herr CANTOR erwähnt allerdings, von welcher Art die behandelten Probleme sind, aber über das wichtigste, nämlich die Art, wie die Probleme behandelt werden, sagt er gar nichts.

EULER geht von dem Integral

$$z = \int \frac{dx \sqrt{c^2 + b^2(2x - x^2)}}{\sqrt{2x - x^2}}$$

aus, das ja tatsächlich ein elliptisches Integral ist, und leitet hieraus die sogenannte Modulargleichung (b wird nämlich als arbiträrer Parameter betrachtet) her, die in diesem Falle von der zweiten Ordnung ist. Diese Gleichung wird

$$\begin{aligned} \frac{z}{b^2 + c^2} = & \frac{c^2(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{(b^2+c^2)\sqrt{c^2+b^2(2x-x^2)}} - \frac{dx}{b db} \sqrt{\frac{c^2+b^2(2x-x^2)}{2x-x^2}} \\ & - \frac{2b dx}{db} \sqrt{\frac{2x-x^2}{c^2+b^2(2x-x^2)}} + \frac{c^2 dx^2(1-x)}{db^2(2x-x^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{c^2+b^2(2x-x^2)}} \\ & + \frac{dz}{b db} + \frac{1}{db} d\left(\frac{dz}{db}\right) - \frac{1}{db} d\left(\frac{dx}{db}\right) \sqrt{\frac{c^2+b^2(2x-x^2)}{2x-x^2}}. \end{aligned}$$

EULER hat also nachgewiesen, daß die Lösung dieser nicht gerade einfachen Gleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen x und b auf ein elliptisches Integral zurückgeführt werden kann; aus einem anderen elliptischen Integral leitet er eine ebenso verwickelte Gleichung her. Man muß wirklich zugeben, daß diese Ergebnisse nicht für die spätere Entwicklung der Theorie der elliptischen Funktionen von besonderer Tragweite gewesen sein können.

Nun wendet EULER allerdings die Ergebnisse auf die Lösung dreier Probleme an, bei denen verhältnismäßig einfache Spezialfälle der Differentialgleichungen vorkommen; beispielsweise ist bei dem ersten Problem $x=1$, so daß die Differentialgleichung wird

$$\frac{z}{b^2 + c^2} = \frac{dz}{b db} + \frac{1}{db} d\left(\frac{dz}{db}\right).$$

Aber auch wenn man von der abschreckenden Art absieht, wie diese letzte Gleichung hergeleitet worden ist, kann man mit Recht fragen: Hat man durch das Ergebnis einen Einblick in die Natur oder die Eigenschaften der elliptischen Integrale bekommen? Beantwortet man nun diese Frage bejahend, so erlaube ich mir zu bemerken, daß EULER schon im 6. Bande (gedruckt 1738) der Petersburger Commentarii eine (von Herrn CANTOR nicht erwähnte) Abhandlung veröffentlicht hatte, die mit noch besserem Rechte in der Geschichte der Lehre von den elliptischen Integralen genannt werden sollte. Die Abhandlung (S. 168—174) hat den Titel: *Specimen de constructione aequationum differentialium sine indeterminatarum separatione*, und darin weist EULER nach, daß die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x} = \frac{x}{x^2-1}$$

auf die Rektifikation einer Ellipse zurückgeführt werden kann.

G. ENESTRÖM.

3:880, siehe BM 8., 1907/8, S. 95—96. — 3:881, siehe BM 2., 1901, S. 443; 9., 1908/9, S. 264—265.

3:881. Als Ergänzung meiner früheren Bemerkung (BM **2**₃, 1901, S. 443) in betreff der ersten Herleitung des Satzes $\frac{\partial^2 A}{\partial t \cdot \partial u} = \frac{\partial^2 A}{\partial u \cdot \partial t}$ weise ich darauf hin, daß EULER selbst in einem Briefe an NIKOLAUS I. BERNOULLI vom 10. November 1742 (*Opera postuma* **1**, Petropoli 1862, S. 530) diesen als Erfinder des Satzes bezeichnet („gloriam inventionis non mihi sed tibi deberi . . . te olim, cum de trajectoriis orthogonalibus disceptaretur, verum hujus theore-matis fundamentum exhibuisse“).

G. ENESTRÖM.

3:882, siehe BM **2**₃, 1901, S. 447; **5**₃, 1904, S. 414. — **3:890,** siehe BM **4**₃, 1908, S. 401; **9**₃, 1908/9, S. 348—349. — **3:892,** siehe BM **3**₃, 1902, S. 143; **9**₃, 1908/9, S. 265. — **3:894,** siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 349—350.

3:897. Die Bemerkung (Z. 24—25): „ohne an einem Beispiele seine Behauptung zu bestätigen“ ist unverständlich, denn die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi \left(\frac{dy}{dx} \right) + x \varphi' \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{d^2 y}{dx^2} + F' \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{d^2 y}{dx^2}$$

wird bekanntlich sofort linear, wenn man $\frac{dy}{dx} = z$ setzt und z als unabhängige Veränderliche betrachtet, und die Zurückführung der linearen Differentialgleichung ersten Grades

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\varphi'(z)}{z - \varphi(z)} x + \frac{F'(z)}{z - \varphi(z)}$$

auf Quadraturen war schon seit 1697 allgemein bekannt. Warum sollte D'ALEMBERT an einem Beispiele bestätigen, was seine Fachgenossen zum voraus kannten?

Beiläufig bemerke ich, daß JOHANN BERNOULLI vermutlich schon 1694 die D'ALEMBERTSche Differentialgleichung integriert hatte, denn in seinem Brief an LEIBNIZ vom 9. Mai 1694 (*LEIBNIZENS Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. GERHARDT **3:1**, Halle 1855, S. 139) sagt er: „Si . . . x sit $= y$ multiplicato vel diviso per quantitatem aliquam, rationalem sive irrationalem, quomodocunque compositam ex differentialibus dx et dy , plus constante multiplicata vel divisa per quantitatem, si vis, aliter compositam ex differentialibus dx et dy , poterit illa aequatio semper construi.“

G. ENESTRÖM.

3:IV (Vorwort), siehe BM **2**₃, 1901, S. 443.

Anfragen und Antworten.

143. Über die Geschichte der Reihe der reziproken Quadratzahlen im 17. Jahrhundert. In seiner Abhandlung: *Eine vergessene Abhandlung LEONHARD EULERS über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen* (Biblioth. Mathem. **8**₃, 1907/8, S. 37—60) hat P. STACKEL im Vorübergehen einige Notizen über die Geschichte der fraglichen Reihe im 17. Jahrhundert gebracht, woraus hervorgeht, daß JAKOB BERNOULLI schon 1689 vergebens versucht

hatte, diese Reihe zu summieren. Der Vollständigkeit halber wäre es von Interesse, zu ermitteln, welche Versuche vor 1689 für diesen Zweck gemacht worden sind. Daß in der *Arithmetica infinitorum* von WALLIS nichts hierüber zu finden ist, habe ich schon anderwärts (siehe BM 9, 1908/9, S. 330) bemerkt. Dagegen scheint im Jahre 1673 die Summation der Reihe unter den englischen Mathematikern auf der Tagesordnung gestanden zu haben. Am 26. Mai 1673 schrieb nämlich OLDENBURG an LEIBNIZ: „... si ... sumas $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$ etc. quaerit idem [d. h. COLLINS], an ... addere eas [fractiones] possis“ (*Der Briefwechsel von G. W. LEIBNIZ mit Mathematikern*, herausg. von C. I. GERHARDT 1, Berlin 1899, S. 98). Auf diese Frage scheint LEIBNIZ nicht geantwortet zu haben, und daß er nur eine verneinende Antwort hätte geben können, geht aus verschiedenen Äußerungen von ihm hervor (siehe z. B. „Historia et origo calculi differentialis“; *Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. GERHARDT 5, Halle 1858, S. 407; vgl. auch den Brief an OLDENBURG vom 30. März 1675, a. a. O. 1, Berlin 1849, S. 59—60 [„termini secundanorum reciproci“ sind eben $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$ usw.]).

Welche englische Mathematiker haben sich 1673 mit der Summation der Reihe der reziproken Quadratzahlen beschäftigt und mit welchem Erfolg?

G. ENESTRÖM.

Antwort auf die Anfrage 94 über elementare Herleitung von Maximalwerten. Die fragliche Methode scheint von OZANAM selbst herzuführen; sie ist nämlich von ihm auseinandergesetzt in einer früheren Arbeit mit dem Titel: *Traité des lignes du premier genre expliquées par une méthode nouvelle et facile* (Paris 1687) und zwar (S. 139) als „Nouvelle méthode pour ce qu'on appelle communément les plus grands et les plus petits“. Trotz umfassender Nachforschungen ist es mir nicht gelungen, das Vorkommen dieser Methode in einer vor 1687 erschienenen Arbeit nachzuweisen.

G. ENESTRÖM.

Rezensionen.

W. W. R. Ball. *A short account of the history of mathematics.* Fourth edition London, Macmillan and Co. 1908. 8°, XXIV + 522 S. — 10 Sh.

Diese vierte Auflage des *Account of the history of mathematics* kann als die sechste Ausgabe der Arbeit betrachtet werden, wenn man die zwei Übersetzungen (ins Italienische und ins Französische) mitrechnet, und da ich schon in der Bibliotheca Mathematica die fünf früheren Ausgaben besprochen habe, ist es natürlich, daß ich in betreff der sechsten eigentlich nichts Neues zu sagen habe; diese ist nämlich, wie Herr BALL in seinem Vorwort ausdrücklich hervorhebt, im wesentlichen ein unveränderter Abdruck der dritten Auflage des Originals. Die dritte Auflage erschien 1901, während das Vorwort der jetzt vorliegenden vom Mai 1908 datiert ist, und im Laufe dieser 7 Jahre hat die mathematisch-historische Forschung nachgewiesen, daß eine sehr große Zahl der älteren Angaben modifiziert werden muß. Aber darüber erfährt der Leser der BALLschen Arbeit fast gar nichts, und nicht einmal solche Fehler der früheren Auflagen, die offenbar Flüchtigkeitsfehler waren, sind verbessert worden. Um nur ein einziges Beispiel anzuführen, findet sich S. 172 folgender Absatz, der wörtlich aus der zweiten Auflage (1893) abgedruckt worden ist.

The *Algorithmus Demonstratus* contains practical rules for the four fundamental processes, and Arabic numerals are generally (but not always) used. It is divided into ten books dealing with properties of numbers primes, perfect numbers, polygonal numbers, ratios, powers, and the progressions. It would seem from it that JORDANUS knew the general expression for the square of any algebraic multinomial.

Wer diesen Absatz liest, muß wohl sofort sehen, daß nicht alles in Ordnung ist, und daß es sich in Wahrheit um zwei verschiedene Arbeiten handeln dürfte, denn was nach den Worten: „It is divided“ steht, zeigt ja deutlich, daß die zehn Bücher etwas ganz anderes als „practical rules“ enthalten. Daß die zweite Arbeit die *Arithmetica demonstrata* ist, kann man leicht aus der 2. Fußnote der Seite 171 erraten, denn die übrigen Schriften des JORDANUS werden von Herrn BALL im Texte ausdrücklich erwähnt. Statt „It is divided“ soll also „The *Arithmetica demonstrata* is divided“ stehen, während das zweite „It“ wirklich den *Algorithmus demonstratus* bezeichnet, und es ist sehr auffällig, daß dieser Flüchtigkeitsfehler viermal (in den Auflagen 1901 und 1908 des Originals sowie in den zwei Übersetzungen) wiederholt wurde. Daß Herr BALL von den neuesten Untersuchungen über den Verfasser des *Algorithmus demonstratus* und über die von JORDANUS wirklich verfaßte Algorismusschrift nichts mitteilt, ist dagegen selbstverständlich, und ebenso selbstverständlich ist, daß er in der

neuen Auflage ein paar nicht ganz genaue Angaben des zitierten Absatzes ohne weiteres abgedruckt hat.

In meinem Artikel *Über kritische Behandlung der Geschichte der Mathematik* habe ich (Biblioth. Mathem. 9, 1908/9, S. 13) bemerkt, daß keine neue Auflage einer älteren Geschichte der Mathematik, die einen wissenschaftlichen oder pädagogischen Zweck verfolgen will, ohne Mitwirkung eines wirklich sachkundigen Historikers herausgegeben werden sollte. Gegen diese Bemerkung hat Herr LORIA (*Sur les moyens pour faciliter et diriger les études sur l'histoire des mathématiques*; Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften 1, 1909, S. 17; vgl. Biblioth. Mathem. 9, 1908/9, S. 236) geltend gemacht: a) daß es fast unmöglich sei, die Verfasser auf dem mathematisch-historischen Gebiete zu bewegen, sich einer solchen Zensur zu unterwerfen; b) daß der Zweck der Zensur erreicht werde, wenn das von Herrn LORIA in Aussicht genommene „Manuel“ fertig vorliegt. In betreff des ersten Punktes muß ich leider bis zu einem gewissen Grade mit ihm einig sein; ich rechne nämlich weniger auf die Verfasser als auf die Verleger mathematisch-historischer Arbeiten, und ich gebe gern zu, daß es im allgemeinen nicht leicht sein wird, die Verleger zu bewegen, eine Zensur der fraglichen Art einzuführen. In betreff des zweiten Punktes bedaure ich sehr, daß das „Manuel“ nicht vor ein paar Jahren erschienen ist, so daß es möglich war, seine Einwirkung auf die neue Auflage der BALLschen Arbeit zu prüfen. Indessen erlaube ich mir vorläufig anzuzweifeln, daß das Vorhandensein des „Manuel“ Herrn BALL veranlaßt haben könnte, den oben angeführten Flüchtigkeitsfehler zu verbessern. Das „Manuel“ kann ja nur auf die Quellen hinweisen oder höchstens die Angaben dieser Quellen mitteilen, und Herr BALL zitiert selbst S. 171 die Kapitel der CANTORSchen Vorlesungen, wo teils über die zehn Bücher der Arithmetik, teils über die zwei Abschnitte des *Algorithmus demonstratus* berichtet wird. Wenn Herr BALL im Laufe der Jahre 1893—1907 von diesen Kapiteln Kenntnis genommen hätte, so würde er wohl dadurch veranlaßt worden sein, den von mir zitierten Absatz zu revidieren, und ich verstehe gar nicht, wie das „Manuel“ die wunderbare Kraft bekommen wird, die Verfasser zu zwingen, genaue Kenntnis von den Quellschriften zu nehmen. Wird dagegen das „Manuel“ keine solche Kraft besitzen, so hat Herr LORIA die Bedeutung desselben überschätzt, denn es wäre leicht, ein paar hundert Stellen des BALLschen *Account* zu notieren, wo ähnliche Fehler vorkommen, d. h. wo Herr BALL seine Angaben verbessert haben könnte, wenn er nur die von ihm selbst zitierten Arbeiten zu Rate gezogen hätte. Als Beispiel weise ich noch auf die S. 219 des *Account* hin.

S. 225 der dritten Auflage (1901) gab Herr BALL als von TARTAGLIA herrührende Arbeiten an: „An arithmetic, published in two parts in 1556. A treatise on numbers, published in four parts in 1560, and sometimes treated as a continuation of the arithmetic“. Diese Angaben, die sich offenbar auf das *General trattato di numeri et misure* beziehen, hat Herr BALL in der vierten Auflage (S. 219) auf folgende Weise modifiziert: „His *Trattato de (!) numeri e (!) misuri (!)* [is] consisting of an arithmetic, published in 1556, and a treatise on numbers, published in 1560“. Diese Angabe gehört dem 12. Kapitel des *Account* an, und am Anfange dieses Kapitels verweist Herr BALL auf die Abschnitte 12—15 des zweiten Bandes der CANTORSchen *Vorlesungen*, wo ein ausführlicher Bericht (12 Druckseiten) über das *General trattato* vorkommt. Aus diesem Bericht ersieht man

- a) daß die zwei ersten Teile, die im Jahre 1556 herausgegeben wurden, wirklich arithmetischen Inhalts sind, wie Herr BALL behauptet;
- b) daß dagegen die vier letzten Teile, deren Titelblätter das Druckjahr 1560 haben, gar nicht „a treatise on numbers“ genannt werden können.

Schon aus dem von Herrn BALL angeführten Titel geht ja hervor, daß die Arbeit TARTAGLIAS teilweise geometrischen Inhalts war, und aus dem Berichte CANTORS findet man, daß die Teile 3, 4 und 5 als ein Lehrbuch der Geometrie betrachtet werden können, während der letzte Teil die Algebra behandelt. Was Herr BALL mit seinem Ausdruck „A treatise on numbers“ meint, ist mir nicht näher bekannt; meint er Proportionslehre und Zahlentheorie, so hätte er aus dem CANTORSchen Bericht entnehmen können, daß diese Gegenstände im zweiten Teil, der 1556 erschien, behandelt werden. Es ist besonders auffällig, daß Herr BALL unterließ, sich über den Inhalt des *General trattato di numeri et misure* Auskunft zu verschaffen, als er an dieser Stelle seine frühere Darstellung modifizierte, und ich wiederhole noch einmal, daß ich nicht verstehe, wie das „Manuel“ Herrn BALL hätte zwingen können, genaue Kenntnis zu nehmen von dem CANTORSchen Berichte oder von einer anderen Quelle, woraus man entnehmen kann, daß die vier letzten Teile des *General trattato di numeri et misure* nicht „a treatise on numbers“ enthalten. Noch schwieriger wäre es natürlich gewesen, Herrn BALL zur Verbesserung unrichtiger Stellen zu bewegen, wenn er keinen Anlaß gehabt hätte, die Stellen zu revidieren. In allen diesen Fällen wird also das „Manuel“ geringen Nutzen bringen, und leider ist Herr BALL nicht der einzige mathematisch-historische Verfasser, bei dem zahlreiche Fehler der fraglichen Art vorkommen.

Hinsichtlich der Veränderungen und Zusätze der neuen Auflage des *Account* ist nur wenig zu sagen; sie sind übrigens vom Verfasser selbst als „a few small corrections and additions“ bezeichnet. In einigen Fällen sind die Zusätze nützlich oder wenigstens harmlos, in anderen Fällen wäre es besser gewesen, sie wegzulassen. Nützlich sind die meisten Zusätze literarischer Art; als harmlos betrachte ich z. B. den Verweis S. 167 (die Fußnote) auf den nicht besonders sachkundigen oder zuverlässigen Artikel von M. LAZZARINI über LEONARDO PISANO und die Bemerkung S. 64, daß die von HEIBERG 1906 entdeckte ARCHIMEDES-Handschrift „propositions on hydrostatics and on methods“ enthält. Beispiele solcher Zusätze, die weggelassen werden sollten, sind die S. 194—195 und 216 eingefügten: „The signs + and — ... occur ... in a work by G. V. HOECKE, published at Antwerp in 1514“; „in this use of them [d. h. der Zeichen + und —] he [d. h. STIFEL] seems to have followed G. V. HOECKE“. Die erste Auflage der Arithmetik von GIELIS VAN DER HOECKE erschien nicht 1514 (die Angabe des Katalogs des British Museum ist irreführend), sondern erst 1537 (siehe *Biblioth. Mathem.* 7, 1906/7, S. 211), und man hat keinen Grund, anzunehmen, daß STIFEL dieses Buch 1544 gesehen hatte. Dagegen sind die Zeichen + und — durchgehend von CHR. RUDOLFF in seiner Algebra von 1525 angewandt worden, und diese Arbeit kannte STIFEL nachweislich 1544; bekanntlich gab er zehn Jahre später eine neue Ausgabe derselben heraus.

Wenn man Anlaß hätte, vorauszusetzen, daß Herr BALL durch seine Arbeit einen wissenschaftlichen oder pädagogischen Zweck verfolgte, so würde man dieselbe kaum empfehlen können, da sie allzuoft einen veralteten Standpunkt vertritt oder sogar

Unrichtigkeiten enthält, die von Herrn BALL selbst herrühren. Aber vielleicht ist es richtiger, anzunehmen, daß die Arbeit für solche Leser bestimmt ist, die sich für Geschichte der Mathematik interessieren, ohne selbst Mathematiker zu sein und ohne zu fordern, daß die einzelnen Angaben der Arbeit durchaus korrekt seien. Für einen solchen Leserkreis haben die Ausstellungen, die ich oben gemacht oder angedeutet habe, wenig zu bedeuten, und daß der fragliche Leserkreis wirklich existiert, geht ja aus den zahlreichen neuen Auflagen des *Account* hervor. Auch für den Mathematiker kann die Arbeit (vgl. *Biblioth. Mathem.* 3, 1902, S. 246) wegen der großen Zahl literarischer Notizen und des sorgfältigen Registers von Nutzen sein, und man könnte darum gewissermaßen sagen, daß sie eine Existenzberechtigung hat. Jedenfalls wäre sehr erwünscht, daß die voraussichtlich recht bald nötige fünfte Auflage einer genauen Revision unterzogen werden könnte, so daß die Zahl der unrichtigen und ungenauen Angaben wesentlich vermindert würde.

Stockholm.

G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

Ahrens, 53, 82.	Duhem, 15.	Jacobi, 53, 62.	Naccari, 60.
Amodeo, 39.	Du Pasquier, 57.	Jahnke, 66.	Omont, 28.
Aubry, 56.	Eneström, 1, 29, 47, 50.	Jeremias, 21.	Ricci, 77.
Auerbach, 4.	Engel, 65.	Jouguet, 14.	Rudio, 24, 80.
Bailland, 67.	Euklides, 25.	Kaye, 26.	Schaeuwen, 41.
Ball, 7.	Fazzari, 8.	Kepler, 38.	Slocum, 85.
Benedict, 31.	Fehr, 73, 81.	Klug, 28.	Smith, D. E., 46.
Berberich, 76.	Fuss, 53.	Köppen, 75.	Smith, Edw., 70.
Birkenmajer, 33.	Geer, 43.	Lampe, 3.	Stäckel, 53, 55.
Björnbo, 27, 32.	Gerbert, 28.	Lebon, 68.	Stamper, 9.
Bloch, 45.	Gundelfinger, 62.	Liebmann, 12.	Stieltjes, 67.
Bouola, 12.	Günther, L., 37.	Loria, 2, 10, 40, 59, 61, 78.	Suter, 30.
Boemans, 34, 36, 44, 54.	Günther, S., 69.	Mannheim, 79.	Tannery, J., 63, 64.
Bourget, 67.	Hayashi, 43, 49.	Manville, 18.	Teixeira, 11.
Braasch, 58.	Heath, 25.	Mikami, 23.	Timmerding, 16.
Cantor, 5, 6.	Heriger von Lobbes, 28.	Miller, 83.	Vacca, 20.
Collijn, 33.	Hermite, 67.	Müller, A., 35.	Voss, 19.
Dannemann, 12.	Hough, 73.	Müller, Felix, 52.	Werner, 32.
Dingeldey, 51.	Ibel, 17.	Naber, 23.	Wieleitner, 43.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. ENESTRÖM. Leipzig (Stockholm). 8°. [1
9, (1909): 4.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. LORIA. Torino (Genova). 8°. [2
11 (1909): 2—3.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. LAMPE. Berlin. 8°. [3
38 (1907): 1. — Die Seiten 1—75 enthalten Referate der im Jahre 1907 erschienenen mathematisch-historischen Schriften.

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Herausgegeben von FELIX AUERBACH (1909). — [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 98. — Biblioth. Mathem. 9., 1909, 351—352. (G. ENESTRÖM.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 88—89. (G. L.) — L'enseignement mathém. 11, 1909, 415. — Mathesis 9., 1909, 186—187. (P. M.) [4

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1^o (1907). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 9., 1908/9, 321—322. (G. ENESTRÖM.) — 2^o (1900). [Kleine Bemerkungen:]

Biblioth. Mathem. 9., 1908/9, 323—330. (G. ENESTRÖM.) — 3^o (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 9., 1908/9, 331—350. (G. ENESTRÖM.) [5

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, herausgegeben von M. CANTOR. Viertes Band. Von 1759 bis 1799 (1908). [Rezension:] Monatsch. für Mathem. 20, 1909; Lit.-Ber. 36—37. [6

Ball, W. W. R., A short account of the history of mathematics. Fourth edition. London, Macmillan & Co. 1908. [7
8°, XXIV + 522 S. — [10 sh.]

Fazzari, G., Breve storia della matematica dai tempi antichi al medio evo (1907). [Rezension:] Monatsch. für Mathem. 20, 1909; Lit.-Ber. 34—35. (R. v. St.) [8

Stamper, A. W., A history of elementary geometry with reference to present-day problems. New York [1909]. [9
8°, X + 163 S. — Columbia university, contributions to education, Teachers college series No. 23.

Loria, G., Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Terza edizione (1907). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 9., 1908/9, 352—354. (G. ENESTRÖM.) [10

Teixeira, F. G., Traité des courbes spéciales remarquables I (1908). — [Rezension:] Arch. der Mathem. 15., 1909, 72—73. (H. WIELEITNER.) [11

Bonola, R., Die nichteuklidische Geometrie. Deutsche Ausgabe von H. LIEBMANN (1908). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 30, 1909, 1658—1659. (E. LAMPE.) [12]

***Dannemann, F.**, Aus der Werkstatt großer Forscher. Allgemeinverständliche, erläuterte Abschnitte aus den Werken hervorragender Naturforscher aller Völker und Zeiten. Dritte Auflage des ersten Bandes des „Grundrisses einer Geschichte der Naturwissenschaften“. Leipzig, Engelmann 1908. [13]
8°, XII + 430 S. — [6 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 30, 1909, 2057—2058. (E. GERLAND.) — Mittell. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 8, 1909, 478—479. (GÜNTHER.)

Jouguet, E., Lectures de mécanique. La mécanique enseignée par les auteurs originaux. Deuxième partie. L'organisation de la mécanique. Paris, Gauthier Villars 1909. [14]
8°, (5) + 284 S. — [Rezension des ersten Bandes:] New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 15, 1909, 466—467. (W. R. LONGLEY.) — Bullet. d. sc. mathém. 33, 1909, 134—138. (P. DUHEM.) — L'interméd. d. mathém. 16, 1909, suppl. 6.

Duhem, P., Le mouvement absolu et le mouvement relatif. Montligeon 1909. [15]
8°, 284 S. — Sonderabdruck aus der „Revue de philosophie“.

Timmerding, H. E., Die historische Entwicklung des Kraftbegriffes (1908). [Rezension:] Mittell. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 8, 1909, 491—493. (A. E. HAAS.) [16]

Ibel, Th., Die Wage im Altertum und Mittelalter (1908). [Rezension:] Mittell. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 8, 1909, 499—500. (GÜNTHER.) [17]

Manville, O., Les découvertes modernes en physique. Deuxième édition revue et augmentée. Paris, Hermann 1909. [18]
8°, 463 S. — [8 fr.] — [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 116—117. — L'enseignement mathém. 11, 1909, 413.

Voss, A., Über das Wesen der Mathematik (1908). [Rezension:] L'enseignement mathém. 11, 1909, 414. — Naturwiss. Rundschau 24, 1909, 330. (MEITNER.) [19]

b) Geschichte des Altertums.

Vacca, G., Sulla quadratura del circolo secondo l'egiziano Ahmes. [20]
Bollett. di biblogr. d. sc. matem. 11, 1909, 65—67.

***Jeremias, A.**, Das Alter der babylonischen Astronomie. Leipzig, Hinrichs 1908. [21]
8°, 64 S. — [1.20 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 30, 1909, 2489—2491. (E. MAHLER.)

Mikami, Y., A remark on the chinese mathematics in Cantors Geschichte der Mathematik. [22]
Arch. der Mathem. 15, 1909, 68—70.

Naber, H. A., Das Theorem des Pythagoras (1908). [Rezension:] Mathesis 9, 1909, 152—153. (J. N.)

— Mittell. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 8, 1909, 488—489. (J. J. TAUDIN.) [23]

Radlo, F., Die angebliche Kreisquadratur bei Aristophanes (1907). [Rezension:] Mittell. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 8, 1909, 486. (GÜNTHER.) [24]

Heath, T. L., The thirteen books of Euclid's Elements translated (1908). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 33, 1909, 117—123. (V. MORTET.) — Science 29, 1909, 974—976. (C. J. KEYSER.) [25]

Kaye, G. B., The use of the abacus in ancient India. [26]
Calcutta, Asiatic. soc. of Bengal, Journal and proceedings 4, 1908, 293—297.

c) Geschichte des Mittelalters.

Björabo, A. A., Al-Chwārizmī's trigonometriske Tavler (1909). [Rezension:] Mittell. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 8, 1909, 485—486. (E. WIEDEMANN.) [27]

Omont, H., Opusculs mathématiques de Gerbert et de Hériger de Lobbes (1907). [Rezension:] Bibliothèque de l'école des chartes 70, 1909, 129—131. (V. MORTET.) [28]

Eneström, G., Über die Anwendung des Wortes „articulus“ bei den ersten Algorithmikern. [29]
Biblioth. Mathem. 9, 1909, 350. — Anfrage.

Suter, H., Eine indische Methode der Berechnung der Kugeloberfläche (1909). [Rezension:] Mittell. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 8, 1909, 487—488. (GÜNTHER.) [30]

Benedict, Suzan, The development of algebraic symbolism from Paciolo to Newton. [31]
School science and mathematics 9, 1909.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Björabo, A. A., Ioannis Vernerī de triangulis sphaericis libri quatuor (1907). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 20, 1909; Lit.-Ber. 35—36. (B. v. ST.) [32]

Birkenmajer, L. und Collijn, I., Nova Copernicana. Vorläufige Mitteilung über jüngst in schwedischen Archiven und Bibliotheken aufgefundenene, bisher unbekannte Autographen des Copernicus. [33]
Krakau, Akad. d. Wiss., Anzeiger (Math. Cl.) 1909.

Bosmans, H., Note sur l'arithmétique de Jean Trenchant. [34]
Bruxelles, Soc. scient., Annales 33: I, 1909, 9 S.

***Müller, Adolf**, Der Galilei-Prozess (1632—1633) nach Ursprung, Verlauf und Folgen dargestellt. Freiburg i. B., Herder 1909. [35]
8°, VIII + 205 S. — [3.60 Mk.]

Bosmans, H., Note sur les papiers de l'astronome Wendelin conservés aux archives générales du royaume, à Bruxelles. [36]
Bruxelles, Soc. scient., Annales 32: I, 1908, 74—82.

- Günther, L.**, Die Mechanik des Weltalls. Eine volkstümliche Darstellung der Lebensarbeit Johannes Keplers, besonders seiner Gesetze und Probleme. Leipzig, Teubner 1909. [37 8°, XVI + 156 S. + 1 Taf. — [1.50 Mk.] — [Rezension:] Arch. der Mathem. 15., 1909, 74—75. (P. B. FISCHER) — Naturwiss. Rundschau 24, 1909, 434—435. (A. BERBERICH.)
- * **Klug, R.**, Des kaiserlichen Mathematikers Johannes Keplers Neujahrgeschenk oder über die Sechseckform des Schnees. 1611. Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen. Linz 1907. [38 8°, 30 S. — Schulprogramm.
- Amodeo, F.**, Bonaventura Cavalieri e la costruzione lineare delle coniche. [39 Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti (Sc. matem.) 18., 1, 1909, 661—668.
- Loria, G.**, In memoria di Evangelista Torricelli. [40 Rivista ligure di scienze (Genova) 1909, 12 S. — [Rezension:] Mittell. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 8, 1909, 488. (GÜNTHER.)
- Schaeuwen, P. v.**, Die dreifachen Gleichheiten Fermats. [41 Biblioth. Mathem. 9., 1908/9, 289—300.
- Geer, P. van**, Hugeniana geometrica. VII. [42 Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 9., 1909, 6—38.
- Wieleitner, H.**, Die „Elemens de Geometrie“ des Paters J. G. Pardies. [43 Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik 1, 1909, 436—442.
- Bosmans, H.**, Lettre du P. Antoine Thomas S. J. datée de Peking, le 8 septembre 1688. [44 Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik 1, 1909, 328—334.
- Bloch, L.**, La philosophie de Newton (1908). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 30, 1909, 2454. [45
- Smith, D. E.**, The portraits of Isaac Newton. [46 Biblioth. Mathem. 9., 1909, 301—308 + Titelbild.
- Eneström, G.**, Über die erste Aufnahme der Leibnizschen Differentialrechnung. [47 Biblioth. Mathem. 9., 1909, 309—320.
- Hayashi, T.**, [Y. Mikamis Abhandlung über die Quellen der japanischen Mathematik.] [48 Tōkyō, Sōgaku-Buturigakkwai, Kizi 4., 1908, 446—453. — Japanisch.
- Hayashi, T.**, [Über die trigonometrischen Reihen und die Berechnung des Wertes von π in China.] [49 Tōkyō, Sōgaku-Buturigakkwai, Kizi 5., 1909, 45—57. — Japanisch.
- Eneström, G.**, Über die Geschichte des Problems des Körpers kleinsten Widerstandes. [50 Biblioth. Mathem. 9., 1908/9, 350. — Anfrage.
- Dingeldey, F.**, Intorno alla generazione delle coniche secondo Braikenridge e Maclaurin. [51 Atti del IV congresso internazionale dei matematici 2, 1909, 278—284.
- Müller, Felix**, Die „Bibliothèque Germanique“, das „Journal littéraire de l'Allemagne“ und die „Nouvelle bibliothèque Germanique“ als Quellen für die Geschichte der Mathematik im XVIII. Jahrhundert. [52 Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik 1, 1909, 354—369.
- Stäckel, P. und Ahrens, W.**, Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers (1908). [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 24, 1909, 295. (E. LAMPE.) [53
- Bosmans, H.**, Sur une tentative d'édition des Oeuvres complètes de L. Euler faite à Bruxelles en 1839. [54 Bruxelles, Soc. scient., Annales 33, 1909, 29 S. — [Rezension:] Mathesis 9., 1909, 67—68. (P. M.)
- Stäckel, P.**, Entwurf einer Einteilung der sämtlichen Werke Leonhard Eulers. [55 Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrschr. 54, 1909, 28 S.
- Aubry, A.**, L'oeuvre arithmétique d'Euler. [56 L'enseignement mathém. 11, 1909, 329—356.
- Du Pasquier, L. G.**, Les travaux de Léonard Euler concernant l'assurance. [57 Journal de statistique suisse 45, 1909, 45 S. — [Wieder abgedruckt:] Bullet. de l'association des actuaire suisses 5, 1909.
- * **Braasch, J.**, Historisches über die Simpsone'sche Regel und deren Anwendungen. Hamburg 1908. [58 4°, 13 S. — Schulprogramm.
- Loria, G.**, Sopra un antico tentativo per dimostrare il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. [59 Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 33—37. — Über eine Arbeit von L. BERTRAND (Genf 1778).
- * **Naccari, A.**, La vita di Michele Faraday. Padova, Fratelli Drucker 1908. [60 8°. — [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 24, 1909, 335. (O. RIESSER.)
- Loria, G.**, Per la storia della geometria descrittiva. T. Olivier. [61 Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik 1, 1909, 335—346.
- Gundelfinger, S.**, Aus Jacobis Vorlesungen über elliptische Funktionen 1835—1836 (1909). [Rezension:] Mittell. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 8, 1909, 486—487. (GÜNTHER.) [62

Tannery, J., Manuscrits et papiers inédits de Galois (1908). [Rezension:] *Monatsh. für Mathem.* 20, 1909; *Lit.-Ber.* 37. [63]

Tannery, J., Discours prononcé à Bourglain-Reine. [64]
Bullet. d. sc. mathém. 33, 1909, 158—164. — Über E. GALOIS.

Engel, Fr., Graßmann in Berlin. [65]
Berlin, Mathem. Gesellsch., Sitzungsber. 8, 1909, 79—88.

Jahnke, E., Hermann Graßmanns Ausdehnungslehre. [66]
Berlin, Mathem. Gesellsch., Sitzungsber. 8, 1909, 89—99.

Correspondance d'HERMITE et de STIELTJES publiée par B. BAILLAUD et H. BOURGET (1905). [Rezension:] *New York, Americ. mathem. soc., Bulletin* 16, 1909, 504—507. (J. PIERPONT.) [67]

Lebon, E., Henri Poincaré, biographie, bibliographie analytique de ses écrits. Paris, Gauthier-Villars 1909. [68]
8°, VIII + 80 S. + Bildnis. — [7 fr.] — „Savants du jour“.

e) Nekrologe.

Anton von Braunmühl (1853—1908). [69]
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 60—64 (Übersetzung des Nekrologes von S. GÜNTHER in den „Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss.“ 7, 1908).

William Elmbeck (1841—1909). [70]
Science 30, 1909, 48—50. (EDWIN SMITH.)

Aureliano Falfofer (1843—1909). [71]
L'enseignement mathém. 11, 1909, 313.

Albin Herzog (1852—1909). [72]
L'enseignement mathém. 11, 1909, 313—314. (H. FEHR.)

George Washington Hough (1886—1909). [73]
Science 29, 1909, 690—693. (G. J. HOUGH.)

Hermann Minkowski (1864—1909). [74]
Wiadomości matem. 18, 1909, 141.

Georg von Neumayer (1826—1909). [75]
Naturwiss. Rundschau 24, 1909, 425—427. (W. KÖPPEN.)

Simon Newcomb (1835—1909). [76]
L'enseignement mathém. 11, 1909, 403—404. — *Naturwiss. Rundschau* 24, 1909, 453—455. (A. BERBERICH.)

Francesco Siacci (1839—1907). [77]
Giornale d'artiglieria e genio 24:2, 1907, 335—337. (GIULIANO RICCI.)

Giovanni Vallati (1863—1909). [78]
L'enseignement mathém. 11, 1909, 296—299. (G. LORIA.)

f) Aktuelle Fragen.

Mannheim, A., L'invention mathématique. Note posthume. [79]
L'enseignement mathém. 11, 1909, 161—167.

Rudio, F., Bericht der Eulerkommission für das Jahr 1908/9. [80]
Schweizerische Naturf. Ges., Verhandlungen 92, 1909, 12 S.

Fehr, H., Publications des oeuvres d'Euler. [81]
L'enseignement mathém. 11, 1909, 383—384.

Ahrens, W., In welcher Sprache sollen die Werke Leonhard Eulers herausgegeben werden? [82]
Internationale Wochenschrift 3, 1909, N. 33, 6 S. — Der Verfasser hat auch in einem Artikel in der „Frankfurter Zeitung“ 29. Aug. 1909 diesen Gegenstand behandelt.

Miller, G. A., Proposed publication of Eulers works. [83]
Science 30, 1909, 10—12.

Une exposition mathématique au musée pédagogique de l'université Columbia de New York. [84]
L'enseignement mathém. 11, 1909, 218—221.

Slocum, S. E., A review of current ideas on the teaching of mathematics. [85]
Science 30, 1909, 33—43.

[Französische Mathematiker-Versammlung in Lille 1909.] [86]
L'enseignement mathém. 11, 1909, 384—394.

[Italienische Mathematiker-Versammlung in Florenz 1908.] [87]
Zeitschr. für mathem. Unterr. 40, 1909, 227—228.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Dr. E. P. ADAMS zum Professor der Physik an der Universität in Princeton.

— Professor TH. ARNDT in Berlin zum Abteilungsvorsteher am Meteorologischen Institut daselbst.

— C. G. BARKLA zum Professor der Physik am „Kings college“ in London.

— Professor J. A. BARRAU in Amsterdam zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Delft.

— Professor T. BOGGIO zum Professor der Mechanik am „Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento“ in Florenz.

— Professor E. BOREL in Paris zum Professor der Funktionstheorie an der „Faculté des sciences“ daselbst.

— Professor P. BOUTROUX in Poitiers zum Professor der höheren Analysis an der Universität in Nancy.

— Dr. T. J. FA BROWICH in Cambridge zum „Lecturer“ der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. H. L. BROWN zum Professor der Physik an der „McGill university“ in Montreal.

— Professor F. COHN in Königsberg zum Professor der Astronomie und Direktor des astronomischen Recheninstitutes an der Universität in Berlin.

— Dr. B. DAVIS zum Professor der Physik an der „Columbia university“ in New York.

— Privatdozent A. EINSTEIN in Zürich zum Professor der mathematischen Physik an der Universität daselbst.

— Privatdozent G. FABER in Karlsruhe zum Professor der Mathematik an der Universität in Tübingen.

— Professor M. FRÉCHET in Nantes zum Professor der Mechanik an der Universität in Poitiers.

— PH. FOX am Yerkes-Observatorium in Chicago zum Direktor des Dearborn-Observatoriums und Professor der Astronomie am „Northwestern university“ in Chicago-Evanston.

— „Instructor“ F. L. GRIFFIN in Williams-town zum Professor der Mathematik am „Williams college“ daselbst.

— Professor K. E. GUTHR in Jowa zum Professor der Physik an der Universität von Michigan in Ann Arbor.

— Professor J. HADAMARD in Paris zum Professor der Mechanik am „Collège de France“ daselbst.

— Privatdozent H. HAHN in Wien zum Professor der Mathematik an der Universität in Czernowitz.

— Professor L. HARTMAN an der Universität von Utah zum Professor der Physik an der Universität von Nevada.

— Privatdozent E. HILB in Erlangen zum Professor der Mathematik an der Universität in Würzburg.

— H. P. KEAN an der Universität von Illinois zum Professor der Mathematik am „Ripon college“.

— T. H. LABY zum Professor der Physik am „Victoria university college“ in Wellington.

— Dr. E. E. LAWTON am „Colby college“ zum Professor der Physik an der „Denison university“.

— Professor G. H. LING in New York zum Professor der Mathematik an der Universität in Saskatchewan.

— Dr. W. R. LONGLEY in New Haven zum Professor der Mathematik an der „Yale university“ daselbst.

— R. W. MARRIOTT am „Swarthmore college“ zum Professor der Mathematik daselbst.

— Dr. B. MEYERMANN in Wilhelmshaven zum Direktor des Observatoriums in Tsingtau.

— Professor R. S. MINOR an der Universität von Nevada zum Professor der Physik an der Universität von California.

— Privatdozent R. von MISES in Brünn zum Professor der Mathematik an der Universität in Straßburg.

— „Instructor“ C. L. E. MOORE in Boston zum Professor der Mathematik am „Massachusetts institute of technology“ daselbst.

— „Instructor“ J. C. MOREHEAD in Evanston zum Professor der Mathematik am „Northwestern university“ daselbst.

— H. F. NEWALL in Cambridge zum Professor der Astrophysik an der Universität daselbst.

— Professor E. F. NICHOLS in New York zum Präsidenten des „Dartmouth college“.

— Privatdozent C. W. OSEEN in Lund zum Professor der Mechanik und mathematischen Physik an der Universität in Upsala.

— Professor G. P. PAINE am „Ripon college“ zum Professor der Mathematik an der Universität von Minnesota.

— Dr. G. B. PEGRAM in New York zum Professor der Physik an der „Columbia university“ daselbst.

— Professor H. SCHÖNE in Basel zum Professor der klassischen Philologie an der Universität in Greifswald.

— Professor F. SCHUH in Delft zum Professor der Mathematik an der Universität in Groningen.

— Professor K. SCHWARZSCHILD in Göttingen zum Direktor des astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam.

— Dr. J. C. SHEDD in Denver zum Professor der Physik am „Olivet college“.

— „Instructor“ M. E. SHERWIN an der Universität von California zum Professor der Astronomie an der Universität von Maine.

— „Instructor“ C. H. SISAM an der Universität von Illinois zum Professor der Mathematik daselbst.

— Dr. G. W. STEWART zum Professor der Physik an der Universität von Iowa.

— Professor C. E. STROMQUIST in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität von Wyoming.

— Professor R. SÜHRING in Berlin zum Leiter des meteorologischen Observatoriums bei Potsdam.

— „Instructor“ E. SWIFT in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. A. L. UNDERHILL an der Universität von Wisconsin zum Professor der Mathematik an der Universität von Minnesota.

— Dr. C. E. WASTEELS zum Professor der rationalen Mechanik an der Universität in Gent.

— Dr. A. P. WILLS zum Professor der mathematischen Physik an der „Columbia university“ in New York.

— Professor H. A. WILSON in London zum Professor der Physik an der „McGill university“ in Montreal.

— „Instructor“ R. E. WILSON in Evanston zum Professor der Mathematik am „Northwestern university“ daselbst.

— „Instructor“ J. H. WILY an der „Lehigh university“ zum Professor der Physik daselbst.

Todesfälle.

— FLORIS DE BOER, Professor der Mathematik an der Universität in Groningen, geboren in Assendelft den 3. März 1846, gestorben 1909.

— CARL NIKOLAI JENSEN BÖRGEN, Leiter des meteorologischen Marine-Observatoriums in Wilhelmshaven, geboren in Schleswig den 1. Oktober 1843, gestorben im Juni 1909.

— VALENTINO CERRUTI, Professor der Mechanik an der Universität in Rom, geboren zu Croce Mosso (Prov. Novara) den 14. Februar 1850, gestorben daselbst den 20. August 1909.

— WILLIAM EIMBECK, Geodät an der „Coast survey“ der Vereinigten Staaten in Nordamerika, geboren in Braunschweig den 29. Januar 1841, gestorben in Washington den 27. März 1909.

— FRITZ ERK, Direktor der Meteorologischen Zentralstation in München, geboren den 17. Oktober 1857, gestorben den 31. August 1909.

— AURELIANO FAIPOFER, Professor der Mathematik am Gymnasium „Marco Foscarini“ in Venedig, geboren den 4. August 1843, gestorben in Venedig den 1. März 1909.

— EUGEN VON GOTHARD, Inhaber einer Privatsternwarte in Herény bei Steinamanger (Ungarn), geboren zu Herény den 31. Mai 1857, gestorben daselbst im Juli 1909.

— ALBIN HERZOG, Professor der Mechanik am Polytechnikum in Zürich, geboren zu Homburg (Schweiz) den 26. Oktober 1852, gestorben in Zürich den 13. Juni 1909.

— VIKTOR KREMSER, Abteilungsvorsteher am Meteorologischen Institut zu Berlin, geboren in Ratibor den 20. April 1858, gestorben 1909.

— VITTORIO RAFFAELE MATTEUCCI, Direktor des Observatoriums auf dem Vesuv, gestorben den 16. Juli 1909.

— GEORG VON NEUMAYER, Direktor der Deutschen Seewarte, geboren zu Kirchheimbolanden den 21. Juni 1826, gestorben in Neustadt a. d. Haardt den 25. Mai 1909.

— SIMON NEWCOMB, früher Professor der Mathematik und Astronomie an der Universität in Baltimore, geboren zu Wallace (N. Scot.) den 12. März 1835, gestorben in Washington den 11. Juli 1909.

— CARL REUSCHLE, Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Stuttgart, geboren in Stuttgart den 14. März 1847, gestorben den 17. August 1909.

— W. RITZ, Privatdozent der Physik an der Universität in Göttingen, gestorben im Juli 1909.

— HENRY TOYNBEE, früher Marine-Superintendent der „Meteorological office“ in London, geboren zu Heckington (Lincolnshire) den 22. Oktober 1819, gestorben den 22. April 1909.

Die Euler-Ausgabe.

— In der Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Lausanne am 6. September 1909 wurde einstimmig beschlossen, die sämtlichen Werke LEONHARD EULERS in der Originalsprache herauszugeben. Die bisherige EULER-Kommission wurde bestätigt und

später sollen noch bestellt werden ein Redaktionskomitee sowie eine Kommission, die die finanzielle Seite des Unternehmens überwachen soll.

Die Zahl der subskribierten Exemplare betrug Anfang September 275 nachdem auch die preußische Akademie der Wissenschaften auf 40 abonniert hatte. Für die Ausgabe stehen überdies zur Verfügung etwa 140 000 Francs, die von freiwilligen Beiträgen herrühren.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der „Indiana university“ in Bloomington hat Professor D. A. ROTHROCK für das akademische Jahr 1908—1909 eine dreistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Universität in Breslau hat Professor R. STURM für das Wintersemester 1909—1910 eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. FÖRSTER für das Wintersemester 1909—1910 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der mittelalterlichen Astronomie angekündigt.

— An der Universität in Göttingen hat Privatdozent C. H. MÜLLER für das Wintersemester 1909—1910 eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Mechanik seit LAGRANGE angekündigt.

— At the Columbia university (New York) Professor D. E. SMITH will deliver during the academic year 1909—1910 a course (two lectures each week) on the history of mathematics.

— An der Universität in Neapel hat Professor F. AMODEO für das Wintersemester 1909—1910 eine dreistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik von NEWTON bis LAGRANGE angekündigt.

— An der Universität in Padua hat Professor A. FAVARO für das Wintersemester 1909—1910 eine dreistündige Vorlesung über das Leben und die Werke des ARCHIMEDES angekündigt.

— Am Polytechnikum in Zürich haben für das Wintersemester 1909—1910 der Privatdozent CHERBULIEZ eine einstündige Vorlesung über EULERS Arbeiten auf dem

Gebiete des Maschinen- und Ingenieurwesens und Privatdozent L. G. DU PASQUIER eine einstündige Vorlesung über die historische Entwicklung des Zahlenbegriffs angekündigt.

Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Concours de l'année 1910. On demande un exposé systématique et didactique des recherches récentes sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.

— *Accademia di scienze di Napoli.* Concorso dell' anno 1910. Esposizione sistematica delle nozioni acquisite sulle configurazioni geometriche del piano e degli spazi mettendole in relazione con la teoria delle sostituzioni e portandovi, possibilmente, qualche nuovo contributo.

Vermischtes.

— Le prix Binoux de l'académie des sciences de Paris a été décerné en 1909 à M. P. DUNEM pour l'ensemble de ses travaux relatifs à l'histoire des sciences.

Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts.

Von HEINRICH VOGT in Breslau.

Inhalt.

Einleitung.

§ 1. Die mathematische *THEAETET*stelle.

§ 2. Der Dialog *THEAETET* als Geschichtsquelle.

§ 3. Ergänzende Zeugnisse.

§ 4. Die Terminologie.

Zusammenfassung.

Einleitung.

Nach der bei den Mathematikern und den Geschichtschreibern der Mathematik bis vor kurzem unbestritten herrschenden Anschauung soll PYTHAGORAS (vor 500 a. Chr.) die Tatsache der Irrationalität entdeckt und die Theorie des Irrationalen begründet haben. Ungefähr 100 Jahre soll dieses Wissen als Geheimnis im Schoße der pythagoreischen Schule geruht haben. Gegen Ende des 5. Jahrhunderts soll THEODOR von Kyrene die Irrationalität der Quadratwurzeln von $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$, also Einzelfälle, neu aufgefunden und bewiesen haben. THEAETET von Athen endlich soll im Anfange des 4. Jahrhunderts die Irrationalität als allgemeine Tatsache abermals entdeckt und theoretisch begründet, und EUKLID um 300 die Klassifikation der quadratischen Irrationalitäten vollendet und die Theorie zum Abschluß gebracht haben.

Ist dieses der wirkliche Entwicklungsgang, so hat sich die ganze Entdeckung über den unverhältnismäßig langen Zeitraum von zwei Jahrhunderten ausgedehnt und sich in Sprüngen eigener Art bewegt: zuerst rasches Ergreifen der Tatsachen und der Theorie; dann lange Ruhezeit ohne merkbare Befruchtung des geometrischen Erkennens; dann Neu-auffinden längst entdeckter Eigenschaften, zögernd, in Einzelfällen und ohne theoretischen Überblick; dann wieder sehr langsamer, fast ein Jahrhundert währender Ausbau der Theorie.

Bibliotheca Mathematica. III. Folge. X.

7

Die Stützen dieser Auffassung sind: eine gänzlich isolierte, nach Überlieferung und Zusammenhang nicht glaubwürdige Stelle in PROKLUS' Kommentar zum ersten Buch von EUKLIDS Elementen, ein meist gar nicht verstandener, immer mißverständener Buchtitel DEMOKRITS, eine falsch gedeutete Stelle in PLATOS *THEAETET*, endlich einige späte Scholien zu EUKLIDS Elementen.

Daß nicht PYTHAGORAS selbst und nicht die älteren Pythagoreer das Irrationale entdeckt haben können, haben JUNGE¹⁾ und ich²⁾ nachgewiesen. Aus den Quellen ist die Irrationalität als alte pythagoreische Entdeckung nicht erweisbar, und sowohl die Zahlenlehre der Pythagoreer wie die Entwicklung der griechischen Geometrie hätten andere Wege eingeschlagen, wenn die Pythagoreer schon frühzeitig die Kenntnis des Irrationalen besessen hätten.

In der nachfolgenden Arbeit will ich die bisherige Verneinung durch die Bejahung ergänzen. Ich werde allein in Autoren des 4. Jahrhunderts, in PLATO, ARISTOTELES, XENOKRATES, THEOPHRAST, EUDEMUS, EUKLID der Entwicklung der Kenntnis des Irrationalen nachgehen. Zur Verfügung stehen hauptsächlich 4 PLATOSTELLEN: *THEAETET* 147D—148B, Staat VIII 546B—C, Gesetze VII 819D—820D, *Hippias major* 303C; bei ARISTOTELES viele zerstreute Notizen und Beispiele, einige Stellen der von einem Schüler des ARISTOTELES, wahrscheinlich THEOPHRAST, gegen XENOKRATES gerichteten Streitschrift *περί ἀτόμων γραμμῶν*, ein durch das Arabische gegangenes, aus EUDEMUS entnommenes Scholion, endlich das X. Buch des EUKLID. Spätere oder unsichere Angaben werde ich nicht als unabhängiges Beweismaterial benutzen, sondern nur heranziehen, um seine Glaubwürdigkeit an dem gesicherten Bestande der Originalquellen zu prüfen.

Es wird sich zeigen, daß die Quellen des 4. Jahrhunderts das Irrationale nicht, wie es nach der alten Auffassung sein sollte, als einen alten Erkenntnisbesitz, sondern als ein junges, unfertiges Wissen behandeln. Ja, diese Quellen erweisen sich, wenn wir auf ihren Grund gehen, als Zeugnisse einer zur Zeit und unter den Augen der Autoren selbst sich vollziehenden Entwicklung. Nicht weniger beweiskräftig als der Inhalt dieser Schriftwerke ist die Wandelung der Terminologie, welche sich in ihnen vom Anfang bis zum Ende des 4. Jahrhunderts vollzieht.

Mein Resultat ist: die Entdeckung des Irrationalen hebt nicht mit einer Theorie, sondern mit einem durch die späteren Pythagoreer erkannten Sonderfall an. An diesen Sonderfall knüpfen die Entdeckung und

1) G. JUNGE, *Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt?* *Novae Symbolae Joachimicae* (Halle a. S. 1907), S. 221—264.

2) H. VOGT, *Die Geometrie des PYTHAGORAS*; *Biblioth. Mathem.* 9., 1908/9, S. 15—54.

der Nachweis der allgemeinen Irrationalität durch THEODOR von Kyrene an. Am Ende der Entwicklung steht der Ausbau der Theorie und die Klassifikation der quadratischen Irrationalen durch THEAETET und EUKLID. Die ganze Entwicklung vollzieht sich zwar mit Pausen, aber ohne Sprünge und Rückschritte, in verständlichem inneren Zusammenhange und im Zusammenhang mit dem Ausbau des ganzen geometrischen Systems in wenig mehr als einem Jahrhundert.

§ 1. Die mathematische THEAETETstelle.

Der PLATONISCHE Dialog THEAETET behandelt die Frage: Was ist Erkenntnis? Der ganz jugendliche THEAETET hat statt der geforderten Begriffserklärung Einzelfälle angegeben. SOKRATES weist diese zurück und gibt, um THEAETET auf den richtigen Weg zu führen, selbst ein Beispiel einer richtigen Definition: Lehm ist angefeuchtete Erde. Jetzt hat THEAETET begriffen, worauf es ankommt.

147C ΘΕΑΙ. Ῥᾶδιον, ὦ Σώκρατες, νῦν γε οὕτω φαίνεται· ἀτὰρ κινδυνεύεις ἐρωτᾶν οἷον καὶ αὐτοῖς ἡμῖν ἐναγχοῖς D εἰσῆλθε διαλεγόμενοις, ἐμοὶ τε καὶ τῷ σὺ ὁμωνύμῳ τούτῳ Σωκράτει.

ΣΩ. Τὸ ποῖον δὴ, ὦ Θεαίτητε;

ΘΕΑΙ. Περί δυνάμεων τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τριποδος περί καὶ πεντέποδος ἀποφανων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαί, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἐκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἓν, ὅτε πάσας ταύτας προσ- E ἀγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

TH.¹⁾ So erscheint die Aufgabe jetzt leicht. Deine Frage dürfte wohl auf etwas der Art zielen, wie es auch uns selbst neulich in der Unterhaltung eingefallen ist; mir und hier deinem Namensvetter SOKRATES.

SOKR. Wie war das?

TH. Über Quadrate hatte THEODOR uns Zeichnungen gemacht, um von den Quadraten mit 3 und 5 Quadratfuß Fläche nachzuweisen, daß ihre Seitenlängen durch die Seite des Einheitsquadrats nicht meßbar sind. So hatte er jedes einzeln vorgenommen bis zu dem von 17 Quadratfuß. Bei diesem war er zufällig stehen geblieben. Da fiel uns etwas derartiges (wonach du fragst) ein, nämlich, da die Quadrate sich an Zahl unbegrenzt gezeigt hatten, den Versuch zu machen, in einen einzigen Ausdruck die Besonderheit aller dieser Quadrate zusammenzufassen.

1) Die Begründung der Übersetzung siehe S. 109—110, 112.

ΣΩ. Ἡ καὶ εὗρητέ τι τοιοῦτον;

ΘΕΑΙ. Ἐμοιγε δοκοῦμεν· σκόπει δὲ καὶ σύ.

ΣΩ. Λέγε.

ΘΕΑΙ. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν· τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκεις γίνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετραγώνον τε καὶ ἰσοπλευρον προσείπομεν.

ΣΩ. Καὶ εὖ γε.

ΘΕΑΙ. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὃν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε
148A καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκεις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκεις ἢ ἐλάττων πλειονάκεις γίνεται, μέζων δὲ καὶ ἐλάττων αἰὲ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὐτοῦ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

ΣΩ. Κάλλιστα. ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τούτου;

ΘΕΑΙ. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσοπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μήκος ὠρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἐτερομήκη, δυνάμεις,
B ὡς μήκει μὲν οὐ ξυμέτρους ἐκέναι, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.

ΣΩ. Ἀριστά γ' ἀνθρώπων, ὧ παιῖδες.

ΣΟΚΡ. Und habt ihr einen solchen Ausdruck gefunden?

ΤΗ. Ich glaube wohl; prüfe auch du ihn.

ΣΟΚΡ. Sag' an.

ΤΗ. Die Gesamtheit der Zahlen theilten wir in zwei Klassen. Die Zahlen, welche als Produkte gleicher Zahlen aufgefaßt werden können, verglichen wir ihrer Form nach mit dem Quadrat und nannten sie quadratisch oder gleichseitig.

ΣΟΚΡ. Schön.

ΤΗ. Die zwischen den Quadratzahlen liegenden, zu denen auch die Drei und die Fünf und jede andere gehört, welche nicht das Produkt gleicher Faktoren ist, sondern entweder aus der Multiplikation einer größeren Zahl mit einer kleineren oder einer kleineren mit einer größeren entsteht, die verglichen wir demnach, weil stets eine größere und eine kleinere Seite sie umfaßt, mit der Figur des Rechtecks und nannten sie zum Unterschied Rechteckzahlen.

ΣΟΚΡ. Recht schön; aber worauf will das hinaus?

ΤΗ. Alle Linien, über denen sich Quadrate errichten lassen, deren Maßzahlen selbst Quadratzahlen sind, definierten wir als Länge; die aber Rechteckzahlen liefern, als Potenzen, da sie durch ihre Länge nicht gemeinsamen Maßes mit jenen sind, sondern nur durch die über ihnen errichteten Flächen (potenziert). Und ähnliche Festsetzungen trafen wir über die Raumgrößen.

ΣΟΚΡ. Ganz vortrefflich, ihr Knaben!

Digitized by Google

A. Die Leistung THEODORS von Kyrene.

Aus der Situation des Dialogs und der Erzählung des jungen THEAETET geht hervor: Der berühmte Mathematiker THEODOR von Kyrene hat in einem Lehrvortrage zu Athen im Frühjahr des Jahres 399, als schon die Anklage gegen SOKRATES erhoben war, für die Seiten der Quadrate von 3, 5 usw. bis 17 Flächeneinheiten bewiesen, und zwar für jede einzeln, daß sie mit der Längeneinheit kein gemeinschaftliches Maß haben; wir sagen, er hat die Irrationalität von $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ bis $\sqrt{17}$ bewiesen. Wie $\sqrt{4}$, so hat er natürlich auch $\sqrt{9}$ und $\sqrt{16}$ übergangen. Für jeden Einzelbeweis sind durch die beiden Worte *γράφειν* und *ἀποφαίνειν* zwei wesentliche Schritte gekennzeichnet: THEODOR lieferte zunächst für jede der Linien, deren dem Zahlbegriff widersprechende Eigenschaft er nachweisen wollte, den Existenzbeweis, indem er sie mit Hilfe ihres Quadrates zeichnete; daran schloß er den logischen Nachweis der Inkommensurabilität.

α) Die Konstruktion. Der hochverdiente, der Wissenschaft nunmehr leider entrissene FRIEDRICH HULTSCH hat den Gedankengang THEODORS in seiner Abhandlung *Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei ARCHIMEDES*¹⁾ einer Analyse unterzogen. Mit Recht legt er allen Zeichnungen das rechtwinklige Dreieck, d. h. den Pythagoreischen Lehrsatz zugrunde. Weiter geht er, „damit es unmittelbar aus der Figur ersichtlich sei, daß jedes dieser Quadrate ein Soundsovielfaches der *ποδιαλα δύναμις*, d. i. der Flächeneinheit, ist“²⁾, nach folgenden Grundsätzen vor, die er nur Schritt für Schritt, wo sie nicht mehr durchführbar sind, aufgibt: 1. Eine Seite des rechtwinkligen Dreiecks ist die Einheit.³⁾ 2. Wenn irgend möglich, sind zwei Seiten rational. 3. Mindestens eine Seite muß rational sein.⁴⁾ Mit Grundsatz 1 und 2 sind ausführbar, und zwar mit einer Einheitsseite

$$\begin{aligned} (\sqrt{5})^2 &= 2^2 + 1^2, & (\sqrt{10})^2 &= 3^2 + 1^2, & (\sqrt{17})^2 &= 4^2 + 1^2 \\ (\sqrt{3})^2 &= 2^2 - 1^2, & (\sqrt{8})^2 &= 3^2 - 1^2, & (\sqrt{15})^2 &= 4^2 - 1^2 \end{aligned}$$

und wenigstens mit zwei rationalen Seiten

$$(\sqrt{13})^2 = 3^2 + 2^2.$$

Die fehlenden fünf Wurzeln sind nicht mehr mit rein rationalen Seiten herzustellen; für sie wählt HULTSCH die Konstruktionen:

$$\begin{aligned} (\sqrt{6})^2 &= (\sqrt{2})^2 + 2^2, & (\sqrt{11})^2 &= (\sqrt{2})^2 + 3^2, & (\sqrt{7})^2 &= (\sqrt{3})^2 + 2^2, \\ (\sqrt{12})^2 &= (\sqrt{3})^2 + 3^2 & \text{ und endlich } & (\sqrt{14})^2 &= 4^2 - (\sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

1) Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen 1893, S. 368—428. Vgl. HULTSCH, Art. „Arithmetica“ 24 in PAULY-WISSOWA, *Real-encyklopädie* 2¹, 1895 und Art. „EUKLEIDES“ 24 ebenda 6¹, 1907.

2) a. a. O. S. 378.

3) a. a. O. S. 378.

4) a. a. O. S. 381.

Die von HULTSCH angegebenen Konstruktionen sind nicht etwa die einzig möglichen. Im Gegenteil, alle in Betracht kommenden Quadratwurzeln lassen sich auf mehrere Arten konstruieren, z. B.

$$\begin{aligned}(\sqrt{6})^2 &= (\sqrt{5})^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2 + 2^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 \\ &= (\sqrt{7})^2 - 1^2 = (\sqrt{8})^2 - (\sqrt{2})^2 \text{ usw.}\end{aligned}$$

HULTSCH aber lehnt alle andern ab und erhebt für seine Konstruktionen den Anspruch, daß THEODOR nach dem Stande und Geiste der griechischen Geometrie gerade diese wählen mußte.

Und doch hat HULTSCH kein Recht, die große Fülle der Konstruktionsmöglichkeiten bis zur Eindeutigkeit einzuengen. Wenn Grundsatz 1 nur in der Hälfte der Fälle, Grundsatz 2 nur in 7 von 12 Fällen durchführbar ist, so sind das eben keine Grundsätze mehr, und die Überlegung, welche zu ihrer Aufstellung geführt hat, ist nicht zwingend.

HULTSCH verwirft insbesondere die zusammenhängende Darstellung der Wurzeln, welche von dem gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 1, 1 ausgehend als erste Hypotenuse $\sqrt{2}$ erhält, und darauf die folgenden Wurzeln, indem jede vorangehende Hypotenuse zur Kathete eines neuen rechtwinkligen Dreiecks benützt wird, dessen zweite Kathete stets die Einheit ist.¹⁾ HULTSCH erkennt an²⁾ „das erscheint uns Neuere mit Recht als das geeignetste Verfahren, die Reihe der Wurzeln aller ganzen Zahlen geometrisch zu versinnbildlichen“; auch sind bei diesem Verfahren seine Grundsätze 1 und 3 gewahrt, ist doch eine Kathete prinzipiell die Längeneinheit; „allein für die ersten Anfänge der griechischen Lehre von den Wurzeln dürfen wir solche allgemeine Anschauungen schlechterdings nicht voraussetzen“. Also HULTSCH fügt seinen drei speziellen Grundsätzen noch den allgemeinen vierten hinzu³⁾, „daß alle griechische Geometrie mit der Setzung spezieller Fälle und mit Einzelbeweisen begonnen hat“.

Gewiß „ist der Fortschritt vom Besonderen zum Allgemeinen überhaupt der Entwicklungsgang der Wissenschaft; außerdem aber ist die Zerstückelung der Theoreme jener ersten Periode (der pythagoreischen) der griechischen Mathematik ganz besonders eigen“⁴⁾; aber wir haben kein Recht dem griechischen Geiste die Beschränkung auf Einzelfälle als Notwendigkeit aufzuerlegen. Es hieße das geradezu, einem Prinzip

1) H. SCHMIDT, *Kritischer Kommentar zu PLATOS Theaetet*; Jahrb. f. Philologie 9. Suppl.-Bd. (Leipzig 1877—78), S. 441.

2) a. a. O. S. 377. Auch PAULY-WISSOWA, a. a. O. 2¹, S. 1093, 42—58.

3) a. a. O. S. 377, Anm. 1.

4) HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Leipzig 1874, S. 95. Vgl. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 1², 1907, S. 143.

zuliebe dem dialektisch begabtesten Volke der Weltgeschichte in diesem einen Punkt Begriffsblindheit andichten.

HANKELS Ausspruch bezieht sich auf den Bericht des GEMINUS¹⁾, wonach „die Alten für jede besondere Form des Dreiecks das Theorem der zwei Rechten speziell bewiesen“. Weder HANKEL noch ein anderer hat diesen zerlegten Beweisgang so zu rekonstruieren vermocht, daß er als Vorstufe des allgemeinen gelten kann. Nun hat HEIBERG²⁾ sehr wahrscheinlich gemacht, daß die ganze Nachricht des GEMINUS nur aus der fälschlich historischen Deutung einer rein logisch gemeinten Zerlegung bei ARISTOTELES³⁾ hervorgegangen ist. Ich glaube, so wie ich werden die meisten Mathematiker diesen stets neue Irrungen gebährenden Irrtum mit Freuden aufgeben, nicht ihn durch Berufung auf das Prinzip der „Setzung spezieller Fälle“, dessen Paradestück er ist, zu konservieren suchen.

Trägt doch auch HULTSCH selbst kein Bedenken, für eine noch ältere Zeit einen fortlaufenden Algorithmus von großer Allgemeinheit zuzulassen. Nach THEON, JAMBlichUS und PROKLUS restauriert er⁴⁾ für die Seiten und Diagonalen aufeinander folgender Quadrate die pythagoreischen Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} s_1, \quad s_2 &= s_1 + d_1, \quad s_3 = s_2 + d_2 \dots \\ d_1, \quad d_2 &= 2s_1 + d_1, \quad d_3 = 2s_2 + d_2 \dots \end{aligned}$$

und für die rational-angenäherten Seiten und Diagonalen die Formeln

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, \quad s_2 = s_1 + \delta_1 = 2, \quad s_3 = s_2 + \delta_2 = 5 \dots \\ \delta_1 &= 1, \quad \delta_2 = 2s_1 + \delta_1 = 3, \quad \delta_3 = 2s_2 + \delta_2 = 7 \dots \end{aligned}$$

Zwar bleiben die genannten Autoren bei den Zahlen $s_4 = 12$, $\delta_4 = 17$ stehen; aber die endlose Fortsetzbarkeit des Prozesses liegt klar zutage. PROKLUS weist darauf hin⁵⁾ mit den Worten *καὶ ἀεὶ οὕτως* „und so weiter“.

Läßt man diese fortlaufenden Diagonal-Konstruktionen, die sich auf nicht ganz einfache geometrische Voraussetzungen stützen, aber doch gut bezeugt sind, für die vorplatonische Zeit zu, so kann die Vorstellung gar kein Bedenken erregen, daß THEODOR zu PLATOS Zeit die Quadratwurzeln in der angegebenen Weise fortlaufend, allein aus dem längst bekannten Pythagoreischen Lehrsatz konstruiert habe. Ich behaupte aber nicht,

1) Bei EUTOKIUS in APOLLONIUS, *Quae graece exstant*, ed. HEIBERG II, S. 170.

2) *Mathematisches zu ARISTOTELES*; Abhandl. zur Geschichte der mathem. Wissensch. 18, 1904, S. 20. 3) *Analytica posteriora* A 5. 74 a 25.

4) HULTSCH, *Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen*; Biblioth. Mathem. 1, 1900, S. 8—12. Ebenda die Literatur.

5) PROKLUS, In *PLATONIS Remp. comment.* ed. KROLL 2, 1901, S. 29, 4. Vgl. THEON, *Expos. rer. math.* ed. HILLER, 1878, S. 44, 12—45, 8. JAMBlichUS, In *Nicom. arithm.* ed. PISTELLI, 1894, S. 92, 19—93, 7.

daß THEODOR nach der Kettenkonstruktion verfahren sein muß; ich vertrete nur gegen HULTSCH, daß er sie benutzt haben kann.

Das letzte und stärkste Argument gegen die willkürliche Beschränkung der Konstruktionsmöglichkeiten ist dem Dialoge *Hippias major* zu entnehmen. Dasselbst (303B—C) spricht SOKRATES: ἀρτίων ὄντων τινῶν ἀμφοτέρων τάχα μὲν ἐκάτερα περὶτὰ εἶναι, τάχα δ' ἄρτια, καὶ αὐτὰ ἀρρήτων ἐκατέρων ὄντων τάχα μὲν ζητὰ τὰ συναμφότερα εἶναι, τάχα δ' ἄρρητα „Wenn die aus zwei Zahlen zusammengefügte Zahl gerade ist, so können die Teile sowohl ungerade wie gerade sein, und andererseits, wenn die beiden Einzelgrößen irrational sind, so können sie zusammengefügt bald eine rationale, bald eine irrationale Größe liefern“.

Die Zusammenfügung der beiden Zahlen ist, wie auch aus dem ganzen Zusammenhang hervorgeht, Addition. Die Zusammenfügung der beiden irrationalen Größen, natürlich sind Linien vorgestellt, kann nicht reine Addition sein, denn zwei einfache irrationale Linien, z. B. $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$, geben addiert niemals eine rationale, sondern stets wieder eine irrationale Linie.¹⁾ Linien aber, welche nach unserer Terminologie irrational sind und doch eine rationale Summe ergeben, z. B. $3 + \sqrt{2}$ und $3 - \sqrt{2}$, gehören nach der griechischen Begriffsbildung zu den höheren Irrationalitäten²⁾ und sind in einem populären Beispiel, wie es hier vorliegt, unmöglich. Nur andeuten kann ich an dieser Stelle: die Termini *ζητόν* und *ἄρρητον* selbst beweisen, daß zur Abfassungszeit des *Hippias major*, mag er nun unecht sein, wie man früher annahm, oder echt PLATONISCH, wozu man jetzt neigt, jene höheren Irrationalitäten, später als *ἄλογα* bezeichnet, noch außerhalb des Gesichtskreises lagen.³⁾

Daß die beiden Irrationalitäten nicht rein additiv zusammengefaßt werden, deutet auch der Ausdruck *συναμφότερα* an. Während im ganzen Bereich der Stelle (von 299C bis 303D) als Gegensatz von *ἐκάτερος*, *ἕτερος*, *οὐδέτερος* zur Bezeichnung der Addition allein das einfache *ἀμφότερα* im ganzen 54mal gebraucht wird, tritt einzig und allein für die Zusammenfassung der Irrationalitäten der Ausdruck *συναμφότερα* ein. Der einzigen Variation des Ausdruckes entspricht gewiß eine Variation des Sinnes.

Bedeutet *συναμφότερα* aber nicht eine reine Addition, so kann der Sinn nur aus der Figur und der Zusammenfügung entnommen werden, welche für die Bildung des Begriffs der irrationalen Linien die bestimmende ist, nämlich aus der Figur des rechtwinkligen Dreiecks und der Zusammenfügung nicht der Katheten selbst, sondern ihrer Quadrate zum Quadrat

1) EUKLID, Elemente X, 16, 36.

2) EUKLID, Elemente X, 36, 73.

3) Siehe unten S. 149—150.

der Hypotenuse gemäß dem Pythagoreischen Lehrsatz.¹⁾ Zwei irrationale Katheten können eine irrationale Hypotenuse liefern, z. B.

$$(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2, \quad (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2,$$

oder auch eine rationale, z. B.

$$(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3})^2 = 3^2, \quad (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{11})^2 = 4^2.$$

Sonach werden in einer Schrift, die, mag sie nun unecht oder echt PLATONISCH sein, nach ihrer Terminologie bestimmt der Jugendzeit des Irrationalen angehört, gerade die Konstruktionen bezeugt, die HULTSCH kategorisch ablehnt mit den Worten²⁾: „es steht aber wohl außer Zweifel, daß THEODOR keine Konstruktion zugelassen hat, bei welcher nicht wenigstens eine Seite rational und ein Vielfaches der Längeneinheit war. Die Versuche, $\sqrt{6}$ als Hypotenuse zu den Katheten $\sqrt{3}$ und $\sqrt{3}$, und ähnlich $\sqrt{12}$ und $\sqrt{14}$ darzustellen, sind von vornherein abzuweisen“.

Mein erstes Resultat ist also: THEODOR von Kyrene hat die Längen der irrationalen Quadratwurzeln von $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$ mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks konstruiert. Es standen ihm dazu alle Konstruktionsmöglichkeiten zur Verfügung, die wir kennen, und die es überhaupt gibt.

β) Der Beweis. Die zweite Leistung THEODORS mußte der durch das Wort *ἀνοπαλῶν* angedeutete Nachweis sein, daß die Seiten der konstruierten Quadrate mit der Längeneinheit kein gemeinschaftliches Maß haben, also irrational sind.

Da PLATO diesen Beweisgang nicht überliefert, ja nicht einmal angedeutet hat, so gilt es, ein im Bereiche der alten griechischen Mathematik liegendes Verfahren durch Analogie zu erschließen. Nun deutet ARISTOTELES an zwei Stellen³⁾ für die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale mit der Seite, also für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ folgenden indirekten Beweis an: *ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιτὰ ἴσα τοῖς ἀρτοῖς*

1) Man könnte bei dem *συναμφότερα* auch an die Bildung der Rechtecksfläche aus ihren Seiten denken z. B. a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ irrational, b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$ rational, c) $(3 + \sqrt{2}) \cdot (3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$ rational. Dagegen aber spricht erstens, daß es sich in der ganzen HIPPIASstelle um additive Zusammenfügung handelt; zweitens, daß die Flächenauswertung des Rechtecks für alle Seitenwerte nur durch eine eingehende Theorie des Irrationalen zu leisten ist. Fall a) und b) werden durch EUKLID X, 25, Fall c) durch X, 114 erledigt. X, 114 ist nach HEIBERG (Bd. V p. LXXXV) sogar als nacheuklidisch, wahrscheinlich als Einschub aus APOLLONIUS anzusehen.

2) a. a. O. S. 381.

3) *Analyt. prior.* I 23, 41a 26—31 und 47. 50a 37. Derselbe Beweis ist in 2 Formen ausführlich wiedergegeben EUKLID X (von HEIBERG in „Appendix 27“ verwiesen).

συμμέτρου τεθείσης „Die Diagonale ist inkommensurabel mit der Quadratseite, weil andernfalls eine ungerade Zahl gleich einer geraden (oder: zugleich gerade) sein müßte“.

„Verhalten sich nämlich Diagonale und Seite wie zwei ganze zu einander prime Zahlen $p:q$, so muß $p^2 = 2q^2$, folglich p^2 und somit auch p eine gerade Zahl sein; dann aber ist q jedenfalls keine gerade Zahl, weil sie sonst mit p den gemeinschaftlichen Teiler 2 hätte. Da nun p gerade ist, so kann $p = 2r$ gesetzt werden, also ist $2r^2 = q^2$, also q^2 und somit auch q eine gerade Zahl, was dem zuvor Bewiesenen widerspricht.“¹⁾

Diesem Beweise lassen sich die Beweise für die Irrationalität von $\sqrt{3}$ usw. wörtlich nachbilden: Sei ein Quadrat das Dreifache eines anderen, und verhalten sich die Seiten wie die teilerfremden Zahlen $p:q$, so muß $p^2 = 3q^2$ sein, folglich muß p^2 und somit auch p den Teiler 3 enthalten; also q darf nach Annahme diesen Teiler nicht enthalten. Setzt man $p = 3r$, so ist $3r^2 = q^2$, also muß q^2 und somit auch q doch den Teiler 3 enthalten, was dem Bewiesenen widerspricht.

Dieser Beweis, den schon HANKEL, ZEUTHEN und TANNERY andeuten, erfüllt alle Anforderungen, welche an den Beweisgang THEODORS zu stellen sind: Die Erkenntnis und der Beweis, daß die Quadratdiagonale, also $\sqrt{2}$ irrational ist, ist sicher vorplatonisch²⁾; der Übergang von der Teilbarkeit durch den Faktor 2 auf irgendeinen anderen Faktor 3, 5 usw. liegt ebenfalls vollständig im Bereiche der vorplatonischen Mathematik, welche die Zerlegung der Zahlen in Primfaktoren, gemeinsame Teiler usw. durchaus beherrschte.³⁾

Ferner treffen für diesen Beweisgang die Kennzeichen zu, die PLATO dem jungen THEAETET in den Mund legt: THEODOR gab nicht ein allgemeingültiges Beweisprinzip, sondern schloß an die Einzelkonstruktion jedes Quadrats den Einzelbeweis für die Inkommensurabilität dieser Quadratseite, κατὰ μὲν ἑκάστην προαιρούμενος. Allerdings konnten diese induktiv von Fall zu Fall fortschreitenden Überlegungen wegen ihrer Gleichartigkeit immer kürzer werden. So war es erstens möglich, daß die ganze Folge der 12 Beweise von $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$ sich im Verlaufe einer zu überblickenden und abgeschlossenen Zeit, wir würden sagen in einer Lektion, abwickeln ließ, was der Bericht THEAETETS andeutet. Zweitens ging aus der für alle Quadrate gleichartigen Zeichnung und dem für alle gleichartigen Beweis-

1) Nach HANKEL, a. a. O. S. 95. Vgl. CANTOR, a. a. O. S. 182 und ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Kopenhagen 1896, S. 55. P. TANNERY, *La langue mathématique de PLATON*; Annales de la faculté des lettres de Bordeaux 6, 1884, p. 97. 2) Siehe unten S. 111.

3) HULTSCH, Art. „Arithmetica“; PAULY-WISSOWA, a. a. O. 22, 25. B. ROTHLAUF, *Die Mathematik zu PLATONS Zeiten*, Diss. Jena 1878, S. 32—34.

gang die Überzeugung hervor, daß dieselbe Überlegung sich ohne Ende fortsetzen lasse. *ἐπειδὴ ἅπτεροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο* ist nicht die Entdeckung THEAETETS; es ist der Abschluß, zu dem THEODORS Gedankengang ihn selbst, den großen Mathematiker, geführt haben mußte, und zu dem er jeden Hörer führen wollte. THEODOR konnte bei $\sqrt{17}$ oder an einer beliebigen anderen Stelle aufhören; den Beweis für das Vorhandensein einer endlosen Reihe von Irrationalitäten hatte er durch Induktion erbracht.

Ganz anders denkt sich HULTSCH den Gedankengang THEODORS. Wie schon der Titel seiner Abhandlung sagt, bringt er die Entdeckung und den Nachweis der Irrationalität unter den Gesichtspunkt der Aufsuchung von Näherungswerten. So sieht er als Grundlage des Irrationalitätsbeweises von $\sqrt{2}$ die Tatsache an¹⁾, daß $\sqrt{2} = \sqrt[50]{25} = \frac{1}{5} \sqrt{50}$ ist, für $\sqrt{50}$ aber die Ungleichheit gilt $7\frac{1}{14} > \sqrt{50} > 7$. Ebenso sieht²⁾ er in der *τρίτους δύναμις* THEODORS „die Andeutung, daß er zu seinem Quadrate von 3 bestimmten Flächeneinheiten gewisse Beträge von Längeneinheiten für die Seite finden wollte, zweitens, daß zu diesem Zwecke Ausrechnungen, also arithmetische Operationen angestellt werden sollten, drittens, daß die Flächeneinheit und die Längeneinheit geradeso wie das griechische Fußmaß in Halbe, Viertel, Achtel und Sechzehntel geteilt werden sollten“. In scharfsinniger Weise läßt HULTSCH den THEODOR von der Identität $3 = \frac{48}{16}$ ausgehend zu den Ungleichheiten

$$1\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{16}\frac{1}{32}\frac{1}{64} > \sqrt{3} > 1\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{16}\frac{1}{32}\frac{1}{128}$$

gelangen. „Ob THEODOR diesen Weg betreten hat und vielleicht noch weiter auf demselben fortgeschritten ist, bleibt im ungewissen; jedenfalls bürgt uns das PLATONISCHE *ἀποφαίνων* dafür, daß er zwei Grenzen für $\sqrt{3}$ gesetzt und dann gezeigt hat, wie man diese Grenzen immer enger ziehen könne, ohne jedoch dazwischen je einen rationalen Zahlenwert auffinden zu können, dessen Quadrat = 3 sein würde.³⁾“

Hiergegen ist einzuwenden: erstens, das PLATONISCHE *ἀποφαίνων* sagt lediglich aus, er bewies, gibt aber keine Andeutung über den Gang des Beweises, also auch keinen Hinweis auf die Anwendung von Näherungswerten. Zweitens, die Methode der Näherungswerte verlangt für jede neue Zahl einen neuen Kunstgriff und „in der Form ziemlich umständliche Ausrechnung“; sie hätte von $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$ nicht annähernd in einer oder einigen Stunden erledigt werden können. Endlich und hauptsächlich: hätte THEODOR für $\sqrt{3}$ immer enger werdende Näherungswerte berechnet, so

1) *Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei ARCHIMEDES*, S. 370.

2) Ebenda S. 382.

3) Ebenda S. 384.

hätte dies wohl zu der Vermutung, ja zu der subjektiven Überzeugung führen können, daß $\sqrt{3}$ überhaupt nicht in Brüchen ausdrückbar sei, aber ein Beweis, der es doch sein soll, wäre das nicht gewesen und nie geworden. Solange die beiden Grenzen einen endlichen Abstand hatten, blieb stets der Einwand offen, daß bei weiterem Fortschreiten vielleicht doch noch ein genauer Wert gefunden werden könne; wenn nicht auf dem eingeschlagenen Wege, dann vielleicht auf einem anderen¹⁾ — holt doch auch im ZENONISCHEN Paradoxon Achill die Schildkröte nur dann nicht ein, wenn man seinen Weg in die einzelnen Wegstrecken der voranschleichenden Schildkröte zerlegt. Beweisend würden die Näherungswerte nur dann sein, wenn sie zu einem notwendig unendlichen Prozesse gestaltet würden. Diesen Gedankenweg aber hat nie ein Grieche gemacht²⁾; auch HULTSCH geht nicht so weit, es für möglich zu halten. Im entscheidenden Punkte lenkt er ab: „aber daß dem THEODOR nach dem damaligen Stande des mathematischen Wissens eine ausreichende Begründung, und zwar in letzter Instanz durch apagogischen Beweis, zu Gebote gestanden hat, ist nicht zu bezweifeln“³⁾. Ist aber der Grenzübergang für einen Griechen unmöglich und „der apagogische Beweis die letzte Instanz“, so sind die Näherungswerte für den Beweis der Irrationalität wertlos und nur geeignet, wie HULTSCH selbst auch andere irre zu führen. Der Beweisgang THEODORS dürfte im wesentlichen mit dem übereinstimmen, der oben dem alten apagogischen Beweise für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ nachgebildet wurde.

γ) Das Aufhören mit $\sqrt{17}$. *ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο*. Warum hörte die Beweisführung THEODORS bei $\sqrt{17}$ auf? Diese Frage hat schon den alten Erklärern viel zu schaffen gemacht und recht wunderliche Beantwortungen gefunden. Ein anonymer Kommentator des 2. nachchristlichen Jahrhunderts berichtet als erste Erklärung⁴⁾: Der Ganzton hat das Zahlenverhältnis $\frac{9}{8} = \frac{18}{16}$. Schaltet man zwischen 18 und 16 den Zwischenton 17 ein, so erhält man zwei ungleiche Halbtöne in den Verhältnissen $\frac{18}{17}$ und $\frac{17}{16}$; deshalb soll THEODOR, der Geometer und Musiker

1) Vgl. H. VOGT, *Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt?* Biblioth. Mathem. 7₃, 1906/7, S. 12, 13. Das daselbst über die falsche Beurteilung der indischen „Näherungswerte“ Gesagte gilt auch für die griechischen.

2) Vgl. H. VOGT, *Der Grenzbegriff in der Elementar-Mathematik*; Progr. des Königl. Friedrichs-Gymn. Breslau, 1885, S. 43—48. C. R. WALLNER, *Über die Entstehung des Grenzbegriffs*; Biblioth. Mathem. 4₃, 1903, S. 248—250.

3) a. a. O. S. 384.

4) *Anonymer Kommentar zu PLATONS THEAETET*, bearbeitet von H. DIELS, W. SCHUBART, J. L. HEIBERG; Berliner Klassikertexte II, 1905, Kap. 34, 35—36, 11, p. 23.

zugleich war, bei $\sqrt{17}$ aufgehört haben! Der Schreiber selbst gibt folgende Erklärung¹⁾: Das Quadrat von 16 Flächeninhalten, Seite 4, Umfang 16, bildet den Übergang von den Quadraten, bei denen die Flächenzahl kleiner ist als die Umfangszahl (z. B. Fläche 9, Seite 3, Umfang 12), zu denen, bei welchen die Flächenzahl größer ist als die Umfangszahl (z. B. Fläche 25, Seite 5, Umfang 20). Weil das erste Quadrat der letzten Art die Fläche 17 hat, deshalb soll THEODOR bei $\sqrt{17}$ stehen geblieben sein! Daß einige meinen²⁾, THEODOR sei „zufällig“ (*ὡς ἔτυχεν*) bei $\sqrt{17}$ stehen geblieben, genügt dem Anonymus nicht; denn *πὼς ἐνέσχετο* bedeutet ihm, „er hörte aus irgendeinem Grunde auf“, und dieser Grund muß gesucht werden (*ὥστε αἰτίαν ἐκζητῆσιν τοῦ στήναι*).³⁾ Auf den Gedanken aber, daß THEODOR mit $\sqrt{17}$ aufhörte, weil er nicht weiter konnte, sind die Alten nicht gekommen; diese Auffassung ist eine Entdeckung der Neueren.

HULTSCH sagt⁴⁾: „Hätte er (THEODOR) einen allgemeinen Abschluß seiner Beweisführung gefunden, so würde PLATON hier einen anderen Ausdruck gewählt haben. So aber deutet *ἐνέσχετο* und besonders das beigefügte *πὼς* genugsam an, daß ein rationell mathematischer Grund nicht vorlag, um gerade bis $\sqrt{17}$ und nicht weiter zu gehen.“⁵⁾ Gewiß deutet *πὼς* an, daß in der Natur der Sache kein Grund zum Aufhören lag, oder wenigstens für den Erzähler nicht erkennbar war, daß der Erzähler sich aber doch die Frage nach dem Grunde vorlegt und ihn in persönlichen, nicht weiter aufzulösenden Umständen findet. Aber HULTSCH erkennt diesen Grund in der Umständlichkeit und Unabgeschlossenheit der Untersuchung: „Es war ein mühsamer und langwieriger Weg gewesen.“ „Also wurde schon hier, nicht allzufern vom Ausgangspunkte, Halt gemacht.“ „Wäre er auf derselben Bahn noch weiter fortgeschritten, so würde die Wahrscheinlichkeit, daß überhaupt die Wurzeln aus ganzen, nicht quadratischen Zahlen irrational sind, nicht wesentlich erhöht worden sein.“ Also nach HULTSCH hat THEODOR Einzelfälle, nicht die Gesetzmäßigkeit der Inkommensurabilität aufgedeckt; die Entdeckung der Irrationalität als einer allgemeinen Tatsache ist nicht sein Eigentum.

Bei seiner Auffassung von THEODORS Beweisverfahren als einer Aufsuchung von Näherungswerten mußte HULTSCH das *πὼς* in dieser Weise deuten. Hat aber THEODOR das oben dargelegte Verfahren besessen, welches ohne spezielle Kunstgriffe ein beliebiges Fortschreiten ermöglichte und nach

1) Kap. 35, 17—36, 35, p. 23—24.

2) Kap. 35, 13—35, 17, p. 23.

3) Kap. 35, 17—35, 21.

4) a. a. O. S. 378.

5) *πὼς* zu *ἐν δὲ ταύτῃ* zu ziehen, also „bei dieser etwa blieb er stehen“, ist unzulässig wegen der vorhergehenden nicht eingeschränkten *μέχρι τῆς ἑπτακαίδεκάποδος*.

einigen Schritten die vorhandene Gesetzmäßigkeit erkennbar machte, „hatten sich die Quadrate als unbegrenzt an Zahl gezeigt“ (*ἔπειροι τὸ πλῆθος αἰ δυνάμεις ἐφαίνοντο*), so konnte THEODOR an jeder beliebigen Stelle aufhören. Nicht, weil das Weitergehen doch kein allgemeines Gesetz enthüllt hätte, sondern weil das allgemeine Gesetz schon enthüllt war; weil er doch einmal aufhören mußte; also zufällig hörte er bei $\sqrt{17}$ auf. Damit weist PLATO dem THEODOR das Verdienst zu, das Umkehrproblem der Quadrierung allgemein gestellt und durch den Begriff der inkommensurablen Linien allgemein gelöst zu haben.

Unter den Mathematikern und Geschichtschreibern der Mathematik¹⁾ dürfte HANKEL der einzige sein, auf dessen Gemeinschaft ich mich mit meiner Erklärung des *πὼς ἐνέσχετο* berufen kann: „Die Stelle PLATONS . . ., die jedoch die Auslegung nicht gestattet, daß dem Lehrer des THEAETET, dem Pythagoriker THEODOROS aus Kyrene jenes allgemeine Theorem unbekannt gewesen sei.“²⁾ Alle anderen aber, welche auf diese Frage eingehen, BRETSCHNEIDER, CANTOR, HULTSCH, GUNTHER, JUNGE, TANNERY, ALLMAN, LORIA, berichten einstimmig „daß THEODOR die Irrationalität der Quadratwurzeln von $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$ bewiesen hat“. Daß er bei $\sqrt{17}$ zufällig stehen geblieben ist, beachten sie nicht und pflanzen so durch die formell richtigen Worte den sachlichen Irrtum fort, daß nicht THEODOR selbst, sondern erst THEAETET die allgemeine Irrationalität entdeckt habe.

Zwei Wörtchen haben bisher die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen verwirrt. Das eine ist das unglückselige *ἄλογον* bei PROKLUS³⁾, das andere das nicht beachtete oder falsch gedeutete *πὼς* im Bericht THEAETETS. Wegen des *ἄλογον* ist die Entdeckung des Irrationalen dem PYTHAGORAS zugeschrieben, also etwa 100 Jahre zu zeitig angesetzt worden; wegen des übersehenen *πὼς* ist die durch THEODOR vollzogene Entdeckung nicht erkannt worden. Jenes Zufrüh und dieses Zuspät haben sich wie zwei Mauern vor die Wahrheit geschoben.

δ) Der Ausschluß von $\sqrt{2}$. Nicht weniger wichtig und ergebnisreich als die Untersuchung des Endes von THEODORS Lehrvortrag ist die Frage nach dem Anfang! Warum hat THEODOR seinen Beweis mit dem Quadrat von drei Flächeneinheiten, nicht mit dem von zwei begonnen?

1) Die philologischen Übersetzer und Erklärer umgehen die Schwierigkeit durch unbestimmte Ausdrücke wie „in ea tandem constitit“. Nur H. MÜLLER, *PLATONS sämtliche Werke*, Bd. 3, S. 109 (Leipzig 1862) übersetzt richtig „bei diesem blieb er zufällig stehen“; und M. WOHLRAB (Leipzig 1869) S. 63 erklärt: *πὼς* significat non consilio, sed casu THEODORUM in quadrato septem et decem pedum substituisse, ita ut hoc non premendum sit.

2) a. a. O. S. 103 Anm. 2.

3) Kommentar zu EUKLID, ed. FRIEDLEIN 65, 19.

Die von dem alten Kommentator überlieferte Antwort heißt¹⁾: „PLATO übergang die zwei, weil er im *MENON* gezeigt hatte, daß das Quadrat der Diagonale das Doppelte von dem der Seite ist.“ Diese Antwort ist unzureichend, weil PLATO im *MENON* 82B—85C nur eben diese Tatsache beweist, die dem *γράφειν* THEODORS entspricht, aber in keiner Weise auf die Inkommensurabilität eingeht und dem Zusammenhange nach eingehen kann. Es fehlt der zweite wesentliche Teil, das *ἀποφαίνειν*. Mit der Erklärung „vielleicht wußte er (THEODOR) mit $\sqrt{2}$ noch nichts anzufangen“²⁾, dürfte S. GÜNTHER allein stehen.

Die befriedigende Antwort hat CANTOR gegeben³⁾: „Von der Irrationalität der Quadratwurzel aus 2 ist dabei keine Rede; diese muß also vorher bekannt gewesen sein.“ Durch diese Erklärung wird die Entdeckung THEODORS an die gewisser Vorgänger angeknüpft; um so mehr wird es auch berechtigt sein, seinen Beweisgang, wie ich getan habe, an den alten für $\sqrt{2}$ überlieferten anzuknüpfen.

Hätte PLATO den THEODOR die Theorie des Irrationalen rein methodisch begründen lassen wollen, so hätte er unbedingt mit der Quadratdiagonale und $\sqrt{2}$ beginnen müssen. Denn wollte er jede Zahl *κατὰ μίαν ἐκάστην* durchgehen, so mußte er mit der ersten beginnen, welche eine irrationale Wurzel hat. Daß diese schon bekannt und die zugehörige Figur, wie der *MENON* zeigt, geradezu populär war, war ein didaktischer und methodischer Grund, an sie anzuknüpfen, aber nicht, sie zu übergehen. Übergang PLATO sie dennoch, so mußte ein anderer Gesichtspunkt als der rein methodische ihn leiten; dies kann kein anderer gewesen sein als der historische: PLATO wollte den THEODOR nur seine eigene Entdeckung aussprechen lassen, nicht das, was er von seinen Vorgängern überkommen hatte. Ist PLATOS Darstellung für THEODOR und seine Vorgänger nach dem historischen Gesichtspunkt orientiert, so dürfen wir schließen, daß er ihn auch für THEODOR und seine Nachfolger festgehalten hat, daß wir also auch für die Abgrenzung der Leistungen von THEODOR und THEAETET gegeneinander unsere PLATOSTELLE als historische Quelle ansehen dürfen.

B. Die Leistung THEAETETS.

α) Die Situation. Um THEAETETS Anteil an der Entdeckung des Irrationalen zu erkennen, ist es nötig, zunächst die Situation klar zu stellen, in der PLATO ihn seinen Bericht ablegen läßt. Durch *καὶ αὐτοῖς ἡμῖν ἐναγχος εἰσῆλθε διαλεγόμενοις, ἐμολ τε καὶ τῷ σὺ δμωνύμῳ τούτῳ Σωκράτει*

1) a. a. O. Kap. 28, 37—29, 1. p. 20.

2) S. GÜNTHER, *Geschichte der Mathematik* I, Leipzig 1908, S. 60.

3) a. a. O. I¹, Leipzig 1880, S. 154; I², 1907, S. 182.

kennzeichnet PLATO ein Gespräch, welches THEAETET und der junge SOKRATES nach der Mathematikstunde THEODORS, der in dieser Stunde empfangenen Anregung nachgehend, miteinander geführt haben, nicht einen Vorgang in der Lehrstunde selbst.

Von THEODORS Verkehr mit den jungen Leuten werden die allgemeinen Ausdrücke *συγγίνεσθαι*, *έντυγχάνειν*, *πλησιάζειν*, niemals *διαλέγεσθαι* gebraucht, von seiner Lehrart die speziellen *γράφειν*, *άποφαίνειν*; die jungen Leute *μανθάνουσιν*: er ist ihr Lehrer, sie sind seine Schüler. Er unterrichtet als Berufslehrer wie sein Lehrer PROTAGORAS; „on ne peut guère douter qu' HIPPOCRATE de Chios et THÉODORE de Cyrène n'aient tiré de l'argent de leur enseignement; c'est l'âge des sophistes, et les géomètres imitent les autres professeurs.“¹⁾ Also er hält nicht dialektische Zwiesprache wie SOKRATES; erklärt er sich doch selbst ungewohnt dieser Lehrweise und zu alt, sie sich anzueignen (146 B *έγω μέν γάρ άήθης τής τοιαύτης διαλέκτου, και ούδ' αύ συνεθίζεσθαι ήλικίαν έχω*). Auch dürfen wir uns die den hochberühmten Mathematiker umgebende Schülerzahl nicht gering denken (143 D *σοι δή ούκ όλλγιστοι πλησιάζουσι, και δικαίως*, 144 A *και πάνν πολλοίς πεπλησίακα*); hier aber finden wir zwei seiner Schüler im vertraulichen Gedankenaustausch.

Auch die Tempora *έγραψε*, *άποφαίνων*, *προαιρούμενος*, *έφαινοντο* weisen darauf hin, daß THEODORS Lehrvortrag der Unterhaltung der beiden strebsamen Schüler als beendeter Vortrag zugrunde lag; nur der Abschluß von THEODORS Beweisgang ist im Aorist ausgedrückt (*ένέσχετο*). Um dieses Zeit- und Kausalverhältnis hervorzuheben, habe ich in der deutschen Übersetzung THEODORS Tätigkeit durch das Plusquamperfektum wiedergegeben.²⁾

Also das Gespräch der beiden jungen Leute hatte nicht unter der Leitung, ja nicht einmal unter den Augen THEODORS stattgefunden; es stellte eine durchaus selbständige Leistung THEAETETS dar. Daß THEAETET die entwickelten Gedanken in der Wiedergabe mit dem jungen SOKRATES teilt, ist nur Höflichkeitsform; gibt sich doch das Lob, welches SOKRATES 148 B der Form nach beiden spendet, als Bestätigung der von THEODOR (144 A, B, 145 B, C) nur über THEAETET, nicht über den jungen SOKRATES geäußerten guten Meinung.

Da THEAETET sich der Definition des Begriffs „Erkenntnis“ nicht gewachsen fühlt (148 B *ό γε έρωτάς περί έπιστήμης, ούκ άν δυναίμην*

1) P. TANNERY, *La géométrie grecque*, Paris 1886, p. 88. Das ist wohl möglich: aber ich glaube nicht, daß THEODOR wie die Sophisten die Städte Griechenlands lehrend bereist hat. Siehe unten S. 126, 141.

2) Vgl. I. M. STAHL, *Syntax des griechischen Verbums*, Heidelberg 1907, S. 106, 107, 140. KÜHNER-GERTH, *Ausführl. Grammatik der griechischen Sprache*, 1898, II¹, S. 145, 169.

ἀποκρίνασθαι, ὥσπερ περὶ τοῦ μήκους καὶ τῆς δυνάμεως), will er wenigstens zeigen, daß er SOKRATES' Forderung verstanden hat, und gibt selbständig ein Beispiel einer exakten Begriffsbestimmung: er definiert die Arten *μήκος* und *δύναμις* des Gattungsbegriffs *γραμμή* durch die ihren Quadraten anhaftenden Kennzeichen.

β) Definition der Quadratwurzel. Das verschiedenartige Verhalten der Quadrate, und zwar ohne Abgrenzung, hat er von THEODOR gelernt. Um für diese Verschiedenheit ein charakteristisches Wort zu finden, geht er auf Zahlen über. Unter den Zahlen gibt es solche, welche aus gleichen Faktoren, und solche, welche aus ungleichen Faktoren zusammengesetzt sind, gerade wie Quadrate aus gleichen, Rechtecke aus ungleichen Seiten. Wegen dieser Analogie bezeichnet er die einen als Quadrat-zahlen (*τετράγωνα, ἰσόπλευρα*), die anderen als Rechteckzahlen (*προμήκη, ἑτερομήκη*).

Dieser erste Schritt, sowohl die Verknüpfung der Zahlen mit den Figuren, wie die Teilung der Zahlen in Quadrat- und Rechteckzahlen, ist keineswegs eine persönliche Leistung THEAETETS; sie ist von den Pythagoreern erfunden worden und ist Gemeingut der damaligen Zahlenlehre gewesen.¹⁾ Auch SOKRATES' Antworten *καὶ εὖ γε* „schön“ und *κάλλιστα* „recht schön“ geben zu verstehen, daß diese Zahlenteilung und Benennung zwar richtig, aber nicht neu ist; und *ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο* fragt direkt: „welches ist der Zweck dieser Vorbereitungen?“ Erst auf die Antwort, die THEAETET jetzt gibt, bestätigt SOKRATES ohne Rückhalt das rühmende Urteil THEODORS.

Diese Antwort nun enthält die versprochene Namengebung und damit die begriffliche Scheidung der mit der Einheit kommensurabeln und der inkommensurabeln Linien durch die Eigenschaften der über ihnen errichteten Quadrate. Daß THEAETET dieses Beispiel einer von SOKRATES geforderten Begriffsbildung vollbringt, ist eine logische Leistung, aber, nachdem THEODOR das wesentlich verschiedene Verhalten der Quadrate von 4, 9, 16, ... Flächeneinheiten gegenüber denen von 3, 5, 6, ... Flächeneinheiten dargelegt hatte, keine mathematische Entdeckung. Der wirkliche Fortschritt THEAETETS liegt nicht darin, daß er je die rationalen und die irrationalen Linien sprachlich und begrifflich *εἰς ἓν συνέλαβεν*, sondern wie er es tat, nämlich durch die Bezeichnungen *μήκος* und *δύναμις*.

Es muß zunächst festgestellt werden, daß diese Namengebung dem terminologischen Gebrauche nur teilweise entspricht. Wohl bedeutet

1) CANTOR, a. a. O. I¹, 1880, S. 135, 138—139; I², 1907, S. 159—160, 163. *EUCLIDIS Opera*, ed. J. L. HEIBERG V, 1888, prolegomena p. LXXXIX. HULTSCH, Art. „Arithmetica“ cap. 21; PAULY-WISSOWA, a. a. O. p. 1089—1090. Ich halte mit TANNERY und JUNGE (a. a. O. S. 21 Anm. 2) gegen ALLMAN (a. a. O. S. 210 Anm.) an dieser Stelle *προμήκης* und *ἑτερομήκης* für synonym.

$\mu\eta\kappa\omicron\varsigma$ eine meßbare Strecke; aber $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ hat nie im Griechischen einen Sinn gehabt, der auf eine Linie anwendbar wäre. $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ ist die Fläche, welche von der Linie gefaßt wird, ihre Potenz, ihr Quadrat. TANNERY hat diesen Widerspruch bemerkt¹⁾; er sucht ihn dadurch zu heben, daß er fünfmal das Wort $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ (Potenz) durch $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{\epsilon}\nu\eta$ (Wurzel) ersetzt und dieses $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{\epsilon}\nu\eta$ selbst in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht. Diesem allzu kühnen Vorgehen gegen handschriftlich gesicherte und sich wiederholende Ausdrücke hat sich wohl niemand angeschlossen, obgleich TANNERY meinte: „il me semble que la correction que j'indique doit s'imposer d'elle-même“.

Die Worte $\mu\eta\kappa\omicron\varsigma$ und $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ sind erklärbar als Anklang und zugleich als Abwandlung der später in der griechischen Geometrie üblichen Bezeichnungen $\gamma\rho\alpha\mu\mu\alpha\iota$ $\mu\acute{\eta}\kappa\epsilon\iota$ $\phi\eta\tau\alpha\iota$ für rationale Linien, $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota$ $\mu\acute{o}\nu\omicron\nu$ $\phi\eta\tau\alpha\iota$ für Quadratwurzeln. Spielt PLATO doch selbst auf diese Termini an durch die Worte: $\acute{\omega}\varsigma$ $\mu\acute{\eta}\kappa\epsilon\iota$ $\mu\acute{\epsilon}\nu$ $\omicron\upsilon$ $\xi\upsilon\mu\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\omicron\upsilon\varsigma$ $\acute{\epsilon}\kappa\epsilon\lambda\upsilon\alpha\iota\varsigma$, $\tau\omicron\iota\varsigma$ δ' $\acute{\epsilon}\pi\iota\kappa\acute{\epsilon}\delta\omicron\iota\varsigma$ $\grave{\alpha}$ $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\upsilon\tau\alpha\iota$. Gar keine Bedenken hat die Kürzung von $\mu\acute{\eta}\kappa\epsilon\iota$ $\phi\eta\tau\acute{o}\nu$ in $\mu\eta\kappa\omicron\varsigma$; kürzt PLATO aber in Analogie hiermit $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota$ $\phi\eta\tau\acute{o}\nu$ in $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$, so entfernt er sich von dem technischen Sprachgebrauch. Er geht damit auf die ursprüngliche, nicht technische Bedeutung des Wortes zurück, indem er $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ aktivisch gebraucht in lebendigem Zusammenhange mit dem Verbum $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\sigma\theta\alpha\iota$ = können, vermögen: $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ als „Kraft, potentia im allgemeinen Sinne“ wäre die Linie, welche aus sich heraus die Fläche erzeugt: $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\alpha\iota$ $\tau\acute{o}$ $\acute{\epsilon}\pi\iota\kappa\epsilon\delta\omicron\nu$. Ebenso vermeidet PLATO $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ im passivischen Sinne im Staat VIII 546B, indem er es in der Gegenüberstellung $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\upsilon\alpha\iota$ $\tau\epsilon$ $\kappa\alpha\iota$ $\delta\upsilon\nu\alpha\sigma\tau\epsilon\upsilon\acute{o}\mu\epsilon\upsilon\alpha\iota$ durch ein echtes Passivum ersetzt.

Haben wir oben festgestellt²⁾, daß PLATO in der THEAETETStelle nicht methodisch, sondern historisch vorgeht, so müssen wir den Gebrauch der Worte $\mu\eta\kappa\omicron\varsigma$ und $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ in THEAETETS Munde als Zeugnis ansehen, daß PLATO die wissenschaftliche Leistung dieser Klassifikation, welche in der griechischen Literatur hier zuerst erscheint, dem THEAETET zuschreibt.³⁾

Der 9. Lehrsatz des 10. Buches von EUKLIDS Elementen enthält die entscheidende Charakterisierung der irrationalen Linien durch die Natur der über ihnen errichteten Quadrate: $\kappa\alpha\iota$ $\tau\acute{\alpha}$ $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\alpha$ $\tau\acute{\alpha}$ $\pi\rho\acute{o}\varsigma$ $\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\alpha$ $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\nu$ $\mu\grave{\eta}$ $\acute{\epsilon}\chi\omicron\upsilon\tau\alpha$, $\delta\upsilon$ $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\omicron\varsigma$ $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ $\pi\rho\acute{o}\varsigma$ $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\omicron\nu$ $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\nu$, $\omicron\upsilon\delta\acute{\epsilon}$ $\tau\acute{\alpha}\varsigma$ $\pi\lambda\epsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma$ $\acute{\epsilon}\xi\epsilon\iota$ $\mu\acute{\eta}\kappa\epsilon\iota$ $\sigma\upsilon\mu\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\omicron\upsilon\varsigma$ „Und Quadrate, welche sich nicht wie

1) a. a. O. p. 100 und *La langue mathématique de PLATON* in *Annales de la faculté des lettres de Bordeaux* 6, 1884, p. 95, 96.

2) Siehe oben S. 111.

3) Als „Klassifikation der irrationalen Größen“ wird THEAETETS Leistung auch bezeichnet durch ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik*, 1896, S. 56, 57.

Quadratzahlen zueinander verhalten, haben die Seiten an Länge inkommensurabel“. Wenn nun ein Scholiast¹⁾ diesen 9. Lehrsatz mit den Worten τὸ θεώρημα τοῦτο Θεαιτήτειόν ἐστιν εὕρημα, καὶ μέμνηται αὐτοῦ ὁ Πλάτων ἐν Θεαιτήτῳ „Dieser Lehrsatz ist eine Entdeckung THEAETETS; PLATO erwähnt ihn im THEAETET“ dem THEAETET zuweist und sich auf den Dialog beruft, so bezeugt er damit nicht ein tieferes Wissen oder den Besitz einer anderen Quelle, sondern nur, daß er wie bisher alle Forscher außer HANKEL und ZEUTHEN PLATOS Worte falsch gedeutet hat. Das Wesentliche im 9. Lehrsatz, die Entdeckung des allgemeinen Irrationalen, ist Eigentum THEODORS, nicht THEAETETS. Gegen die aus der Analyse PLATOS hergeleitete Scheidung der Leistungen ist die Deutung des Scholiasten ohne Gewicht.

γ) Die Würfelkanten. THEAETET fährt fort: καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον, „bezüglich der Raumgrößen fiel uns eine entsprechende, sachgemäß abgeänderte Definition ein“. Ist es im Sinne der griechischen Geometrie möglich, die von Quadraten hergenommene Teilung in μῆκη und δυνάμεις auf Würfel zu übertragen?

So wie vor THEODOR und durch THEODOR die Beweise geliefert waren, daß die Gleichungen $p^2 = 2q^2$, $p^3 = 3q^3 \dots$ nicht durch ganze Zahlen lösbar sind, so konnte THEAETET durch schrittweise Übertragung des Gedankenganges folgern, daß ebenso $p^3 = 2q^3$, $p^3 = 3q^3 \dots$ durch ganze Zahlen unlösbar sind; aber den Nachweis, den THEODOR durch sein γράφειν geliefert hatte, daß nämlich derartige Größen, obwohl sie als Zahlen nicht existieren, doch als Linien, nämlich als Seiten von geometrisch konstruierten Quadraten, reale Existenz haben, den konnte weder THEODOR noch THEAETET für diese Größen, die wir als $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3} \dots$ bezeichnen, erbringen. Denn sie konnten Würfel von 2, 3 ... Kubikfuß mit den Werkzeugen, die hier allein in Frage kommen, mit Lineal und Zirkel, nicht herstellen. Wir wissen, daß selbst der einfachste Fall dieser Aufgabe, die Verdoppelung des Würfels, welche als Delisches Problem die Geometer zu PLATOS Zeit aufs lebhafteste beschäftigte, mit Lineal und Zirkel nicht lösbar ist, für PLATO und seine Zeitgenossen war sie nur ungelöst.²⁾ Wohl haben sie die Theorie der Kubikzahlen ausgebildet³⁾ und diese Zahlen, wie der Name sagt, geometrisch gedeutet, aber solange ein Würfel von 2, 3 ... Kubikfuß geo-

1) *EUCLIDIS Opera*, ed. HEIBERG V, p. 450.

2) In diesem notwendigen Mißverständnis finde ich die Erklärung des Tadel, den PLATO wegen der mangelnden Pflege der Stereometrie im Staat VII, 528 C ausspricht, obwohl Männer wie HIPPOKRATES und DEMOKRIT schon damals sehr ansehnliche stereometrische Leistungen aufzuweisen hatten.

3) CANTOR a. a. O. I⁸, S. 163—164. HULTSCH, Art. „Arithmetica“ cap. 21; PAULY-WISSOWA, a. a. O. p. 1090.

metrisch nicht existierte, konnte die umgekehrte Frage: welche Eigenschaften haben die Maßzahlen der Kanten dieser Würfel? im Ernst gar nicht gestellt werden.

Bevor EUKLID in der dritten Definition des zehnten Buches die Begriffe *μήκει* und *δυνάμει ζητόν* definiert, stellt er durch Hinweis auf einen zu liefernden Beweis (Satz 10) sicher, daß „derartige Gerade in unbeschränkter Anzahl existieren“ (*ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἅπαιροι σύμμετροι τε καὶ ἀσύμμετροι*). Er erfüllt damit dieselbe unabweisbare Forderung, die THEODOR durch seine Konstruktionen befriedigt hatte. Weil aber THEAETET diese Forderung für die Würfel nicht erfüllen konnte, deshalb bleibt nur übrig anzunehmen, daß PLATO ihn mit seinem *ἄλλο τοιοῦτον* nicht eine mathematische Entdeckung, sondern eine Vermutung aussprechen läßt, bei der er die Gleichartigkeit, das *τοιοῦτον*, gegenüber der wesentlichen Verschiedenheit, dem *ἄλλο*, stark überschätzt.

Wir sind nicht berechtigt, aus THEAETETS Worten herauszulesen¹⁾, daß er seiner Zeit vorausseilend eine besondere Kenntnis des Kubisch-Irrationalen besessen habe, von der sich durch Zufall oder absichtliche Beschränkung in der späteren griechischen Mathematik nicht eine Spur findet. Die quadratischen Irrationalen, die Lösungen der quadratischen und biquadratischen Gleichungen, haben bei den griechischen Geometern die eingehendste Behandlung gefunden, weil sie, als Zahlen unfäßbar, doch geometrische Realitäten waren. Eben deswegen gehören die irrationalen Größen in der griechischen Mathematik nicht der Arithmetik, sondern der Geometrie an. M. SIMON irrt, wenn er diesen fundamentalen Unterschied leugnet²⁾; er irrt mit der Behauptung „Die Großtat der Griechen bestand eben darin, daß sie an die Existenz der Wurzel glaubten.“³⁾ Im Gegenteil: die Griechen haben nur die Wurzeln behandelt, an die sie nicht zu glauben brauchten, sondern deren Existenz sie durch Konstruktion beweisen konnten. Die Kubikwurzeln, die nach unserer algebraischen Betrachtungsweise mit den Quadratwurzeln völlig gleichberechtigt sind, gehörten nicht in die exakte griechische Mathematik⁴⁾, weil man an sie hätte glauben müssen: sie sind weder Zahlen, noch sind sie konstruierbar; sie haben nur negative Kennzeichen. Erst recht halte ich für ausgeschlossen, daß zu den *ἄτακτοι ἄλογοι* des APOLLONIUS, wie WOEPCKE vermutet hat,

1) Wie ROTHLAUF, a. a. O. S. 26 und RITTER, *Kommentar zu PLATOS Gesetzen*, 1896, S. 225. CANTOR a. a. O. I², S. 236 hält diese Deutung nicht für wahrscheinlich, aber doch nicht für unmöglich.

2) *Über Mathematik*, Gießen 1908, S. 19.

3) *Didaktik und Methodik*, 2. Aufl., München 1908, S. 94.

4) Vgl. CANTOR, a. a. O. S. 271, 272.

allgemeine Wurzeln von der Form $\sqrt[n]{a^m \cdot b^n - m}$ gehört haben.¹⁾ Auf diese würde nicht passen, was seine Quelle ausdrücklich sagt: „il produisit un très-grand nombre par des méthodes exactes“.

Warum, so müssen wir fragen, hat PLATO die wirkliche mathematische Leistung THEAETETS, durch welche er sich in der griechischen Mathematik ein dauerndes Denkmal gesetzt hat, die Klassifikation der Quadratwurzeln, in kaum verständlicher Weise angedeutet; warum hat er ihn eine Analogie aussprechen lassen, die nicht fest fundiert ist und keine Spur hinterlassen konnte? Die Antwort ergibt sich durch Eingehen auf die Komposition des Dialogs, auf die psychologischen Motive und die künstlerischen Mittel.

Und nicht nur, um diese Einzelfrage zu beantworten, haben wir den Blick auf den Dialog als Ganzes zu richten. Vor allem heischt die auf das Ganze gehende Frage eine Antwort: Welches Recht haben wir, den PLATONISCHEN Dialog als Geschichtsquelle zu werten; welches Recht, anzunehmen, daß PLATO in diesem Dialog Belehrung über die Entwicklung der Lehre vom Irrationalen geben wollte, geben konnte?

§ 2. Der Dialog *THEAETET* als Geschichtsquelle.

A. Die Grundlagen.

a) Die Datierung. Die Untersuchungen über den Sprachgebrauch, über zeitgeschichtliche Anspielungen, über Plan und Inhalt des Dialogs *THEAETET* haben nach langen Kontroversen dazu geführt, daß die neuere PLATOFORSCHUNG diesen Dialog fast einstimmig nicht wie früher den Jugendschriften PLATONS, sondern seiner reifsten Periode, und zwar deren Ende einordnet. „Eine Gruppe bilden wieder, auf der Mittagshöhe von PLATONS Schaffen, Staat, *PHAIDROS* und *THEAITETOS*, dieser schon zur letzten Gruppe (*PARMENIDES*, *Sophistes*, *Politikos*, *PHILEBOS*, *TIMAIOS*, *KRITIAS*, *Gesetze*) überleitend, aber mit dem Staat stimmungsverwandt.“²⁾ Die Abfassung des *THEAETET* wird demnach jetzt ganz allgemein in das Jahrzehnt 370 bis 360 gelegt.³⁾

1) *Essai d'une restitution de travaux perdus d'APOLLONIUS*, in *Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences* 14, Paris 1856, S. 695, 714, 693.

2) CHRIST-SCHMID, *Geschichte der griechischen Literatur*, 5. Aufl., München 1908, S. 628. Die ältere Literatur sehr vollständig bei H. SCHMIDT, *Kritischer Kommentar zu PLATONS THEAETET*; Jahrb. f. Philol., 9. Suppl.-Bd., Leipzig 1877—78 und M. JEZIRNICKI, *Untersuchung über die Abfassungszeit der PLATONISCHEN Dialoge THEAITET und Sophistes*; Jahresber. d. II. Ober.-Gymn. Lemberg 1887.

3) CHRIST-SCHMID, a. a. O. S. 649. CONST. RITTER, *Untersuchungen über PLATO*, Stuttgart 1888, S. 33, 54, 128. LUTOSLAWSKI, *Origin and growth of PLATO'S Logic*, London 1897, S. 189, 398. TH. GOMPERZ, *Griechische Denker* II², Leipzig 1903, S. 283, 441 ff., 593 Anm. H. RAEDER, *PLATONS philosophische Entwicklung*, Leipzig 1905, S. 297.

Im Einleitungsgespräch erzählt EUKLID von Megara dem TERPSION, daß er THEAETET, der verwundet und schwer krank aus dem Lager von Korinth nach Athen geschafft wurde, im Hafen angetroffen habe (142A *ἐνέτυχον . . ζῶντι καὶ μάλα μόλις· χαλεπῶς μὲν γὰρ ἔχει ὑπὸ τραυμάτων τινῶν, μᾶλλον μὴν αὐτὸν αἰρεῖ τὸ γερονδὸς νόσημα ἐν τῷ στρατεύματι*. „Kaum noch lebend. Sein Zustand ist schlecht wegen mehrerer Wunden; noch schwerer hat ihn die im Heere ausgebrochene Krankheit — die Ruhr — gepackt.“). Der Kranke hatte sich weder durch Bitten noch durch Rat bewegen lassen, den gefährlichen Transport nach der Heimat zu unterbrechen (142C *Ἦπείγετο οἰκαδὲς· ἐπεὶ ἔγωγ' ἐδεόμην καὶ συν-εβούλευον, ἀλλ' οὐκ ἤθελεν*); so mußte der Freund sich darauf beschränken, ihn eine Strecke zu geleiten.

Wer diese Szene unbefangen auf sich wirken läßt, der muß den Eindruck haben, daß von THEAETET als todkrankem Manne gesprochen wird, den es unwiderstehlich nach Hause zieht, um in der heimischen Erde seine letzte Ruhestätte zu finden. Nur wer die großen Leistungen, die SOKRATES dem Jüngling THEAETET vorausgesagt haben soll, zeitlich hinter der Einleitungsszene sucht, der muß dieser Theorie zuliebe den Ton des Schmerzes und letzten Abschiedes überhören, den THEAETET genesen und später seinen Ruhm erwerben lassen.

Wird uns aber in dem Einleitungsgespräch das Lebensende THEAETETS vorgeführt, dann muß dieses Ereignis spät genug erfolgt sein, um dem Manne, der 399 als Jüngling, fast als Knabe, geschildert werden konnte, Zeit zu einer an Leistungen und Ruhm reichen Entwicklung zu lassen.¹⁾ Jene Schlacht, die seinen Tod herbeiführte, kann also nicht im Korinthischen Kriege 394 stattgefunden haben, wie man früher annahm, sondern wesentlich später; wahrscheinlich ist sie das Gefecht, welches zwischen Athenern und Thebanern 368 vor den Toren von Korinth geschlagen wurde.²⁾

β) Der Dialog ein Denkmal für THEAETET. Steht dies fest, und fällt die Abfassungszeit des Dialogs nur wenig hinter den Tod THEAETETS,

Dagegen hat E. ZELLER trotz aller Einwände an der frühen Entstehung des THEAETET (392 — 390) festgehalten: *Philosophie der Griechen* II, 4, 1889, S. 462. Ders. *Über die zeitgeschichtlichen Beziehungen des PLATONischen THEAETET*; Sitzungsber. der Berliner Akad. d. Wissensch. 1886 II, S. 631 — 647 und 1887 I, S. 197 — 220. Die frühe Abfassung des THEAETET vertreten noch WINDELBAUD, *Geschichte der alten Philosophie*, 1888, S. 223. NATORP, *Philos. Monatshefte* 25, 1889, S. 342. Ders. *Archiv für Geschichte der Philos.* 3, 1890, S. 352 Anm. 1; von Philologen, soweit mir bekannt, nur FR. SUSEMIHL, *Beilage zum Vorlesungsverzeichnis*, Greifswald 1898, S. 52: „Nicht früher als um 390“, S. 56: „Nicht später als etwa 387“.

1) Besonders betont von MUNK, *Die natürliche Ordnung der PLATONischen Schriften*, 1857, S. 393.

2) Ebenfalls zuerst MUNK, a. a. O. S. 394; dann UEBERWEG (1861), BERGK (1883).

dann liegt der Gedanke nahe, daß PLATO dem toten Schüler und Freunde durch den Dialog ein Denkmal setzen wollte.

Ich finde diesen Gedanken zuerst von SOCHER¹⁾, dann von MUNK²⁾ und neuerdings von IVO BRUNS³⁾ ausgesprochen. Mir ist er der Schlüssel, der das Verständnis für die Szenerie des Dialogs, für die Schilderung der Persönlichkeiten, für die Wertung der mathematischen Stellen eröffnet und im allgemeinen für die Beantwortung der Frage, ob und wie weit der Dialog *THEAETET* als historische Quelle für die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen anzusehen ist.

Alte und neue Erklärer haben mit dem Einführungsgespräch zwischen EUKLID und TERPSION bisher nicht viel anzufangen gewußt. Der anonyme Kommentar des 2. Jahrhunderts berichtet⁴⁾ von einer anderen „unechten, etwas frostigen“ (ὑπόψυχρον) Einleitung, welche am Ende von 143C mit den an einen Diener gerichteten Worten begann: „Bringst du also die Schrift über *THEAETET*?“, also die Rahmenszene ganz abschnitt. In den neuesten Behandlungen dieser Frage sagt RAEDER⁵⁾: „Äußerlich erscheint der *THEAETETOS* als zwei einfache dramatische Dialoge, die unmittelbar nebeneinander gestellt sind, so daß das einleitende Gespräch ganz überflüssig erscheint“; und CHRIST-SCHMID⁶⁾: „Seltsam ist, daß der *THEAETETOS* einen Einleitungsrahmen hat, das nachfolgende Gespräch des SOKRATES aber doch nicht referierend, sondern dramatisch gehalten ist.“ Als Erklärung dieses zwecklos erscheinenden Einleitungsgesprächs gibt RAEDER⁷⁾: „Es herrscht auch fast allgemeine Einigkeit darüber, daß die Einleitung bloß den Zweck hat auszudrücken, daß der Dialog den megarischen Freunden PLATONS bzw. deren Andenken gewidmet ist“; und CHRIST-SCHMID fährt an der oben zitierten Stelle fort: „Die Einleitung kann demnach nur den Sinn haben, dem hier eingeführten EUKLEIDES eine persönliche Aufmerksamkeit zu erweisen, indem er als Verfasser des von ihm angeblich aufgezeichneten SOKRATESgesprächs erscheint.“⁸⁾

Wenn ZELLER aus der als Tatsache vorausgesetzten Widmung des Dialogs an EUKLEIDES „als literarisches Geschenk“ auf die Abfassung um 394 geschlossen hat⁹⁾, „als PLATO ihrer (der Megariker) Philosophie noch näher stand und die Gastfreundschaft, die er nach SOKRATES' Tode bei EUKLEIDES genossen hatte, noch frischer in seiner Erinnerung lebte“, so dürfen wir umgekehrt aus der Fixierung des Dialogs auf die Zeit nach

1) *Über PLATONS Schriften*, München 1820, S. 249.

2) a. a. O. S. 393.

3) *Das literarische Porträt der Griechen*, 1896, S. 247.

4) a. a. O. cap. 3, 28—35 p. 4.

5) a. a. O. S. 48.

6) a. a. O. S. 648.

7) a. a. O. S. 295.

8) Ähnlich R. HIRZEL, *Der Dialog I*, 1895, S. 245.

9) Sitzungsber. d. Akademie d. Wissensch. in Berlin 1886 II, S. 635.

370 schließen, daß damals, also nach etwa einem Vierteljahrhundert, erstens wegen des großen Zeitabstandes und zweitens wegen der eingetretenen Entfremdung ein solches „Gastgeschenk“ kaum noch am Platze gewesen wäre. Und gar die „persönliche Aufmerksamkeit“, die darin liegen soll, daß „EUKLEIDES als Verfasser des von ihm angeblich aufgezeichneten SOKRATESgesprächs erscheint“, ist ein so unbeholfenes und frostiges Kompliment, daß nur die Verlegenheit, dem Einleitungsgespräch doch irgendeinen, wenn auch noch so dürftigen, Grund zu geben, es rechtfertigen konnte.

Ist aber der Dialog *THEAETET* ein Nachruf für den Freund und Mitforscher, den PLATO, vielleicht von der zweiten sizilischen Reise zurückkehrend¹⁾, nicht mehr unter den Lebenden angetroffen hatte, so ist das Einleitungsgespräch die Zueignung dieses Nachrufs, eine Zueignung, würdig des Dichters PLATO. Jedem Zeitgenossen verständlich sagten die Einleitungsworte, in denen die Bewunderung des lebenden, der Schmerz um den toten THEAETET nachzittert: hier hebt an *Θεαίητον ἀριστέα*, ein Kranz, gewunden dem Andenken des edlen Toten; der Freund ehrt den Freund, indem er sein Bild zu unvergänglichem Leben erweckt. Denn der Tod hat die Lippe entsiegelt, die gegenüber dem Lebenden in frommer Scheu gebunden war: „Nur die Bürger darf und soll man preisen, die in großen Taten des Leibes und des Geistes, edel, mühevoll, gesetzestreu, ihr Leben abgeschlossen haben; nicht die Lebenden, die noch nicht durch alle Zwischenfälle hindurch zum sicheren Ende gelangt sind.“²⁾

Den toten Freund zu ehren genügt es PLATO nicht, wenn er dem Dialoge den Namen des Verstorbenen beilegt, auch nicht, wenn er referierend seine Leistungen und sein Schicksal darstellt; „in dem Wunsche, die Wahrheit ganz zu geben, wählte er das Kleid der Dichtung“. „Nur wenn durch sie eine Illusion hervorgerufen ist, die dem antiken Kunstsinne nicht als Trug, sondern als höhere Wahrheit erscheint, die Illusion, daß wir den Klang jener Stimme wieder zu hören meinen, glaubt PLATON das, worin er den eigentlichsten Lebensinhalt seines Helden sieht, mit jener persönlichen Färbung aussprechen zu können, ohne welche die volle biographische Treue in seinem Sinne nicht erreicht werden kann.“³⁾

Also als Werk zugleich der Pietät und der Wahrhaftigkeit⁴⁾, ausgeführt von einem Seelenkenner und Künstler soll der Dialog

1) LUTOSLAWSKI, a. a. O. S. 398 setzt aus anderen Gründen die Abfassung des *THEAETET* auf diesen Zeitpunkt, also 367. MUNK, a. a. O. S. 397, 398 meint, nach der dritten Reise.

2) PLATO, Gesetze VII, 801 E—802 A.

3) BRUNS, a. a. O. S. 212, bezüglich auf den SOKRATES der Apologie.

4) Vgl. BRUNS, a. a. O. S. 247.

THEAETET betrachtet werden. Nur wenn die besonderen Züge dieses Dialogs, vor allem die Szenerie und Charakteristik, sich als notwendige oder wenigstens als geeignete Durchführungsmittel dieser Idee erweisen lassen, wird der zunächst als Forschungshypothese zu bewertende Gedanke zum sicheren Boden für weitere Schlüsse werden.

γ) *THEAETET*'s Alter im Dialog. Wollte *PLATO* den *THEAETET* seinen Zeitgenossen als Lebenden vorführen, so mußte er seiner festen schriftstellerischen Gewohnheit nach ihn im Gespräche mit *SOKRATES* sich betätigen lassen. Zu diesem Zwecke mußte er die Möglichkeit des Zusammentreffens der beiden, selbst wenn sie geschichtlich nicht vorhanden gewesen sein sollte, dichterisch konstruieren. Wenn *THEAETET* als Mann in der Blüte des Lebens und auf der Höhe des Ruhms 368 gestorben ist, dem Eindruck nach vielleicht 40, höchstens 45 Jahre alt, so kann seine Jugendzeit noch in das Alter des *SOKRATES* gefallen sein, aber ein inniger Verkehr hat außer aller Möglichkeit gelegen. So mußte *PLATO*, um überhaupt eine Unterredung der beiden glaubhaft erscheinen zu lassen, von der Behauptung oder Fiktion einer längeren Bekanntschaft absehen: *SOKRATES* kennt *THEAETET* nur von Ansehen, sein Name ist ihm unbekannt (144C); *THEAETET* weiß von *SOKRATES'* fragender Methode nur durch den Bericht anderer (148E); erst *THEODOR* vermittelt den einmaligen persönlichen Verkehr. Diese einmalige Zusammenkunft findet kurz vor *SOKRATES'* Tode statt (142C, 210D); *THEAETET* aber ist *μειράκιον* und ganz jugendlich gehalten. *PLATO* geht also in der Altersbestimmung beider Teilnehmer bis an die äußerste Grenze, die überhaupt noch die Möglichkeit einer persönlichen Berührung gewährt.

ZELLER, nach dessen Auffassung *THEAETET* 394 stirbt und also sein wissenschaftliches Ansehen schon vorher erlangt haben muß, dehnt die Zeit des *μειράκιον* aufs äußerste aus: „*μειράκιον* kann jeder heißen, der nicht mehr *παῖς* und noch nicht *ἄνθρωπος* ist“¹⁾; trotzdem bleibt die Lebenszeit zu kurz für die Leistungen. *SUSEMIEL*²⁾ zieht diese Unwahrscheinlichkeit dem späteren Tode vor. *SCHULTESS*³⁾ verzichtet ganz auf die wissenschaftlichen Leistungen und läßt den *THEAETET* 25 Jahre alt sterben, „*μάλα ἐλλόγιμος* nicht als Gelehrten, sondern als *ἄνθρωπος καλὸς καγαθός*“. Aber gerade die geistigen Fähigkeiten *THEAETET*'s, welche *PLATO* im ganzen Dialoge feiert, in dem *οἶος ἄνθρωπος* und dem *ἐλλόγιμος* der Einleitung zu ignorieren, geht nicht an und zerstört den Zusammenhang von Rahmen und Bild.

1) a. a. O. S. 633. 2) a. a. O. S. 45 — 47.

3) *Die Abfassungszeit des PLATONISCHEN THEAETET*; Progr. des prot. Gymn. Straßburg i. E. 1875, S. 29, 30.

SCHULTESS' „unbefangener Leser“, dem „der im Dialog geschilderte THEAETET durch seine Kenntnisse und seine ganze Entwicklung eher den Eindruck eines *ἑφηνβος*, d. h. eines Zwanzigjährigen, machen wird“¹⁾, ist eben nicht unbefangen, sondern tut der Gesamtauffassung Zwang an und benützt einige kleine Anknüpfungspunkte, um die These vom frühen Tode THEAETETS zu retten. Mag SOKRATES den THEAETET auch einmal, wo er ihn von weitem sieht, *ἀνὴρ* nennen (144 D); darf die vertrauliche Anrede *ὦ παῖ* im Munde des siebzigjährigen Greises gegenüber dem viel Jüngeren auch nicht gepreßt werden; mag die Bezeichnung *παιδίον* (166 A, 168 D) im Sinne des sich verteidigenden PROTAGORAS absichtlich herabsetzend sein, so sprechen doch die ständigen Bezeichnungen²⁾, die ganze Charakteristik und der neckende Ton, in dem SOKRATES und selbst der ernsthafte THEODOR mit ihm verkehren³⁾, so überwältigend für die große Jugendlichkeit THEAETETS⁴⁾, daß unter den Neueren nur SUSEMIHL⁵⁾ die Auffassung ZELLERS aufrecht erhält.

Reichlich hat PLATO dem geweckten Knaben, der nach THEODORS Urteil (144 A, B) Temperament mit Zähigkeit verbindet, in dem abschlußlosen Dialog das jugendliche Recht des unbefangenen Irrs gewahrt. Schnell fertig mit dem Wort greift THEAETET nach der nächstliegenden Antwort, zufrieden und stolz auf den glücklichen Treffer. Erweist sich der Treffer dann als Niete, so scherzt er, auf den Ton des Führers eingehend, ohne jede Spur von Verstimmung (*οὐδαμῶς γὰρ δύσκολος* 166 A) über sein Mißgeschick und wagt einen neuen Zug. Er ist gesund an Leib und Seele, zutraulich und offen, er ist wißbegierig, er faßt schnell und behält gut, aber er ist kein Wunderkind.

Viele Einzelzüge sichern diesen Gesamteindruck. Ich möchte folgenden hervorheben: Im Staat sowohl wie in den Gesetzen⁶⁾ hat PLATO die über die Elemente hinausgehende, aber noch nicht zum Fachstudium spezialisierte Ausbildung der jungen Leute in den mathematischen Wissenschaften auf das 16. bis 18. Lebensjahr gelegt. Der THEAETET des Dialogs beantwortet SOKRATES' Frage: „Du lernst bei THEODOR Geometrie?“ mit „ja“; dagegen auf die weitere Frage: „Auch Astronomie, Harmonie und

1) a. a. O. S. 29.

2) *μειράκιον*, *τηλικότος*, *παῖς*, *παιδίον* (142 C, 143 E, 144 B, 144 C, 145 D, 146 B, 148 B, 162 D, 166 A, 168 E, 169 C).

3) z. B. *ὁ σοφὸς Θεαίτητος* 162 C; *κατὰ μὲν Ὅμηρον καὶ Ἡράκλειτον . . . κατὰ δὲ Πρωταγόραν . . . κατὰ δὲ Θεαίτητον* 160 D. Ebenso sind aufzufassen 183 C, 183 D, 185 E.

4) Vgl. BRUNS, a. a. O. S. 245—247.

5) a. a. O. S. 44—46.

6) Staat VII von 522 C an, Gesetze VII von 817 E an. Es handelt sich um theoretische Zahlenlehre (Arithmetik), Geometrie einschließlich Stereometrie, und Astronomie.

Rechenkunst?“ lautet die Antwort: *προθυμοῦμαι γὰρ δὴ* (145C, D), „das ist mein sehnlicher Wunsch“. So weit ist er noch nicht gekommen, weil er erst im Beginn des Unterrichts steht. Er ist nicht älter dargestellt als etwa 16 Jahre, ein Jüngling näher dem Knaben.

δ) Mittel der Charakterisierung THEAETETS. Der Szenenwechsel stellt PLATO die Aufgabe, THEAETET von zwei Standpunkten aus zu zeigen. In der Einleitungsszene sehen wir ihn als Mann, geliebt, bewundert, betrauert, im Begriff, ein hohen Zielen geweihtes Leben durch großen Tod zu beschließen. Zu dem zweiten Standpunkt hinüber führt als Brücke die Prophezeiung des selbst schon todgeweihten SOKRATES, wonach vor dem Jüngling ein ruhmreiches Leben liegen muß. Für die Hauptszene steht PLATO vor der schwierigen Aufgabe, den Jüngling so vorzuführen, daß wir aus Keimen und Ansätzen diese in der Zukunft liegende Entwicklung ahnen.¹⁾ Um psychologisch wahr zu bleiben und die Gegenwart nicht unter der Zukunft zu ersticken, muß der Dichter sich in der Schilderung des Jünglings große Zurückhaltung auferlegen; er darf weniger Leistungen, als Anlagen zeigen. Es ist wohl eine aus dieser Komposition entsprungene Notwendigkeit, „daß die enthusiastische Ankündigung etwas auf sein späteres Auftreten drückt.“²⁾

Will PLATO THEAETET nun durch die Beziehung zu Sokrates charakterisieren, so kann er dies ausführen, indem er erstens SOKRATES' Urteil über ihn wiedergibt, zweitens und wesentlich aber, indem er den Jüngling sich im Gespräch mit Sokrates betätigen läßt. So können die Persönlichkeit, die rein menschlichen Züge, die dialektische Begabung zum Vorschein kommen; auch die Wahl des Themas „Was ist Wissen?“ weist auf den Gedankenkreis des künftigen Gelehrten hin.

THEAETET war aber hervorragend nicht nur durch Charakter und philosophische Begabung, sondern vor allem durch mathematische Entdeckungen. Weil diese ganz wesentliche Seite des Bildes im Verkehr mit SOKRATES allein nicht zum Vorschein kommen konnte, deshalb mußte PLATO auch hierfür einen kompetenten Beurteiler und Mitunterredner ins Feld führen: es gab keinen besseren als den berühmtesten Mathematiker der Zeit, THEODOR von Kyrene. Und wiederum muß dieser erst durch sein Urteil die Begabung THEAETETS beleuchten, und er muß ferner durch seine Anregung dem Schüler Gelegenheit geben, die eigene mathematische Fassungs- und Erfindungskraft zu produzieren.

Mit der Einführung THEODORS erreicht PLATO noch einen Nebenzweck: THEODOR ist Schüler und Freund des PROTAGORAS gewesen: er tritt als Vertreter und Ersatzmann seines vor mehr als einem Jahrzehnt ge-

1) Vgl. BRUNS, a. a. O. S. 244.

2) BRUNS, a. a. O. S. 246.

storbenen Lehrers da ein, wo SOKRATES sich mit der sensualistischen Erkenntnistheorie auseinandersetzt.

Ich fasse die Szenerie des *THEAETET* geradeso auf, wie ZELLER die des *PARMENIDES*.¹⁾ Weil PLATO sich durch seinen SOKRATES mit der eleatischen Lehre auseinandersetzen will, deshalb muß er PARMENIDES¹⁾, ZENO und SOKRATES in derselben Szene vereinigen. Er macht das Zusammentreffen so wahrscheinlich als möglich, indem er PARMENIDES so alt als möglich, SOKRATES so jung als möglich darstellt, aber auf geschichtliche Wirklichkeit hat die Szene keinen Anspruch. „Da also der Kern der ganzen Erzählung jedenfalls erdichtet ist, so haben wir nicht die geringste Bürgschaft dafür, daß es sich mit den äußeren Umständen anders verhalte, durch welche diese von PLATON erdichtete wissenschaftliche Verhandlung herbeigeführt sein soll“ (ZELLER). Die Dialoge *THEAETET* und *PARMENIDES* gehören nach der jetzt herrschenden Chronologie der PLATONischen Schriften in dieselbe Zeit; vielleicht ist auch dieser Umstand eine Stütze für die Auffassung, daß PLATO in beiden Dialogen denselben szenischen Kunstgriff verwendet. Ja, man wird in der Erwähnung, welche SOKRATES' Zusammentreffen mit PARMENIDES im *THEAETET* (183E) und abermals in dem derselben Gruppe angehörigen *Sophistes* (217C) findet, nicht die Bestätigung der Geschichtlichkeit des Vorgangs, sondern im Gegenteil eine künstliche Verklammerung, einen Kitt zu sehen haben, durch welchen PLATO seiner chronologischen Konstruktion Festigkeit zu verleihen sucht.

ε) Der Dialog und die Wirklichkeit. Ist nun die Szenerie des *THEAETET* unhistorisch, so erhebt sich die Frage: Welches Recht haben wir, den Dialog als historische Quelle, insbesondere als Quelle für die Geschichte der Mathematik zu verwerten? Die Antwort geben BRUNS und ZELLER. „Wohl ist die PLATONische Szene erfunden, aber sie will erfunden sein im Geist der Wirklichkeit.“ „In höherem Sinne macht also auch ihre Wiedergabe auf historische Wahrheit Anspruch.“ „Alles, was die zur Darstellung kommenden Personen tun oder sagen, ist, einzeln betrachtet, unhistorisch, ist Dichtung. Aber der Eindruck, den der Verfasser mit der Gesamtheit dieser Einzelheiten erzielen will, soll der historischen Wirklichkeit entsprechen.“²⁾ „Diese Wahrnehmung warnt uns vor unkritischer Leichtgläubigkeit, wie vor einer zu weit gehenden Skepsis. Wir dürfen nie vergessen, daß wir es bei ihm nicht mit einem Geschichtschreiber, sondern mit einem Dichter zu tun haben, der mit den Tatsachen frei genug umgeht.“ „Wir dürfen jedoch ebensowenig übersehen,

1) *Über die Anachronismen in den PLATONischen Gesprächen*; Abh. d. Akademie d. Wissensch. in Berlin 1878; Phil. hist. Kl. S. 92.

2) So weit BRUNS, a. a. O. S. 241.

daß dieser Dichter von der ihm bekannten Geschichte nicht aus bloßer Willkür, sondern aus bestimmten künstlerischen oder wissenschaftlichen Motiven abweicht.“¹⁾

Die Charakteristik, die geistige Eigenart der Personen, als Zweck der Einkleidung des Dialogs, ist unbedingte innerliche Wahrheit, natürlich so, wie PLATO sie sah, und in der Ausgestaltung dichterisch der Szene angepaßt. Die Szenerie ist nie direkt als historische Quelle zu benutzen; vielmehr ist jede Angabe nach den Prinzipien historischer Forschung zu prüfen: Konnte und wollte PLATO die Wirklichkeit berichten? Liegt im Zusammenhange ein Grund, der ihn von der Geschichte abweichen lassen konnte?

B. Die Folgerungen.

α) Die äußere Wirklichkeit. In dem auf den Anfang des Jahres 399 gelegten Hauptdialog ist THEAETET etwa 16 Jahre alt. PLATO durfte, um überhaupt eine Unterhaltung mit SOKRATES glaubhaft erscheinen zu lassen, ihn nicht jünger auftreten lassen. Also liegt hier ein Moment der Szenerie vor, welches den Dichter band und ihn unter Umständen zwingen konnte, THEAETET älter zu machen, als er in Wirklichkeit war. Geradeso wie ZELLER aus den Altersangaben über PARMENIDES einen Schluß auf dessen Geburtsjahr ablehnt²⁾, ist die Ansetzung von THEAETETS Geburt aus dem Dialog heraus auf 415 nicht zulässig. Wir können nur sagen: THEAETET ist frühestens 415 geboren. Da aber sein Schlachtentod im Jahre 368 ein geringeres Alter als 47 Jahre wahrscheinlicher macht, dürfte seine Geburt später, also nicht nur 12, sondern 15 oder noch mehr Jahre nach PLATOS im Jahre 427 erfolgter Geburt anzusetzen sein.³⁾

Zu verwerfen sind die Angaben der Alten, in welchen das Alter oder das Schülerverhältnis THEAETETS ohne Kritik dem Dialog entnommen ist. So ist die Nachricht des DIOGENES LAERTIUS (II, 29) nichts als eine Ausmalung der Dialogszenerie, auf die sie sich beruft: *ἱκανὸς δ' ἀμφοτέρω ἦν (SOKRATES) καὶ προτρέψαι καὶ ἀποτρέψαι. ὥσπερ τὸν Θεαίτητον, περὶ ἐπιστήμης διαλεχθεὶς, ἐνθρον ἀπέπεμψε, καθὰ καὶ Πλάτων φησὶν.* Dasselbe gilt für die Bezeichnung THEAETETS als *μαθητὴς Σωκράτους* bei SUIDAS; die Ansetzung der *ἀκμὴ* bei demselben Kompilator (*γέγονε δὲ μετὰ τὰ Πελοποννησιακά*) ist nicht ein besonderes Wissen, sondern Folgerung aus dem angenommenen Schülerverhältnis: der Schüler gehört der Generation

1) ZELLER, a. a. O. S. 98. 2) a. a. O. S. 94.

3) Für SCHULTESS (der a. a. O. S. 30 von „Landsturm“ spricht), ZELLER (Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Berlin 1886 II, S. 634) und SUSEMIHL (a. a. O. S. 46) ist das zu hohe Alter ein Grund, den Feldzug THEAETETS auf 394 hinaufzurücken. Derselbe Zweck wird erreicht durch Herabrücken seiner Geburt.

nach dem Lehrer an.¹⁾ Dagegen nennt PROKLUS im Geometerverzeichnis (66, 14—16), dessen sachliche Angaben auf EUDEMUS' Geschichte der Geometrie zurückgehen, THEAETET mit LAODAMAS und ARCHYTAS zusammen als Zeitgenossen PLATOS ohne nähere Angabe (*ἐν δὲ τούτῳ τῷ χρόνῳ ἦν . . .*).

Geradeso wie PLATO die allgemeine Eigenart THEAETETS nur im Gespräch mit SOKRATES darlegen konnte, so brauchte er, um die mathematische Begabung zu charakterisieren, den Mathematiker THEODOR. Ist aber THEODORS Einführung unter dem Zwange der Komposition erfolgt, so ist sie der Szenerie entsprechend gestaltet, und es ist falsch, die äußeren Umstände von THEODORS Auftreten ohne Prüfung als geschichtliche Wahrnehmung zu nehmen. Die Einführung THEODORS beweist weder, daß er THEAETETS persönlicher Lehrer war, noch daß er zu jener Zeit (399) in Athen war, ja nicht einmal, daß er überhaupt in Athen gewesen ist.

THEODOR wird mit großer Absichtlichkeit als Altersgenosse des SOKRATES geschildert. Es liegt kein Grund vor, diese Angaben anzuzweifeln; er dürfte also zur Zeit des fingierten Gesprächs im Alter von etwa 70 Jahren gestanden haben. War aber THEAETET zu jung zum Schüler des SOKRATES, so war er auch zu jung zum Schüler des gleichaltrigen THEODOR. Ist es schon wenig wahrscheinlich, daß THEODOR als Siebzigjähriger in Athen Lehrvorträge gehalten hat, so ist es noch unwahrscheinlicher, daß er in noch höherem Alter, als THEAETET herangewachsen war, die Reise nach Athen gemacht haben soll. Andererseits dürfte THEAETET zu dieser Zeit, wie PLATO in den neunziger Jahren, den schon 399 so Hochbetagten schwerlich noch haben in seiner Heimat aufsuchen und hören können.

Gehörte schon PLATO zur letzten Generation von SOKRATES' persönlichen Schülern, so kann der um etwa ein halbes Menschenalter jüngere THEAETET ebensowenig THEODORS Unterricht wie SOKRATES' Belehrung persönlich, sondern nur durch Vermittelung anderer empfangen haben. Daß der Vermittler PLATO selbst war, werde ich später²⁾ zu beweisen suchen. Wenn PLATO trotzdem im Dialog THEODOR und THEAETET im Verhältnis von Lehrer und Schüler einführt, so hat dies den Sinn, daß er die geistige Abhängigkeit nach dem Recht des Dichters zu einer persönlichen gestaltet. Indem er seine eigene Mittlerrolle bescheiden unterdrückt, kann er auf diese

1) So nach ROHDE, *Kleine Schriften* I, S. 123. SUIDAS unterscheidet von dem *Θεαίτητος Ἀθηναῖος — μαθητὴς Σωκράτους* einen anderen *Ἡρακλείας Πόντου — ἀκροατὴς Πλάτωνος*. Gemeint ist derselbe; SUIDAS muß über dieselbe Person noch andere Quellen benutzt und daraus auf verschiedene Personen geschlossen haben. So urteilen außer ROHDE (a. a. O. S. 123 Anm.) BERNHARDY (*SUIDAS* I, S. 1120) und TANNERY (*Géométrie grecque*, p. 100 Note). ALLMAN (*Greek geometry*, p. 211, note 11) bestreitet es.

2) Siehe unten S. 141.

Weise, ohne unplastisch referierend zu verfahren, die Grenze zwischen dem geistigen Gute, welches von THEODOR stammt, und dem Zuwachs, den es durch THEAETET erfahren hat, aufs deutlichste ziehen. So dient die Einführung THEODORS und die ganze mathematische Episode, äußerlich unhistorisch, der inneren historischen Treue.

β) Die Abgrenzung der Leistungen. Damit sind wir in den Stand gesetzt, die Fragen zu beantworten, welche sich am Ende von § 1 erhoben: Weil durch die mathematischen Leistungen die Persönlichkeiten, besonders THEAETET, charakterisiert werden sollen, deshalb müssen wir, worauf schon gewisse Einzelmomente hinwiesen¹⁾, jetzt auch vom Standpunkt der Komposition des Dialogs die in § 1 hergeleitete Abgrenzung der Leistungen unbedingt als geschichtliche Wahrheit betrachten. PLATO wollte die Priorität der einzelnen Schritte in der Entdeckung des Irrationalen feststellen. Über die Vorfrage, ob er es konnte, d. h. ob und inwieweit er mit den Fortschritten der Geometrie auf diesem Gebiete vertraut war, werden die im folgenden Paragraphen zu untersuchenden Stellen anderer Dialoge und die Terminologie Licht verbreiten.

Durch das Streben PLATOS nach Charakteristik erklären sich nun auch die Unsicherheiten, welche der oberen Abgrenzung von THEAETETS mathematischer Leistung anhaften.²⁾ Hatte PLATO die Szene des Dialogs einmal in THEAETETS Jugendzeit verlegt, so konnte er, durch psychologische Gesetze gebunden, nicht ohne die innere Wahrheit der Szene aufzugeben den THEAETET seine Mannesentdeckungen als halben Knaben machen lassen. PLATO wählte den Weg, der als der einzig gangbare erscheint: er projizierte die abgeschlossenen Leistungen des Mannes als momentane Einfälle, als unfertige Ideen in die Jugendzeit. Er führt damit die durch den ganzen Dialog gehende Charakterisierung seines THEAETET auch für die mathematische Stelle konsequent durch. Wie er ihn in der philosophischen Diskussion durch schnelles Zugreifen und Vorgreifen als das junge, nicht ausgereifte Talent zeichnet, so legt er ihm für den entscheidenden Begriff einen technisch unexakten Ausdruck in den Mund (*δύναμις*) und läßt ihn als Analogie (*καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον*) die Erfüllung einer Forderung andeuten, an der nach PLATOS Auffassung das Fortschreiten der Stereometrie hing, und die ihm sozusagen vor der Tür zu stehen schien.

So schimmern für den Kundigen die Leistungen des Mannes wie durch einen Schleier durch die Ahnungen des Jünglings hindurch. Beiden ist ihr Recht geworden.³⁾

1) Siehe oben S. 111.

2) Siehe oben S. 114—117.

3) THEAETET hat in der Tat Verdienste in der Stereometrie gehabt; sie beziehen sich auf die regelmäßigen Körper (SUIDAS unter *Θεαίτητος Ἀθηναῖος*; Scholion zu

γ) Charakteristik THEODORS. In THEODOR schildert PLATO zunächst, der Forderung der Komposition entsprechend, den Gelehrten, den ersten Mathematiker seiner Zeit; sodann den philosophisch geschulten Kopf, der fremdes und eigenes Meinen kritisch sondiert, dem die Vorgänge in den Köpfen der Philosophen wie in den Seelen der Schüler selbst zum Problem werden, und der sich nur zögernd auf ihm fremde Gebiete wagt. Aber der ernste, zurückhaltende Mann, der gern an sein Alter mahnt¹⁾ und über alles die Muße einer wissenschaftlichen Untersuchung liebt, zeigt auch menschlich schöne Eigenschaften: Zuverlässigkeit, Warmherzigkeit, Feinfühligkeit. Seinem Lehrer und Freunde PROTAGORAS hält er die Treue, auch nachdem sein Interesse für philosophische Theorien längst erkaltet ist. Wie freut er sich der einzigartigen Begabung seines Lieblingsschülers THEAETET; wie wird der Alte selbst jung im Verständnis der Jugend!

Wie der ganze Dialog durch hohe Kunst der dramatischen Charakterisierung²⁾ und durch einen ganz eigenen, warmen Gefühlston ausgezeichnet ist, so ist auch das Bild des kyreneischen Mathematikers plastisch herausgearbeitet, stark belebt und gehoben durch den tiefen Eindruck auf die Mitunterredner. SOKRATES wie THEAETET bezeugen dem Gelehrten und dem Menschen ganz besondere Hochachtung, ja Verehrung. Die Einzelzüge, durch welche PLATO THEODOR zeichnet, könnte er zur Not durch Überlieferung erhalten und dichterisch ausgestaltet haben, aber die Wärme, welche über der Zeichnung liegt, kann geradesowenig wie der Herzenston gegen THEAETET etwas anderes sein als Ausstrahlung der Verehrung und Liebe, welche PLATO persönlich empfunden hat. Diese Gefühle setzen eine persönliche Beziehung voraus, welche in diesem Falle nur die des Schülers zum Lehrer sein kann.

Zu PROTAGORAS (480—410) hat THEODOR nicht nur, wie es gewöhnlich dargestellt wird, im Freundschaftsverhältnis gestanden, sondern er ist sein Schüler gewesen.

Gewiß wird auch das Freundesgefühl des greisen THEODOR gegen den längst gestorbenen PROTAGORAS stark betont; PROTAGORAS ist φίλος ἀνὴρ (162 A); THEODOR empfindet es unzeit, die Hand zu PROTAGORAS' Widerlegung zu bieten (οὐκ ἂν δεξαίμην δι' ἐμοῦ ὁμολογοῦντος ἐλέγχεσθαι

EUKLID XIII bei HEIBERG, *Opera*, Bd. V, S. 654). Vgl. meine Abhandlung, *Über die Geometrie des PYTHAGORAS* (Biblioth. Mathem. 9, 1908/9, S. 47). Es ist nicht undenkbar, daß PLATO durch Heranziehen der στερὰ diese Seite von THEAETETS Forschungen andeuten wollte.

1) Er kokettiert fast mit seinem Alter: 146 B, 162 B; 165 B, 177 C, 183 D.

2) Nach GOMPERZ (a. a. O. S. 442) ist der THEAETET „noch mit allen Vorzügen einer reifen und reizvollen Komposition geschmückt“, aber „hier nehmen wir vom schaffenden Dichter nicht ohne Wehmut Abschied“. In demselben Sinne CHRIST-SCHMID, a. a. O. S. 648.

Πρωταγόραν 162 A). Aber viel häufiger als φίλος heißt er *ἐταῖρος*¹⁾ *Πρωταγόρου*; er gehört zu denen *ἀμφὶ Πρωταγόραν* (170 C). In die sensualistische Erkenntnislehre des PROTAGORAS hat er sich in jüngeren Jahren eingelebt; sie ist ihm, nachdem sein Interesse und seine Arbeit sich der Mathematik zugewendet haben, ein traditioneller Besitz, an dem er nur ungern rütteln läßt. SOKRATES rechnet ihn zu den vertrauten Schülern des PROTAGORAS; nur indem er sich auf die Verpflichtung des Schülers beruft, die Lehren und das Ansehen des toten Lehrers nicht durch Unkundige oder gar durch unverständige Knaben verunglimpfen zu lassen (168 C—169 C), gelingt es ihm, THEODOR aus seiner Zurückhaltung herauszulocken. Und auch so grenzt THEODOR sein Eingreifen in die Unterhaltung durch diese Verpflichtung ab (169 C, 183 C).

Am bedeutsamsten ist die Stelle 164 E—165 A:

Σωκρ.: . . . καὶ γὰρ οὐδ' οἱ ἐπίτροποι, οὓς Πρωταγόρας κατέλιπεν, βοηθεῖν ἐθέλουσιν, ὧν Θεόδωρος εἰς ὅδε. ἀλλὰ δὴ αὐτοὶ κινδυνεύομεν τοῦ δικαίου ἔνεκ' αὐτῶ βοηθεῖν.

Θεοδ.: Οὐ γὰρ ἐγώ, ὦ Σώκρατες, ἀλλὰ μᾶλλον Καλλίας ὁ Ἰππονίκου τῶν ἐκείνου ἐπίτροπος. ἡμεῖς δὲ πως θᾶττον ἐκ τῶν ψιλῶν λόγων πρὸς τὴν γεωμετρίαν ἀπενεύσαμεν.

SOKRATES: . . . „Auch die Vormünder (nämlich seiner Geisteskinder), welche PROTAGORAS hinterlassen hat, wollen nicht helfen (nämlich seine verwaisten Gedanken gegen unbillige Angriffe zu schützen). Einer von diesen Vormündern ist unser THEODOR. So müssen wir denn um der Gerechtigkeit willen selber zu Hilfe kommen.“

THEODOR: „Nicht ich, lieber SOKRATES, bin in dem Grade Vormund von PROTAGORAS' Geisteskindern wie KALLIAS, des HIPPONIKOS Sohn. Ich selbst bin von der leeren Abstraktion²⁾ bald zur Geometrie sozusagen ‚abgeschwenkt‘.“³⁾

Die Stelle lehrt mehr, als daß THEODOR PROTAGORAS' Schüler gewesen ist. Sie lehrt, daß er es bis zu PROTAGORAS' Tode geblieben ist, daß er sich bald, aber doch erst nach dem Tode des Meisters, also nach 410,

1) 161 B, 168 C, 168 E, 171 C, 183 B. Außerdem anspielend auf den *ἐταῖρος Πρωταγόρου*: 168 C, (ὁ *ἐταῖρος*) 180 B.

2) Übersetzung nach GOMPERZ, a. a. O. S. 210.

3) In dem Ausdruck *ἀπενεύσαμεν*, der von PLATO einzig an dieser Stelle gebraucht wird, sehe ich einen Woffwitz, eine scherzhafte Anspielung auf die in der älteren griechischen Geometrie gebräuchliche Operation des *νεύειν* = inclinare, Neigen, Schwenken (HIPPOKRATES von Chios bei SIMPLICIUS ed. RUDIO p. 58, 10; ARISTOTELES *Analyt. post.* 76^b, 9; APOLLONIUS, *Quae graece exstant*, ed. HEIBERG III, 113—115). Gewissermaßen eine Entschuldigung für den scherzhaft metaphorischen Gebrauch des geometrisch technischen Ausdrucks liegt in *πῶς*.

Bibliotheca Mathematica. III. Folge. X.

der intensiven Beschäftigung mit der Mathematik zugewendet hat, daß er also auch seine mathematischen Entdeckungen erst nach dieser Zeit gemacht haben wird.

So erklärt es sich, daß SOKRATES ihn zu PROTAGORAS' geistigen Nachlaßverwaltern rechnen kann, und daß THEODOR diese Bezeichnung nicht ganz ablehnt, sondern nur die stärkere Verpflichtung auf einen anderen abzulenken sucht. *θάττον* aber kann, wenn einmal THEODOR sich wohl oder übel zu den *ἐπιτροποι* rechnen lassen muß, sich nur auf die Zeit beziehen, von der an der Stelle die Rede ist, d. h. auf den Tod des PROTAGORAS. Gewiß ist nicht anzunehmen, daß er sich vor dem 60. Lebensjahre nicht mit Mathematik beschäftigt hat, aber die entscheidende Wendung, die ihn zum *μαθηματικός* stempelte, muß doch erst nach dem Tode des der Mathematik und den Mathematikern nicht eben zugetanen Freundes¹⁾ erfolgt sein.

Wir sind über THEODORS Lebensumstände, sein Schulverhältnis und seine Entdeckungen außer durch PLATO nur sehr unvollkommen unterrichtet. PROKLUS nennt ihn, EUDEMUS folgend, mit HIPPOKRATES von Chios zusammen als „berühmten Geometer“²⁾ der Zeit zwischen ANAXAGORAS und dem wenig jüngeren ÖNOPIDES einerseits und PLATO anderseits. Ist ANAXAGORAS um 500, ÖNOPIDES um 490, HIPPOKRATES um 480 geboren, so stimmt dazu gut die im THEAETET aus der Gleichaltrigkeit mit SOKRATES und dem Schüler- und Freundesverhältnis zu PROTAGORAS sich ergebende Geburtszeit THEODORS um 470.

JAMBlichus³⁾ rechnet THEODOR von Kyrene zu den Pythagoreern. Dagegen heißt es bei DIOGENES LAERTIUS III, 6 *ἔπειτα εἰς Κυρήνην ἀπῆλθε (Πλάτων) πρὸς Θεόδωρον τὸν μαθηματικὸν καὶ κεῖθεν πρὸς τοὺς Πυθαγορικοὺς Φιλόλαον καὶ Εὐρύκτον*. Der Gewährsmann des DIOGENES stellt THEODOR den Pythagorikern gegenüber, rechnet ihn also nicht zu diesen. Nach PLATOS Dialog, der in diesem Punkte sicher ganz zuverlässig ist, ist

1) PLATO, *PROTAGORAS* 318 E. ARISTOTELES, *Metaph.* II, 2. 998^a 2—3. GOMPERZ faßt a. a. O. S. 210 *θάττον* als „frühzeitig“; vgl. auch S. 211 oben.

2) Kommentar zu EUKLID 66, 4—7. Über die Erwähnung THEODORS mit HIPPOKRATES zusammen bei JAMBlichus, *De comm. math. scientia* 77, 24—78, 1 (ed. FESTA) denke ich wie TANNERY (*Géométrie grecque*, S. 82): „Cette intercalation . . n'est qu'une glose qui rompt maladroitement le fils du récit. Mais cette glose JAMBlique l'emprunte évidemment à la tradition d'EUDÈME“. In der sonst gleichlautenden Stelle JAMBlichus *de vita PYTH.* 89 fehlt diese Einschaltung. Ähnlich wie TANNERY urteilt RUDIO, *Bericht des SIMPLICIUS*, 1907, S. 98 Anm. 3.

3) *Vit. PYTH.* 267. Wahrscheinlich hat JAMBlichus aus den geometrischen Leistungen auf die Zugehörigkeit zur Pythagoreischen Schule zurückgeschlossen. Aus demselben Grunde beweist die Stelle in *De comm. math. scientia*, auch wenn sie von JAMBlichus stammt, nichts über das Schulverhältnis.

THEODOR als Philosoph nicht Pythagoreer, sondern Protagoreer gewesen und hat sich erst in höherem Alter der Geometrie ausschließlich zugewandt.

Die Erwähnungen THEODORS bei PROKLUS und JAMBlichUS mit dem großen HIPPOKRATES zusammen lassen bedeutende geometrische Leistungen vermuten. Bei XENOPHON¹⁾ erscheint der Name THEODORS in SOKRATES' Munde gerade wie bei PLATO als Vorbild des großen Geometers. Bestimmte Nachrichten aber über THEODORS Leistungen erhalten wir, außer einer Definition bei PROKLUS²⁾, nur durch PLATOS *THEAETET*. Hat THEODOR, wie wir aus PLATO erkennen, das allgemeine Irrationale entdeckt, so ist sein Ruhm als großer Mathematiker allein hieraus gerechtfertigt; nicht aber, wenn er zu der schon bekannten Inkommensurabilität der Quadratdiagonale einige weitere Einzelfälle hinzugefügt hat.

Die Annahme, daß PLATO durch den Dialog *THEAETET* dem gestorbenen Freunde und Schüler hat ein Denkmal errichten wollen, hat uns zu Folgerungen geführt, welche in sich gut übereinstimmen, an keiner Stelle gegen bekannte Tatsachen verstoßen und so rückwirkend den Ausgangspunkt stützen. Indem wir die durch die Szenerie bedingten chronologischen Freiheiten abgrenzten, blieb ein Bestand von historischer Wahrheit, positiver Art bezüglich der persönlichen und wissenschaftlichen Charakteristik, mehr negativer Art bezüglich der Einkleidung.

Der Übergang THEODORS von der Philosophie zur Geometrie um 410 und der Tod THEAETETS 368 bilden die obere und die untere Grenze für die im *THEAETET* geschilderte Entwicklung der Kenntnis des Irrationalen, einsetzend bei dem vorher bekannten Einzelfalle $\sqrt{2}$, schließend mit der ersten Klassifikation der allgemeinen quadratischen Irrationalen.

Ich trage kein Bedenken, die These auszusprechen, deren Beweis durch das Folgende vervollständigt werden wird: Die mathematische Stelle im *THEAETET* ist die Geburtsurkunde des Irrationalen, ausgestellt von einem Zeitgenossen.

§ 3. Ergänzende Zeugnisse.

A. PLATO Staat VIII 546 C; Kommentare; EUKLIDScholien.

α) Die Leistung der Pythagoreer. In der Bestimmung der Faktoren der geometrischen Zahl, welche für die segensreiche Schließung

1) *Memorab.* IV, 2, 10 γεωμέτρης ἀγαθός, ὥσπερ ὁ Θεόδωρος.

2) Kommentar zu EUKLID 118, 7. Θεόδωρος ὁ μαθηματικός hat die Vereinigung des Geraden und Kreisförmigen bei der Entstehung der Schraubenlinie als *πρᾶσις* bezeichnet, was PROKLUS, GEMINUS folgend, nicht billigt.

menschlicher Ehen maßgebend sein soll, heißt es in PLATOS Staat VIII 546C ... *ἐκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ρητῶν πεμπάδος δεομένων ἐνὸς ἐκάστων, ἀρρήτων δὲ δυεῖν* „hundert Zahlen, genommen aus den rationalen Diagonalen der Fünffzahl, jede um eine Einheit vermindert; aus den irrationalen aber, jede um zwei vermindert.“

Seit der Veröffentlichung von PROKLUS' Kommentar zu PLATOS Staat¹⁾ kann es wohl nicht mehr zweifelhaft sein, daß die von CANTOR schon in die erste Auflage seiner *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* aufgenommene Deutung dieser Stelle das Richtige trifft.²⁾ *ἀριθμοὶ ἀπὸ διαμέτρων* sind Zahlen, welche durch Quadrieren der Diagonalen erhalten werden. Die rationale Diagonale eines Quadrates mit der Seite 5 ist nach festem Sprachgebrauch die ganze Zahl, welche der $\sqrt{50}$ am nächsten liegt: 7, ihr Quadrat also 49. Demnach bedeutet die erste Bestimmung $49 - 1 = 48$, im ganzen 4800. Die zweite ist entsprechend der ersten zu konstruieren: *ἐκατὸν δὲ ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ἀρρήτων πεμπάδος δεομένων δυεῖν ἐκάστων* „100 Zahlen, welche die Quadrate der irrationalen Fünferdiagonalen sind, jede vermindert um 2“. Irrationale Fünferdiagonale ist $\sqrt{50}$, ihr Quadrat 50, also gemeint ist $50 - 2 = 48$, im ganzen 4800. Der zweite Ausdruck ist wie der erste nichts als eine möglichst umständliche und geheimnisvolle Umschreibung des simplen Faktors 48, im ganzen 4800.

Die Bestimmung der Zeugungsperioden durch Zahlen, der für göttliche Zeugung günstigen durch die „vollkommene Zahl“ (*ἀριθμὸς τέλειος*), der für menschliche Geburten maßgebenden durch die geometrische Zahl (*ἀριθμὸς γεωμετρικός*) ist unbezweifelte pythagoreische Zahlensymbolik.

Auch daran hat niemand gezweifelt, daß die zur Einkleidung benutzten Einzelheiten pythagoreisches Gut sind, daß speziell die Erkenntnis der *ρητῇ* und *ἀρρήτος διάμετρος τῆς πεμπάδος* den Pythagoreern zu verdanken ist.³⁾ Schon 1886 hatte ZEUTHEN⁴⁾ darauf hingewiesen, daß „der exakte und allgemeingültige Beweis für diesen Satz“ in EUKLID II, 9, 10 liegt. Eben dies wird nun durch PROKLUS bestätigt.⁵⁾ Da aber das zweite Buch EUKLIDS sicher pythagoreischen Ursprungs ist, so haben wir jetzt den lückenlosen Beweis in Händen, daß die Aufstellung der Zahlenreihen für die inkommensurabeln und kommensurabeln Quadratdiagonalen und die damit zusammenhängenden Näherungswerte für $\sqrt{2}$ pythagoreische

1) ed. KROLL, Leipzig 1901, II, 38. 2) a. a. O. I¹, 1880, S. 191.

3) HULTSCH, *Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten*; Biblioth. Mathem. 1., 1900, S. 8: „Das war der Zahlentheorie der Pythagoreer entnommen.“

4) *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Kopenhagen 1886, S. 27.

5) a. a. O. 25, 17.

Leistungen sind.¹⁾ PROKLUS, hinter dem wir in allen diesen Fragen EUDEMUS vermuten dürfen, spricht das auch direkt aus.

Die Tatsache, daß schon die älteren Pythagoreer (berichtet wird, PYTHAGORAS selbst) eine Methode ersonnen haben, um ganzzahlige rechtwinklige Dreiecke in unbeschränkter Anzahl zu bilden²⁾, beweist an sich nur: es hatte sich ihnen subjektiv als unmöglich gezeigt, zu beliebigen ganzzahligen Katheten die Hypotenuse zahlenmäßig zu bestimmen. Auch die Aufstellung von „Näherungswerten“ für die Quadratdiagonale ist sehr wohl möglich³⁾, ohne daß die Unmöglichkeit der Lösung in ganzzahligen Verhältnissen zur Vermutung oder zur Sicherheit gekommen oder gar bewiesen worden wäre. Ohne diesen Unmöglichkeitsbeweis aber dürfen wir die Einsicht in die Natur der Irrationalen nicht als gewonnen ansehen.

Hier greift die mathematische *THEAETET*-Stelle und der von ARISTOTELES überlieferte, von EUKLID als veraltet ausgeschaltete Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ergänzend ein. Wir haben oben festgestellt: THEODOR kann die Irrationalität von $\sqrt{2}$ nur deshalb übergangen haben, weil sie vor ihm erkannt und bewiesen war; aber die Beweismethode hat er für die folgenden Quadratwurzeln benutzt und umgestaltet. Die *THEAETET*- und die Staatstelle zusammen mit dem PROKLUSkommentar verknüpfen sich nunmehr zu der Einsicht: Die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale mit der Quadratseite, d. h. die Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist als erster und einziger Fall des Irrationalen von den Pythagoreern erkannt und bewiesen worden.

Den Pythagoreern verdanken wir die Großtat der ersten Entdeckung des Irrationalen, aber nicht den älteren Pythagoreern und nicht PYTHAGORAS selbst. Abgesehen davon, daß eine solche Entdeckung des Gründers der Schule nicht glaubwürdig bezeugt ist, hätte die Tatsache, daß es ein Streckenverhältnis gibt, welches auf keine Weise in Zahlen ausgedrückt werden kann, als ein ungeheurer Widerspruch die Aufstellung des Satzes „Alles ist Zahl“, mag man ihn nehmen, in welchem Sinne man will, unmöglich gemacht. War aber die Zahlensymbolik einmal zur festen Lehre ausgestaltet, dann mußte und konnte sie das Vorhandensein der inkommensurablen Diagonale als vereinzelte Ausnahme ertragen.⁴⁾ Also erst die jüngeren Pythagoreer können diese Entdeckung gemacht haben.

1) Näheres s. HULTSCH, a. a. O. S. 10 und Exkurs II im Anhang von PROKLUS' Kommentar ed. KROLL, S. 393—400. Siehe auch oben S. 103.

2) PROKLUS, im Kommentar zu EUKLID 428. HERO, ed. HULTSCH S. 56, 146.

3) Siehe oben S. 108.

4) Zu demselben Ziele führen die Überlegungen von ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Kopenhagen 1896, S. 65. Vgl. JUNGE, a. a. O.

β) Untere und obere Abgrenzung von THEAETETS Leistung. Alle alten Kommentatoren und Scholiasten haben, wenn man die einzige unhaltbare PROKLUSstelle (65, 19) ausnimmt, das Wesentliche des Vorgangs richtig überliefert: Pythagoreer, nicht PYTHAGORAS, haben das Irrrationale entdeckt; die Verallgemeinerung, den Ausbau, die Klassifikation haben sie nicht vollzogen. So berichtet der Scholiast zu EUKLID X¹⁾, den HEIBERG aufgenommen hat, so auch der, welcher den Weg durchs Arabische gemacht hat und von WOEPCKE zum Teil ins Französische übersetzt worden ist²⁾: „Cette théorie prit naissance dans l'école de PYTHAGORE“. Beide Scholiasten haben, wie HEIBERG nachgewiesen hat³⁾, aus PAPPUS, also einer guten Quelle, geschöpft. Der Araber (ABU OTHMAN von Damaskus) beruft sich sogar einmal, und zwar an einer für uns äußerst wichtigen Stelle, auf „den Peripatetiker EUDEMUS“. Er selbst, oder schon seine griechische Vorlage, hält den geschichtlichen Überblick ganz frei von der Mystik des griechisch überlieferten Scholiasten; er macht bemerkbar, wo er seine Quellen reden läßt, und wo er selbst das Wort nimmt.

Hinter der oben zitierten Stelle fährt er fort: „Elle fut considérablement développée par THEÉTÈTE l'Athénien, qui fit preuve, dans cette partie des mathématiques, et dans d'autres, d'une sagacité qui lui a valu une juste admiration . . . comme PLATON lui en donne le témoignage dans l'ouvrage qu'il intitula d'après son nom. Quant aux distinctions exactes des susdites quantités, et aux démonstrations rigoureuses des propositions auxquelles cette théorie donne lieu, je crois qu'elles furent établies principalement par ce mathématicien.“ So weit hat er keine andere Quelle als den PLATONischen Dialog und kann aus ihr keinen anderen Anteil THEAETETS an der Entwicklung des Irrationalen herauslesen als wir: Definition, Klassifikation, exakte Beweise. Daß er hier wie wir auf Schlüsse angewiesen ist, drückt er aus durch sein „je crois“. Der arabische Scholiast erwähnt ebensowenig wie der griechische⁴⁾ den Anteil THEODORS. Der Grieche weist das allgemeine Irrrationale, die Entdeckung

S. 12. Weitere Gründe siehe in meiner Abhandlung: *Die Geometrie des PYTHAGORAS* und unten S. 144—147.

1) *Opera*, ed. HEIBERG V, S. 415—417.

2) *Essai d'une restitution de travaux perdus d'APOLLONIUS sur les quantités irrationnelles*; Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences 14, Paris 1856, p. 691.

3) *Literaturgeschichtliche Studien über EUKLID*, Leipzig 1882, S. 169—171. — *Om Scholierne til EUCLIDS Elementer*; Danske Vidensk. Selsk. Skrifter (Hist. Afd.) 2^o, 1888, S. 10—13. Résumé en français p. 71. — *Paralipomena zu EUKLID*; Hermes 38, 1903, S. 57, 345.

4) Siehe oben S. 115.

THEODORS, THEAETET zu; der Araber charakterisiert zwar die Leistung THEAETETS richtig, schließt sie aber direkt an die Pythagoreer an. Vielleicht erwähnt er THEODOR deshalb nicht, weil er ihn, wie JAMBlichus, zu den Pythagoreern rechnet. Dem Griechen wie dem Araber gegenüber sind wir berechtigt, an der im § 1 gewonnenen, durch § 2 bestätigten Scheidung der Leistungen THEODORS und THEAETETS festzuhalten und damit THEODOR zu der ihm lange versagten Anerkennung zu verhelfen.

Nach einer auf APOLLONIUS bezüglichen Einschaltung fährt der Araber fort: „Car THÉÉTÈTE avait distingué les puissances commensurables en longueur d'avec les incommensurables, et avait divisé les espèces très-connues des lignes irrationnelles d'après les différentes médiétés, assignant la médiale à la géométrie, la droite de deux noms à l'arithmétique, et l'apotome à l'harmonie¹⁾, comme cela est rapporté et raconté par EUDÈME le Péripatéticien.“

Sind wir, wie die Scholiasten, für die Feststellung der unteren Grenze von THEAETETS Anteil an der Entdeckung des Irrationalen auf PLATOS Dialog angewiesen, so werden wir hier über die obere Grenze, für die der Dialog nach der Art seiner Komposition versagen muß, aus der reinsten und tiefsten Quelle belehrt, aus der leider verlorenen Geschichte der Geometrie von ARISTOTELES' Schüler EUDEMUS: THEAETET ist über die Hauptscheidung der Größen in $\zeta\eta\tau\acute{\alpha}$ und $\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\alpha$, der $\zeta\eta\tau\acute{\alpha}$ in ihre Gattungen $\mu\eta\kappa\epsilon\iota\ \zeta\eta\tau\acute{\alpha}$ und $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\ \mu\acute{o}\nu\omicron\nu\ \zeta\eta\tau\acute{\alpha}$ hinausgelangt auch zu den Gattungen der $\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\alpha$: $\mu\acute{\epsilon}\sigma\eta$, $\acute{\epsilon}\kappa\ \delta\upsilon\omicron\iota\nu\ \delta\upsilon\nu\omicron\mu\acute{\alpha}\tau\omicron\iota\nu$, $\acute{\alpha}\pi\omicron\tau\omicron\mu\acute{\eta}$.

Hier setzt EUKLID ein: „Quant à EUCLIDE, il se proposa de donner des règles rigoureuses qu'il établit relativement à la commensurabilité et l'incommensurabilité en général; il précisa les définitions et les distinctions des quantités rationnelles et irrationnelles, il exposa un grand nombre d'ordres des quantités irrationnelles, et, en dernier lieu, il démontra clairement toute leur étendue“ — nämlich die Lösung nicht nur der quadratischen, sondern auch der biquadratischen Gleichung.²⁾ Das ist, natürlich nicht mehr aus EUDEMUS, dessen Geschichte der Geometrie mit ARISTOTELES' Altersgenossen, PLATOS Schüler PHILIPPUS schloß, sondern aus dem Vergleich von EUKLIDS Elementen mit THEAETETS Leistungen gezogen, die Ausführung der von PROKLUS (68, 8—9) gegebenen Andeutung: *Εὐκλείδης . . . πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος*.

1) Hierzu die Erklärungen von WOEPCKE, a. a. O. S. 692 Note 1.

2) Die Analyse siehe WOEPCKE, a. a. O., S. 677—685 — G. LORIA, *Le scienze esatte nell' antica Grecia*; Memorie della r. accademia in Modena 11., 1895, p. 44—49.

B. PLATO, Gesetze VII.

a) Wie weit reicht PLATOS Kenntniss des Irrationalen? Im siebenten Buch der Gesetze bestimmt PLATO für alle Freien nach Abschluß der Elemente und des Musikunterrichts Unterricht in der Zahlenlehre, der Maßlehre und der Astronomie. (817 E) „Danach erlösen sie die Kinder von einer lächerlichen und schmähhchen Unwissenheit über das Ausmessen von Länge, Breite und Tiefe, welche allen Menschen von Natur anhaftet“ (*ἐνοῦσάν τινα φύσει γελοίαν τε καὶ αἰσχρὰν ἄγνοϊαν ἐν τοῖς ἀνθρώποις πᾶσιν* 819 D). Auf die Frage des Mitunterredners fährt der Athener fort (819 D): *παντάπασί γε μὴν καὶ αὐτὸς ἀκούσας ὅψε ποτε τὸ περὶ ταῦτα ἡμῶν πάθος ἐθαύμασα, καὶ ἔδοξέ μοι τοῦτο οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ ὑγνῶν¹⁾ τινων εἶναι μᾶλλον θρεμμάτων, ἢ σχύνην τε οὐχ ὑπὲρ ἐμαυτοῦ μόνον ἀλλὰ καὶ ὑπὲρ πάντων τῶν Ἑλλήνων.* „Mich ergriff große Verwunderung über dies Verhalten, als ich selbst, und zwar erst spät, darüber Aufklärung erhielt. Dieser Zustand schien mir mehr schaf- als menschenwürdig zu sein, und ich schämte mich nicht allein über mich, sondern über alle Hellenen insgesamt.“ Und weiter (820 A): *μῆκος τε καὶ πλάτος πρὸς βάθος, ἢ πλάτος τε καὶ μῆκος πρὸς ἄλληλα, ἃ οὐ διανοοῦμεθα περὶ ταῦτα οὕτως Ἑλληνες πάντες, ὥς δυνατὰ ἐστὶ μετρεῖσθαι πρὸς ἄλληλα ἁμῶς γέ πως;* „Sind nicht wir Hellenen alle des Glaubens, daß Länge und Breite gegen Tiefe, oder Breite und Länge gegeneinander stets auf irgendeine Weise meßbar sind?“ *Εἰ δ' ἔστιν αὐ μῆδαμῶς μῆδαμῇ δυνατὰ, πάντες δ', ὃ περ εἶπον, Ἑλληνες διανοοῦμεθα ὥς δυνατὰ, μὴν οὐκ ἄξιον ὑπὲρ πάντων αἰσχυνθέντα εἰπεῖν . . .* (820 B). „Wenn es nun derartige Größen gibt, die auf keinerlei Weise miteinander meßbar sind, wir Hellenen aber trotzdem alle Größen für meßbar halten, ist es da nicht richtig, sich im Namen aller zu schämen und sie anzureden“ . . .?

Es ist die Frage aufgeworfen worden²⁾, ob die wiederholt gebrauchten Wörter *μῆκος*, *πλάτος*, *βάθος* als die Namen der drei Dimensionen „Länge, Breite, Tiefe“ oder im Sinne von *μῆκος ἔχοντα*, *πλάτος ἔχοντα*, *βάθος ἔχοντα*, also im Sinne von „Linie“ „Fläche“ (*ἐπιπεδον*), „Körper“ (*στερεόν*) gebraucht sind. RITTER bestreitet nicht die Möglichkeit der ersten Auffassung, aber er tritt für die Zulässigkeit auch der zweiten ein. Im ersten Sinne bedeutet die Verwendung und Wiederholung der drei Worte nur die stark betonte Versicherung, daß für die vorliegende Frage der

1) Das Schwein ist das Sinnbild der Dummheit; vgl. *LACHES* 196 D: *κατὰ τὴν παροιμίαν ἄρα τῷ ὄντι οὐκ ἂν πᾶσα ὕς γνῶιη*. Um dem Sinne gerecht zu werden, setze ich in der Übersetzung das Schaf ein.

2) C. RITTER, *PLATON Gesetze, Kommentar*, Leipzig 1896, S. 221—226.

Kommensurabilität oder Inkommensurabilität die räumliche Lage der zu vergleichenden Strecken, die Art ihres Auftretens an einem Körper, etwa einem Quader, gänzlich gleichgültig ist. Im zweiten Sinne aber würden nicht nur Linien mit Linien, sondern auch Flächen mit Flächen und Körper mit Körpern verglichen.

Die RITTERSche Auffassung, die sich für die übrigen Stellen wohl halten läßt, scheitert, wie mir scheint, an 820A. Denn hier sollen ausdrücklich $\mu\eta\kappa\omicron\varsigma \tau\epsilon \kappa\alpha\iota \pi\lambda\acute{\alpha}\tau\omicron\varsigma \pi\rho\omicron\varsigma \beta\acute{\alpha}\theta\omicron\varsigma$, $\eta \pi\lambda\acute{\alpha}\tau\omicron\varsigma \tau\epsilon \kappa\alpha\iota \mu\eta\kappa\omicron\varsigma \pi\rho\omicron\varsigma \acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\alpha$, also, wenn RITTERS Deutung konsequent festgehalten wird, Größen verschiedener Dimensionen miteinander gemessen werden. Zwar will RITTER aus dieser Stelle herauslesen (S. 222): „Wie groß die Länge der Seite eines Quadrats von bestimmtem Flächeninhalt oder auch wie groß der Rauminhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit bestimmter Seitenlänge (der Kreisinhalt aus dem Radius berechnet) sei ($\pi\lambda\acute{\alpha}\tau\omicron\varsigma \tau\epsilon \kappa\alpha\iota \mu\eta\kappa\omicron\varsigma \pi\rho\omicron\varsigma \acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\alpha$), wie groß die Länge der Kante eines Würfels von bestimmtem Rauminhalt ($\mu\eta\kappa\omicron\varsigma \pi\rho\omicron\varsigma \beta\acute{\alpha}\theta\omicron\varsigma$) oder wie groß die Oberfläche einer Kugel von bestimmtem Rauminhalt sei ($\pi\lambda\acute{\alpha}\tau\omicron\varsigma \pi\rho\omicron\varsigma \beta\acute{\alpha}\theta\omicron\varsigma$).“ Diesen Sinn aber können diese Worte nicht haben: Es ist z. B. mit $\mu\eta\kappa\omicron\varsigma \pi\rho\omicron\varsigma \beta\acute{\alpha}\theta\omicron\varsigma$ nicht gesagt, „wie groß die Länge der Kante eines Würfels von bestimmtem Rauminhalt sei“, sondern ob $\mu\eta\kappa\omicron\varsigma \pi\rho\omicron\varsigma \beta\acute{\alpha}\theta\omicron\varsigma \dots \delta\upsilon\nu\nu\alpha\tau\acute{\alpha} \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota \mu\epsilon\tau\rho\epsilon\iota\sigma\theta\alpha\iota$, d. h. schlecht und recht, ob $\mu\eta\kappa\omicron\varsigma$ und $\beta\acute{\alpha}\theta\omicron\varsigma$ miteinander meßbar sind; und diese Frage in dem Sinne, den RITTER den Worten $\mu\eta\kappa\omicron\varsigma$, $\pi\lambda\acute{\alpha}\tau\omicron\varsigma$, $\beta\acute{\alpha}\theta\omicron\varsigma$ geben will, konsequent zu stellen, ist unmöglich. Es ist unmöglich, ungleichartige Größen durcheinander zu messen (EUKLID V def. 1, 2; X def. 1). Die Griechen aber sind in diesem Punkte viel peinlicher als wir.

Ebensowenig kann ich der Folgerung zustimmen, welche RITTER (S. 223—225) aus der Beziehung der Linien, Flächen und Körper zueinander zieht: „Immerhin wäre es dem PLATO zuzutrauen, daß er eben aus BRYSONS Versuchen herausgefunden hätte, die Aufgabe“ (Aufsuchen eines Verhältnisses zwischen Kreisfläche und Quadrat) „sei in strengem Sinne nicht lösbar, und daß er sie dann mit der ebenfalls unlösbaren Aufgabe der Ausmessung von Quadratseite und Diagonale als gleichartig erkannt hätte.“

Erstens haben wir, wie RITTER selbst zugesteht, „das zu behaupten keinen genügenden Anhalt“. Zweitens dürfen wir PLATO keineswegs den Analogieschluß zutrauen: Für die Kreisquadratur lassen sich wie für die Quadratdiagonale Näherungswerte finden, also wird die Kreisfläche irrational sein wie die Quadratdiagonale. Für die Quadratdiagonale waren nicht nur Näherungswerte, sondern der Beweis der Irrationalität überliefert. Auf $\sqrt[3]{2}$ usw. ließ dieser Beweis sich übertragen; deshalb konnte er dem jungen THEAETET die Vermutung der Irrationalität der

Kubikwurzeln in den Mund legen, obgleich ihre geometrische Realität noch nicht erwiesen war. Näherungswerte für Kreisumfang und Inhalt sind seit Urzeiten viele aufgestellt worden; auch ARCHIMEDES hat Näherungswerte für den Kreisumfang berechnet, aber die Inkommensurabilität zu behaupten, ist ihm nicht eingefallen; denn diese konnte durch noch so viele und noch so genaue Näherungswerte nicht bewiesen werden. Dieselbe Zurückhaltung müssen wir PLATO zutrauen. Gar vor dem Begriffe der Berechnung „mit unendlich zunehmender Annäherung“, von dem RITTER spricht, hätte PLATO wie jeder andere griechische Mathematiker und Philosoph sich entsetzt.¹⁾ Die Quadratur des Kreises gehörte wie die Verdoppelung des Würfels zu den ungelösten, nicht zu den unlösbaren Problemen.

Wenn PLATO es als eine Schmach für die Hellenen erklärt, daß sie alle Größen für meßbar halten, eine Schmach, nur gemildert durch den Umstand, daß diese Unwissenheit der menschlichen Natur anhaftet, so dürfen wir diesen Ausdruck des Unmuts nicht so auffassen, als ob zur Zeit, da er die Gesetze schrieb (nach 360), die Irrationalität wirklich allen Hellenen unbekannt gewesen wäre. PLATO selbst verwendet im *HIPPIAS major*, der zwischen 399 und 390 angesetzt wird, neben dem Gegensatz von Gerade und Ungerade, den von *ῥητόν* und *ἄῤῥητον* als bekannte Tatsache, im Gespräch, nicht in gelehrter Auseinandersetzung. Mag er ihn auch anachronistisch SOKRATES in den Mund legen, so muß er selbst ihn doch schon um diese Zeit gekannt haben und diese Kenntnis auch, wenn nicht anders, durch ihn selbst verbreitet worden sein. 399 läßt er die Besprechung über das Irrationale zwischen THEODOR, THEAETET und SOKRATES vor sich gehen in dem um 367 abgefaßten *THEAETET*. Im Staat, welcher derselben Periode angehört, kommt sowohl die pythagoreische rationale und irrationale Diagonale wie kurz vorher der Begriff des Rationalen im allgemeinen Sinne vor (*ῥητὰ καὶ προσήγορα πάντα*). Demnach sind PLATOS Worte nicht wie ein geschichtliches Datum zu betrachten; der Unmut über die allgemeine Unkenntnis hat ihm hier geradeso scharfe und übertreibende Ausdrücke diktiert, wie im Staat bezüglich der erst zu entwickelnden Stereometrie.

Denn PLATO, der Philosoph, verlangt mehr als die bloße Kenntnis der Irrationalität als einer mathematischen Tatsache: *καὶ πρὸς τούτοις γε ἄλλα ἔστι τούτων ξυγγενῆ . . . τὰ τῶν μετρητῶν τε καὶ ἀμέτρων*

1) Siehe oben S. 108 Anm. 2. Die Kreisquadratur durch „unendlich zunehmende Annäherung“ enthielt für die griechischen Philosophen einen Widerspruch gegen die unendliche Teilbarkeit der geometrischen Größe. Vgl. F. RUDIO, *Der Bericht des SIMPLICIUS über die Quadraturen des ANTIPHON und des HIPPOKRATES*, Leipzig 1907, S. 5, 26—31, 103—109.

πρὸς ἄλληλα, ἥτινι φύσει γέρονε. ταῦτα γὰρ δὴ σκοποῦντα δια-
γιγνώσκειν ἀναγκαῖον ἢ παντάπασιν εἶναι φαῦλον (820 B, C). „Und
dazu kommt etwas anderes, damit Verwandtes . . . Die Natur der meß-
baren und unmeßbaren Größen muß man erforschen und gründlich er-
kennen, oder man bleibt gänzlich unwissend.“ Also hinter der Tat-
sache der Irrationalität steht die Frage nach ihrem Wesen.¹⁾ Das ist
der Punkt, an dem PLATOS philosophisches Staunen einsetzt und sein
Unwille über das gleichgültige und unwissende Geschlecht.

Ich fürchte, ein philosophischer Kopf, der heute durch die Lande
ginge und bei den Gebildeten, sagen wir bei denen, welche die höheren
Schulen besucht haben, Umfrage nach der Natur des Irrationalen hielte,
hätte geradeso Grund, sich über die Unwissenheit und Gedankenlosigkeit
seiner Zeitgenossen zu schämen, wie seinerzeit PLATO über die Hellenen.
Wer wundert sich denn heute über die Ungeheuerlichkeit, daß gewisse
real vorhandene Strecken unmeßbar sind? Die Griechen hielten die
Wunde offen und regten das Staunen an, indem sie sagten: dieses Ver-
hältnis ist keine Zahl. Wir haben das Irrationale in die Zahlen auf-
genommen und verstecken die Schwierigkeit des Begriffs hinter einem
Wort. Denn hier, wo das Unmeßbare zuerst auftritt, zeigt sich der
Widerspruch zwischen Messen und Konstruieren, zwischen Denken und
Anschauen. Über die Kluft, welche zwischen der unstetigen, diskursiv ge-
bildeten Zahlengröße und der in Empfindung und Anschauung gegebenen
stetigen Raum-, Zeit- und Intensitätsgröße gähnt, baut weder die Logik
noch die Rechenkunst eine Brücke. Wir müssen den Sprung wagen, die
Springstange ist ein Axiom, gleichviel ob von ARISTOTELES-ARCHIMEDES,
von CAUCHY, DEDEKIND oder WEIERSTRASS. Ein Rätsel war die φύσις des
Irrationalen und wird es bleiben. Daraufhin geht PLATOS Fragestellung, sein
Erstaunen und seine Entrüstung; denn ihm ist die Mathematik, so hoch
er sie schätzt, nicht Selbstzweck: sie ist Vorstufe zur Erforschung des
wahrhaft Seienden.

β) Wann hat PLATO das Irrationale kennen gelernt? Die
Erklärung des athenischen Gastfreundes, zu seiner Beschämung habe er
selbst „erst spät“ von dem Irrationalen gehört (819D αὐτὸς ὅψε ποτε
ἀκούσας) „kann man doch wohl nicht anders verstehen, als daß sie eine
Mitteilung PLATOS über seine eigene Person enthalten sollte.“²⁾ Von „spät“
kann PLATO entweder absolut sprechen, d. h. „in hohem Alter“, oder re-
lativ, indem er eine gewisse Altersstufe als die normale Erlernungszeit
des Irrationalen zugrunde legt.

1) RITTER, a. a. O. S. 228 versteht unter φύσις entweder die Theorie der In-
kommensurabeln oder die Inkommensurabilität nicht nur der Strecken.

2) RITTER, a. a. O. S. 227. Ebenda das Folgende.

Absolut „spät“ könnte im Munde des etwa siebzigjährigen PLATO nicht wohl eine frühere Zeit bedeuten, als das Lebensjahrzehnt von 50—60 Jahren, also um 372 herum. Das würde aber etwa 20 Jahre später sein, als er selbst im *HIPPIAS major* das Irrrationale erwähnt hat; mehr als 25 Jahre später, als THEODOR und THEAETET im fingierten Gespräch darüber verhandeln. In denselben Widerspruch führt RITTERS Deutung des „spät“: zusammen „mit der 821E nachfolgenden Angabe, daß er im Alter astronomische Belehrungen empfangen habe“, und „daß nach 951E (vgl. 818A) der richtige Zeitpunkt für den Beginn mathematischer Studien ihm zwischen dem 30. und 40. Jahr zu liegen schien, wird man jenes *ὅψέ ποτε* nicht eben auf jene Zeit des besten Mannesalters beziehen können“. Gewiß, wäre das Alter von 30—40 Jahren die Normalzeit, dann würde das „spät“ wieder auf das unmögliche 6. Lebensjahrzehnt PLATOS führen. Aber nicht nur diese Konsequenz macht den RITTERSchen Ansatz verdächtig, auch seine Gründe sind nicht stichhaltig: die Angabe 821E, daß PLATO *οὔτε νέος οὔτε πάλαι* Astronomie gelernt hat, steht in keiner Beziehung zur Erlernung des Irrrationalen; 951E handelt es sich erstens nicht um Mathematik und zweitens nicht um den ordnungsmäßigen Unterrichtsgang, sondern um Entgegennahme des Rechenschaftsberichts, den ältere auf Reisen geschickte Männer über ihre Erfahrungen ablegen vor den Gesetzeswächtern und einzelnen, von diesen ausgewählten im 4. Lebensjahrzehnt stehenden Begleitern.

PLATO hat sowohl in den Gesetzen wie im Staat keinen Zweifel gelassen, daß er die über die Elemente hinausgehende, aber noch nicht fachmännische, für alle Freien verbindliche Belehrung über Arithmetik, Geometrie und Astronomie in das 16. bis 18. Lebensjahr setzt, nachdem vom 10. bis 12. Jahre die *γράμματα* erlernt sind, vom 13. bis 15. Jahre Musik begonnen ist¹); natürlich immer neben der Gymnastik. PLATO betont geflissentlich, daß, wie in Ägypten, die Knaben spielend (*παίζοντες* 819B) an diese Lehrgegenstände geführt werden sollen, und daß diese ganze Belehrung der Jugendzeit angehört.²) Er tritt im allgemeinen dem SOLONISCHEN Grundsatz entgegen³): *Σόλωνι γὰρ οὐ πειστέον ὡς γηράσκων τις πολλὰ δυνατός μανθάνειν*, und im besonderen macht er THEAETET als *μειράκιον* zum Schüler THEODORS. Über das 18. Jahr hinaus genießen nur diejenigen mathematische und philosophische Sonderschulung, welche

1) Gesetze VII, 809 E, 810 A.

2) 820D *ταῦτα τοὺς νέους δεῖν μανθάνειν. μετὰ δὲ παιδείας ἅμα μανθανόμενα.* 820E *Ἀστρων δὴ τὸ μετὰ ταῦτα ὅρα τὴν μάθησιν τοῖς νέοις.* 822A *προσέχον δ' αὐ μαθεῖν τοῖς νέοις.* 822D *ἤδη τοίνυν χρὴ φάναι τέλος ἔχειν τὰ γε παιδείας μαθημάτων περὶ νόμιμα.* Und nachdem noch die Jagd besprochen ist: 824C *τέλος ἔχειν τὰ γε παιδείας περὶ νόμιμα.*

3) Staat VII, 536 D.

sich im allgemeinen Unterricht ausgezeichnet haben und zu Staatsleitern ausgebildet werden sollen.¹⁾

Legen wir diesen Maßstab an das $\delta\psi\acute{\epsilon}\ \pi\omicron\tau\epsilon$, so paßt es gut auf die Zeit, zu welcher PLATO nach DIOGENES LAERTIUS²⁾ THEODOR in Kyrene aufgesucht und seinen Unterricht genossen haben soll. Er dürfte damals, Mitte oder Ende der Neunziger Jahre, 32—36 Jahre alt gewesen sein, also doppelt so alt, wie er es für diese Studien angemessen hielt.

Nimmt man dagegen an, daß PLATO vor seinen Reisen, also schon zu SOKRATES' Lebzeiten, den THEODOR in Athen kennen gelernt hat³⁾, so ist einerseits das $\delta\psi\acute{\epsilon}\ \pi\omicron\tau\epsilon$ nicht genügend begründet, andererseits ist nach dem, was wir von PLATOS Entwicklung wissen, zu vermuten, daß damals der Mathematiker auf den ganz von SOKRATES' ethischen Problemen gefesselten Jüngling keine Anziehungskraft ausgeübt haben würde. Auch ist ein Aufenthalt THEODORS in Athen von keiner Seite her bezeugt; denn die Szenerie des THEAETET ist nicht das geschichtliche Zeugnis, wofür man sie gehalten hat. Hätte aber THEODOR sich vor SOKRATES' Tode wirklich in Athen aufgehalten und hätte nur PLATO aus persönlichen Gründen seine Lehren nicht kennen gelernt, so hätten doch andere Athener von ihm gelernt. Das wäre jedoch genau die Umkehrung des von PLATO in den Gesetzen geschilderten Verhaltens, wonach PLATO zwar spät, aber doch als einer der Ersten das Irrationale kennen gelernt hat, während alle anderen Hellenen noch in Unwissenheit verharrten.⁴⁾

Noch spätere Reisen THEODORS nach Athen sind wegen seines hohen Alters unwahrscheinlich; aus demselben Grunde ist es auch unwahrscheinlich, daß der junge THEAETET, zu Jahren gekommen, den Unterricht THEODORS wie PLATO noch hätte in Kyrene genießen und die gewonnenen Kenntnisse im übrigen Hellas verbreiten können.⁵⁾

So bestätigen und verstärken die geschichtlichen Angaben der Gesetze die aus dem THEAETET gezogenen Argumente: THEODOR hat, wahrscheinlich nicht früher als im letzten Jahrzehnt des 5. Jahrhunderts, die allgemeine Natur des Irrationalen erkannt und hat PLATO in Kyrene im ersten Jahrzehnt des 4. Jahrhunderts in diese Kenntnis eingeführt. THEAETET hat die Lehre von PLATO, also aus zweiter Hand, empfangen und weitergebildet.

1) Staat VII, 535 ff. 2) II, 103 und III, 6.

3) Wie ZELLER, a. a. O. II³, S. 357 Anm. 1 und 2 und GOMPERZ, a. a. O. S. 558.

4) Daß Lehren, welche in entlegeneren Teilen der griechischen Welt ihren Ursprung hatten, in Athen, dem Mittelpunkte des Geisteslebens, jahrzehntelang unbekannt bleiben konnten, beweist das Beispiel DEMOKRITS. Vgl. USENER, *Kleine Schriften*, S. 90; DIELS, *Über die ältesten Philosophenschulen*, 1887, S. 258.

5) Siehe oben S. 126.

In das Bild, welches wir uns von PLATON mathematischer Forschungstätigkeit im allgemeinen machen¹⁾, fügt sich sein Anteil an der Entwicklung des Irrationalen, wie er sich hier ergibt, ergänzend ein. PLATO schätzt die Mathematik hoch als formale und materielle Vorstufe der Philosophie; er nimmt mit Eifer und Verständnis ein Problem auf, ordnet es ein, verbreitet die Lösung, regt zur Weiterbildung an, fördert die Methode; aber er ist als Mathematiker nicht eigentlich schöpferisch.

§ 4. Die Terminologie.

I. Bei PLATO.

1. Pythagoreisch.

διάμετρος ῥητή διάμετρος ἄῤῥητος

2. THEODORISCH.

σύμμετρον		οὐ σύμμετρον
		(einmal ἀσύμμετρον Tim. 87 D)
τὰ μὲν δυνατὰ	} μετρεῖν μετρεῖσθαι	τὰ δὲ μὴ . . .
δυνατὸν		
μετρητόν		ἄμετρον
ἕμμετρον		
ῥητόν		ἄῤῥητον
προσῆγορον		

3. THEAETETISCH.

μήκος δύναμις
 δυνάμεις

Niemals kommt bei PLATO ἄλογον = irrational vor.

II. Bei ARISTOTELES.

σύμμετρον	ἀσύμμετρον
ἐν ἀριθμοῖς	οὐκ ἐν ἀριθμοῖς
κατ' ἀριθμούς	
ἐν ἀριθμοῖς ἐβλογίστοις	
ἀνὰ λόγον	
κατὰ λόγον	οὐ κατὰ λόγον
ἐν λόγῳ	ἐν οὐδενὶ λόγῳ
λόγῳ τινί	οὐδένα λόγον ἔχει
	ἄλογον (einmal Anal. post. 76 b 9)
Niemals ῥητόν	Niemals ἄῤῥητον

III. De insec. lineis.

σύμμετρον	ἀσύμμετρον
σύμμετρον μήκει	σύμμετρον δυνάμει
ῥητὸν μήκει, ῥητὸν δυνάμει μόνον	Gegensatz ἄλογον
	(ἀποτομή, ἐκ δυοῖν ὀνομάτων)
Niemals	ἄῤῥητον.

1) Vgl. PROKLUS im Kommentar zu EUKLID S. 66, 8—14; 68, 1—4 und BLASS, *De PLATONE Mathematico*, 1861, S. 30.

A. Vor ARISTOTELES.

α) PLATO. In PLATOS Terminologie lassen sich drei Schichten erkennen: die älteste, die pythagoreische, welche *ῥητόν* und *ἄῤῥητον* nur in Beziehung auf die Quadratdiagonale verwendet; die jüngste, welche wie jene nur einmal auftaucht, indem sie die Klassifikation THEAETETS durch die Worte *μήκος* und *δύναμις* andeutet; und zwischen beiden die Ausdrücke, welche sich an THEODORS Entdeckung des allgemeinen Irrationalen anlehnen.

Der Standpunkt des Wissens, den PLATO bei seinen Hörern und Lesern voraussetzen durfte, war offenbar der THEODORISCHE; auf ihm bewegt er sich ausschließlich, mit Ausnahme jener beiden, ganz besonderen Zwecken dienenden Stellen. Ihm gehören die zum allgemeinen Gebrauch erweiterten Worte *ῥητόν* und *ἄῤῥητον*, ihm die von THEODOR selbst gebrauchten Grundbezeichnungen *σύμμετρον* und *οὐ σύμμετρον*, ihm die umschreibenden Synonyma wie *προσέγγρον*, *μετρητόν*, *ἔμμετρον*, *δυνατόν μετρεῖν*, *δυνατόν μετρεῖσθαι* und ihre Gegensätze an.

PLATOS Terminologie zeigt eine große Beweglichkeit. Statt der technischen Bezeichnungen werden eine Fülle von Umschreibungen gebraucht, und umgekehrt werden die technischen Worte, wie *ῥητόν* und *ἄῤῥητον* oft in ihrem ursprünglichen, allgemeinen Sinne verwendet¹⁾; der Gegensatz von *σύμμετρον* ist nicht das später allein gebrauchte konträre *ἀσύμμετρον*, sondern bis auf einen Fall das kontradiktorische *οὐ σύμμετρον*; die Negation ist mit dem Stammwort noch nicht zu einem Terminus verwachsen. Nehmen wir hinzu den freien Gebrauch der Worte *μήκος* und *δύναμις*, die Umschreibung von *δύναμις* durch *δυναστευομένη*, so ergibt sich, daß die Terminologie dieses Gebiets zu PLATOS Zeit unfest und im Werden begriffen war. Diese Erscheinung weist darauf hin, daß die Lehre vom Irrationalen selbst zu dieser Zeit neu und in der Entwicklung war.²⁾

Als älteste Termini treten uns *ῥητόν* und *ἄῤῥητον* entgegen. Der ersterfundene muß das Wort *ἄῤῥητον* gewesen sein; dieses hat dann zu seinem Gegensatz das *ῥητόν* gefordert. Denn so ist der Gang der Begriffserweiterung: die durch Zählen entstandenen Zahlen hießen einfach Zahlen; erst als die Brüche entdeckt waren, forderten sie als Gegensatz die ganzen Zahlen; erst die Entdeckung der negativen Zahlen hat den vorher bekannten Zahlen die Bezeichnung positiv verschafft. Geradeso ist *ῥητόν* („aussprechbar“) durch *ἄῤῥητον* („unaussprechbar“) hervorgerufen; und so beweist die Logik der Sprache, daß *ἄῤῥητον* die erste Bezeichnung der neu entdeckten Größen gewesen sein muß.

1) z. B. *Sophistes*, 238, 239, 241 synonym *ἄφθρηκτα καὶ ἄῤῥητα καὶ ἔλογα*.

2) TANNERY, *Sur la langue mathématique de PLATON*, p. 95 (Hinweis auf *Revue philosophique* 1, 1876, p. 485; 2, 1876, p. 286) sagt in bezug auf das Irrationale: „j'ai admis que la langue technique était à cette époque passablement flottante“.

Diese Bezeichnung der Gegensätze muß zu PLATOS Zeit noch durchaus herrschend gewesen sein. Das später als Gegensatz von *ῥητόν* gebrauchte *ἄλογον*, dessen Übersetzung unser „irrational = verhältnislos“ ist, kommt bei PLATO nie vor.¹⁾

β) PYTHAGORAS. Diejenigen, welche in PYTHAGORAS den Entdecker des Irrationalen sehen, berufen sich auf zwei Schriftstellen, in denen das Wort *ἄλογον* die frühzeitige Kenntnis des Irrationalen beweisen soll. Es ist die vielerwähnte PROKLUSSTELLE (Kommentar zu EUKLID 65, 19—20) [*Πυθαγόρας*], *ὃς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν . . . ἀνεῦρεν*, und der von DIOGENES LAERTIUS (IX, 47) überlieferte Titel einer Schrift DEMOKRITS *περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν α' β'*.

Bisher ist gegen die *ἀλόγων πραγματεία* des PYTHAGORAS geltend gemacht worden²⁾: Die Handschriften sind schwankend; wahrscheinlich ist *ἀλόγων* durch *ἀναλόγων*, *ἀναλογιῶν* oder *ἀνὰ λόγον*³⁾ zu ersetzen. Sollte PROKLUS doch *ἀλόγων* geschrieben haben, so beweist die Zahlenlehre der Pythagoreer und die Entwicklung der älteren griechischen Geometrie, daß er sich geirrt hat. Der Relativsatz *ὃς . . . ἀνεῦρεν* geht nicht auf EUDEMUS zurück, sondern ist eine aus der Tradition entnommene Parenthese. Dies dritte Argument erfährt jetzt aus der Entwicklung der Terminologie eine Verstärkung: Der Historiker EUDEMUS, der Schüler und Mitarbeiter des ARISTOTELES, kann unmöglich das Wort *ἄλογον*, das zu seiner Zeit für *ἄρρόητον* eintrat⁴⁾, anachronistisch in die Zeit des PYTHAGORAS zurückverlegt haben. Das *ἀλόγων* muß einer späteren Zeit entstammen und verliert dadurch auch für die Anhänger dieser Lesart seine Zeugniskraft.

γ) DEMOKRIT. An der Erklärung des gewiß alten und echten DEMOKRITISCHEN Buchtitels hat noch niemand Freude erlebt. Natürlich hat man *ἀλόγων γραμμῶν* mit „irrationale Linien“ übersetzt, wußte aber mit dem Adjektivum *ναστῶν* = plenorum, refertorum nichts anzufangen. HULTSCH⁵⁾ ersetzt *ναστῶν* durch *κλαστῶν*, BLASS⁶⁾ deutet *ἄλογοι γραμμαὶ* als Asymptoten; DIELS⁷⁾ endlich faßt *τὰ ναστά* als Substantivum und synonym mit *τὰ ἄτομα*, aber unbeantwortet bleibt ihm die Frage: „irrationelle Atome?“

1) In *GORGIAS* 465A und 501A aus *ἄλογον πᾶγμα* und *ἀλόγως*, angewendet auf die Koch-„Fertigkeit“ (nicht „Kunst“), „mehr Mathematisches als Logisches herauszufühlen“, wie R. EBELING (*Mathematik und Philosophie bei PLATO*; Progr. Hann.-Münden 1909, S. 4 Anm. 12) will, ist mir unmöglich.

2) Siehe oben S. 98, 110, 133.

3) *ἀνὰ λόγον* schreibt DIELS, *Vorsokratiker* I, 1903, S. 280, 14, was mir früher entgangen war.

4) Siehe unten S. 149—150, 152—154.

5) *Jahrb. f. kl. Philol.* 1881, S. 579.

6) *De PLATONE mathematico*, 1861, p. 9.

7) *Vorsokratiker* II, 1907, S. 719, 14.

Das Problem der Raumerfüllung mit seinen Widersprüchen, die Teilung des Räumlichen in endlich oder unendlich viele, endlich große oder unendlich kleine Teile hat seit ZENO die griechischen Denker beschäftigt. Das DEMOKRITISCHE System löst alles Körperliche in kleinste, nicht weiter zerlegbare Teile, die Atome auf. Daß DEMOKRIT die atomistische Auffassung auch auf die geometrischen Größen ausgedehnt hat, wird von APELT¹⁾ bestritten; zu viel behauptet M. SIMON²⁾; die richtige Mitte scheint ZEUTHEN zu halten.³⁾

ARCHIMEDES bezeugt, daß DEMOKRIT zuerst das Volumen des Kegels und der Pyramide richtig angegeben hat, wie er sagt, „ohne Beweis“ (*χωρὶς ἀποδείξεως*). Natürlich hat, wie HEIBERG und ZEUTHEN bemerken⁴⁾, „DEMOKRIT nicht ganz ohne Grund solche richtige Sätze aufgestellt“. Die Auffindung dieser Sätze muß DEMOKRIT mit Hilfe einer heuristischen Methode gelungen sein, welche, wie die „Ausfüllung“ des Körpers durch seine „sämtlichen“ Parallelschnitte⁵⁾, wegen mangelnder Begriffsklarheit nicht als beweisend angesehen wurde.

Hier greift die Nachricht ein, welche PLUTARCH von DEMOKRIT überliefert hat⁶⁾: *διαποροῦντι φυσικῶς . . .*⁷⁾ *εἰ κῶνος τέμνοιτο παρὰ τὴν βάσιν ἐπιπέδοις*⁸⁾, *τὴν γὰρ διανοεῖσθαι τὰς τῶν τμημάτων ἐπιφανείας, ἴσας ἢ ἀνίστους γιγνομένης* „DEMOKRIT war in großer Unsicherheit über die der Naturlehre angehörige Frage, ob Parallelschnitte des Kegels für gleich oder für ungleich zu halten seien“. Daß es sich um unendlich benachbarte Parallelschnitte handelt, geht schon aus dieser Fragestellung und noch sicherer aus ihrer Begründung hervor. Die Nachricht des ARCHIMEDES mit der des PLUTARCH zusammen beweist, daß DEMOKRIT das Kegelvolumen durch Zerlegung in sehr eng benachbarte Parallelschnitte, also durch eine Art Integration ausgewertet hat.

Von DEMOKRITS atomistischem Standpunkt aus bedeutet dies den Versuch, die Zerlegung der Körperwelt in kleinste Teile auf geometrische,

1) *Beiträge zur Geschichte der griechischen Philosophie*, 1891, S. 265—266.

2) *Didaktik und Methodik*. 2. Aufl., 1908, S. 168. *Über Mathematik*, 1908, S. 14, 29. Widersprechende Urteile in *Geschichte der Mathematik im Altertum*, 1909, S. 181 „nicht streng“ und „nicht für streng bewiesen erachtet“; S. 263 „mangels Konzession an die Beschränktheit“. Ebenso für ARCHIMEDES.

3) *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, 1896, S. 68. *Quelques traits de la propagation de la science*; *Rivista di scienza „Scientia“* 5, Bologna 1909, p. 13—15.

4) *Hermes* 42, 1907, S. 300. *Biblioth. Mathem.* 7₃, 1906/7, S. 344.

5) *συμπληρωθέντος* . . . *Hermes* 42, S. 254, 6, 29; 260, 22; 265, 13; 269, 17 *συνέστηκεν*, 250, 16; 292, 26 *πάντα* oder auch nur *τὰ* z. B. *παρὰ τὸν λόγον* 278, 3, 6; 287, 14; 292, 15, 20, 22, 27.

6) *Adv. Stoicos*, Kap. 89. 1079 E.

7) Das Folgende *καὶ ἐπιτελεῖται* ist nach HEIBERG verderbt; BLASS schreibt *ἐμψύχως*.

8) So nach DIELS für *ἐπιπέδοι*.

d. h. auf stetige Gebilde zu übertragen. Der klare Geist DEMOKRITS hat diesen Schritt nicht als einfache Analogie vollzogen, er ist sich der Schwierigkeiten, welche aus der Ausdehnung des Atombegriffs auf das Stetige entspringen, wohl bewußt gewesen, und eben deswegen ist er hierin nicht dogmatisch vorgegangen wie später XENOKRATES, sondern hypothetisch wie PLATO¹⁾ und heuristisch wie ARCHIMEDES. Das folgt aus dem *διαποροῦντι* PLUTARCHS und seiner Begründung ebenso wie aus dem Zusammenhange bei ARCHIMEDES und dem *χωρὶς ἀποδείξεως*. Der Infinitesimalmethode fehlte bei DEMOKRIT sowohl wie bei ARCHIMEDES der Abschluß durch den Grenzbegriff. Weil die Griechen diesen nicht hatten und aus philosophischen Gründen nicht haben konnten, deshalb galt diese Methode weder für DEMOKRIT noch für ARCHIMEDES als beweisend. Der Unterschied ist nur, daß zu DEMOKRITS Zeit der Ersatz durch den EUDOXISCHEN Exhaustionsbeweis noch nicht geschaffen, also sein Kegelsatz wirklich „ohne Beweis“ war, während ARCHIMEDES zu seiner eigenen, nicht nur zu seiner Leser Sicherheit die gefundenen Resultate EUDOXISCH „beweisen“ konnte.

Wie die Flächen- und Volumenbestimmung ein logisch bewegliches, geometrisch erfindungsreiches Volk auf die Grundfrage der Integralrechnung führen mußte, so gab der Begriff der Berührung einer krummen Linie oder Fläche durch eine Gerade oder Ebene Anlaß zur Diskussion der Fragen, die sich für uns an den Begriff des Differenzials knüpfen. Bildet die Tangente einen wenn auch noch so kleinen Winkel? Hat die Tangente mit dem Kreise einen Punkt oder eine kleine Strecke gemein?²⁾ Schon PROTAGORAS hatte die Lehre der Mathematiker, daß die Tangente in einem Punkte berührt, angezweifelt: *ἄπτεται γὰρ τοῦ κανόνος οὐ κατὰ σιγμὴν ὁ κύκλος, ἀλλ' ὥσπερ Πρωταγόρας ἔλεγεν ἐλέγχων τοὺς γεωμέτρους.*³⁾ War aber die Frage der ideellen und der körperlich empirischen Berührung schon zu seiner Zeit aufgeworfen⁴⁾, so mußte der Atomistiker und Geometer DEMOKRIT dazu Stellung nehmen. Er tat es in einer Schrift, deren Titel uns durch DIOGENES LAERTIUS (IX, 47) überliefert ist: *περὶ διαφορῆς γνώμης*⁵⁾ ἢ *περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρης*. „Über Verschiedenheit der Auffassung oder über Kreis- und Kugel-Berührung.“ Wieder läßt die

1) Vgl. APALT, *Beiträge*, S. 264. ARISTOTELES, *Metaph.* I 992a 20 — 22.

2) ARISTOTELES, *De anima* I 403a, 13 — 14. Pseudo-ARISTOTELES, *De insecab. lineis* 971b, 15 — 18. EUKLID, VI def. 2. propos. 16. PROKLUS, Kommentar zu EUKLID, 78 — 90. PLUTARCH, *Adv. Stoicos* cap. 40, 1080D — 1081C.

3) ARISTOTELES, *Metaph.* II, 2, 998a 2 — 3.

4) PROTAGORAS, geb. 480, DEMOKRIT, geb. 460. Diese Beziehung vermutet auch G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*; Memorie della r. accademia in Modena 10, 1894, pag. 62.

5) Vgl. DIELS, *Vorsokratiker* II, 729. GOMPERZ, *γνώμης*; COBET, ALLMAN *γνώμωνος*.

Fassung des Themas in echt DEMOKRITISCHER Art nicht einen festen dogmatischen Standpunkt, sondern vorurteilslose Diskussion der gegenüberstehenden Ansichten vermuten.

Hat DEMOKRIT die atomistische Fragestellung an die Probleme der Volumina und der Berührung herangetragen, so ist anzunehmen, daß er vor der noch näher liegenden und durch die ZENONISCHEN Paradoxa angezweifelte Grundvorstellung der Linie nicht Halt gemacht hat. Nichts anderes kann die Zusammenstellung von γραμμαί und ναστά = ἄτομα in dem Buchtitel περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν bedeuten.

Welchen Sinn haben dann die ἄλογοι γραμμαί? Auf die Antwort führen die Folgerungen, welche in der unter ARISTOTELES' Namen überlieferten Schrift περὶ ἀτόμων γραμμῶν an die Existenz der Linienatome geknüpft werden. Der Verteidiger der Linienatome argumentiert: εἴη γὰρ ἂν τι μῆκος, ὃ πᾶσαι μετρηθήσονται.¹⁾ „Dann gäbe es eine Strecke, durch welche alle Linien meßbar sind“; und eine mit diesem Atommaß gemessene Linie οὐκ ἔσται οὔτε ῥητὴ οὔτ' ἄλογος²⁾ „wird weder rational noch irrational (im terminologischen Sinne) sein“. Sein Gegner nimmt diesen Gedanken auf: ἔπειτα πᾶσαι αἱ γραμμαὶ σύμμετροι ἔσονται. πᾶσαι γὰρ ὑπὸ τῶν ἀτόμων μετρηθήσονται, αἳ τε μήκει σύμμετροι καὶ αἱ δυνάμει.³⁾ „Dann werden alle Linien kommensurabel sein; denn alle, sowohl die in Länge wie die in Potenz kommensurabeln, werden die Atome als Maß haben.“ Aber dieses gemeinsame Maß ist in allen Strecken unendlich oft enthalten; und weil die Maßzahlen Unendlich zu Unendlich kein angebbares Verhältnis (keinen λόγος) haben⁴⁾, deshalb sind, wenn die Atomtheorie auf die Linien übertragen wird, zwei beliebige Gerade ἄλογοι — „verhältnislos“. Also „verhältnislos“ sind die DEMOKRITISCHEN Geraden, weil ihre Maßzahlen unvergleichbar sind, nicht wie die verhältnislosen-inkommensurabeln-irrationalen Strecken der späteren Geometrie, welche eines gemeinschaftlichen Maßes entbehren; also das DEMOKRITISCHE ἄλογος bedeutet etwas ganz anderes als inkommensurabel-irrational und scheidet als Beweis für das frühe Vorhandensein dieser Begriffe aus.

Durch meine Erklärung sind die bisher zusammenhangslosen Teile des Buchtitels zu einer Einheit verschmolzen: Die Schrift „Über verhältnislose Linien und Atome“ hat über die Folgerungen gehandelt, welche sich aus der atomistischen Auffassung für die Verhältnisse der Linien ergeben. Der Form nach hat dieser Titel mit dem vorher besprochenen

1) 968 b, 8—9. 2) 968 b, 18—19. Über diese Stelle vgl. unten S. 153—154.

3) 969 b, 33—970 a, 2. 4) Wir sagen: das Symbol ∞ ist unbestimmt.

gemeinsam, daß die beiden äußerlich durch η oder $\kappa\alpha\iota$ koordinierten Teile logisch subordiniert sind: der erste ergibt sich als Folge aus der Analyse des zweiten. Inhaltlich sind diese Folgerungen Zweifel und Aporien. Ich fasse zusammen: DEMOKRIT hat die Atomtheorie auf das Stetige zu übertragen versucht und die Fruchtbarkeit, aber auch die Schwierigkeiten dieser Übertragung aufgedeckt. Mit dem Irrationalen haben seine Überlegungen nichts zu tun.

B. Bei ARISTOTELES.

ARISTOTELES (384—322) hat seinen Schriften eine Fülle von mathematischen Definitionen und Lehrsätzen eingefügt, sehr selten um ihrer selbst willen, sondern zumeist als logische Beispiele. Neben dem Satz von der Winkelsumme des Dreiecks, welcher nach BONITZ¹⁾ etwa 40 mal vorkommt, ist die Inkommensurabilität von Quadratdiagonale und Seite das geometrische Paradebeispiel und kommt in echt ARISTOTELISCHEN Schriften 25 mal vor.²⁾ Auch *σύμμετρον* und *ἀσύμμετρον* als allgemeine Tatsache, also die Entdeckung THEODORS, gehört zum festen Bestande von ARISTOTELES' Begriffen. Freilich bezeichnet ARISTOTELES es an einer Stelle³⁾ als allgemeine Meinung (*δόξα*), die Quadratdiagonale sei meßbar, und an einer anderen⁴⁾ spricht er von dem Staunen (*θαυμάζειν*) über die Inkommensurabilität, welches nur der Geometer von Fach nicht teile, aber aus der häufigen Berufung auf dieses Beispiel als auf etwas ganz allgemein Bekanntes ersehen wir den Umschwung, der sich vollzogen haben mußte, seit PLATO die Unwissenheit aller Griechen in diesem Punkte beklagt hatte.

Die mathematischen Beispiele des ARISTOTELES wenden sich nicht an Fachmathematiker; sie sind ausschließlich auf den Wissensstoff beschränkt, welcher als Ergebnis des Elementarunterrichts vorausgesetzt werden konnte. Deshalb hat HEIBERG⁵⁾ mit gutem Erfolg aus den ARISTOTELISCHEN Beispielen ein Bild der Elementardarstellung des THEUDIUS von Magnesia, der letzten voreuklidischen, zu ARISTOTELES' Zeit herrschenden, entwerfen können.

Wenn ARISTOTELES von den seine Zeitgenossen beherrschenden Problemen zwar die Kreisquadratur berücksichtigt, aber nicht die Verdoppelung des Würfels und die Kegelschnitte⁶⁾, so ist daraus nicht zu schließen, daß er zwar von jenem, aber nicht von diesen Problemen Kenntnis hatte⁷⁾;

1) *Index Aristotelicus* 770b, 18—30.

2) Ebenda 185a, 7—16.

3) *Ethica EUDEM.* II, 1226a, 2—4.

4) *Metaph.* I, 983a, 12—20.

5) *Mathematisches zu ARISTOTELES*; Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss 18, 1904, S. 1—49.

6) Vgl. HEIBERG, a. a. O. S. 16.

7) In den unter ARISTOTELES' Namen überlieferten *Problemata* werden (XVI, 6. 914a 25—39) über die Schnitte des *βύβλιον* d. h. der Bücherrolle, des Zylinders. Fragen aufgeworfen, welche durchaus Unkenntnis der Kegelschnitte verraten. Aber

das wäre undenkbar bei einem Schüler PLATOS und Mitschüler des MENAECHMUS. Vielmehr waren die Versuche der Kreisquadratur, wie später, so schon damals populär; das Delische Problem aber und die Kegelschnitte waren aus dem Bereiche der wissenschaftlichen Forschung noch nicht in die Elemente übergegangen, ihre Kenntnis durfte ARISTOTELES bei seinen Hörern nicht voraussetzen.

Aus der häufigen Benutzung der Inkommensurabilität der Quadratdiagonale und des allgemeinen $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\epsilon\omicron\nu$ und $\acute{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\epsilon\omicron\nu$ geht hervor, daß diese Lehren Bestandteil der THEUDISCHEN Elemente waren. Wir erkennen auch die Begrenzung dieser Elementardarstellung: sie hat die Lehren THEODORS popularisiert, ist aber bei seiner Methode der Untersuchung von Fall zu Fall stehen geblieben. Aus der Reproduktion des pythagoreischen Beweises für die Quadratdiagonale schließt HEIBERG mit Recht¹⁾: „Wenn dieser alte pythagoreische Beweis noch zu ARISTOTELES' Zeit einen festen Bestand der mathematischen Lehrbücher bildete, können diese für die systematische und umfassende Behandlung des Irrationalen nichts Wesentliches getan haben.“

Aber die Terminologie des ARISTOTELES lehrt mehr; nämlich daß er in seiner Ausdrucksweise sich zwar dem THEODORISCHEN Standpunkt des Lehrbuchs und seiner Schüler anpaßt, daß er selbst aber darüber hinausgewachsen ist und die Klassifikation THEAETETS wohl kennt.

ARISTOTELES kennt das neue Wort $\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ für irrational; denn er gebraucht es einmal.²⁾ Dies ist das erste Auftreten dieser Bezeichnung in der Literatur; wir dürfen sagen, daß vor 350 $\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ in der Bedeutung irrational nicht vorkommt.

Die PYTHAGOREISCH-THEODORISCH-PLATONISCHEN Worte $\phi\eta\tau\acute{\omicron}\nu$ und $\acute{\alpha}\phi\phi\eta\tau\acute{\omicron}\nu$ fehlen bei ARISTOTELES vollständig. Statt ihrer finden sich außer $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\epsilon\omicron\nu$ und $\acute{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\epsilon\omicron\nu$, welche sich als Termini durch alle Zeiten und Wandlungen gerettet haben, eine große Zahl von nichtterminologischen Umschreibungen, gebildet mit den Worten $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{\omicron}\varsigma$ = Zahl und $\lambda\acute{\omicron}\gamma\omicron\varsigma$ = Verhältnis.³⁾

Um diesen Tatbestand zu erklären, müssen wir uns des durch THEAETET vollzogenen Wandels der Einteilung und Terminologie erinnern. Früher

die *Problemata* sind nicht von ARISTOTELES. Einen wirklichen Fehler begeht ARISTOTELES selbst, wenn er annimmt, daß der Raum nicht nur durch Würfel, sondern auch durch regelmäßige Tetraeder lückenlos gefüllt werden kann (*De Coelo* III, 306 b, 5; vgl. HEIBERG, a. a. O. S. 25). Den Fehler hat J. BLANCANUS, *ARISTOTELIS Loca mathematica*, Bononiae 1615, p. 85, bemerkt; die richtige Auffassung aber scheint als Erster REGIOMONTAN, dann MAUROLICO (vgl. L. DE MARCHI, *Biblioth. Mathem.* 1885, Sp. 193) und danach KEPLER ausgesprochen zu haben, *Harmonice mundi* (1619, Buch II Anm. zu def. V).

1) a. a. O. S. 24. 2) *Analyt. post.* I, 10, 76 b.

3) Vgl. das Verzeichnis S. 142.

waren $\delta\eta\tau\acute{\alpha}$ die Zahlen, $\acute{\alpha}\rho\delta\eta\tau\alpha$ die Quadratwurzeln. Jetzt umfaßte $\delta\eta\tau\acute{\omicron}\nu$ mit seinen beiden Abteilungen $\delta\eta\tau\acute{\omicron}\nu \mu\eta\kappa\epsilon\iota$ und $\delta\eta\tau\acute{\omicron}\nu \delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota$ Zahlen und Quadratwurzeln, hatte also den Inhalt des alten $\acute{\alpha}\rho\delta\eta\tau\omicron\nu$ aufgesaugt. Neu entdeckt waren die höheren Irrationalen, welche selbst quadriert nicht rational werden, die Formen $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Der neue Begriff forderte einen neuen Namen, man wählte $\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ — „verhältnislos“. Da $\delta\eta\tau\acute{\omicron}\nu$ und $\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ alle bekannten Größen umfaßten, konnte $\acute{\alpha}\rho\delta\eta\tau\omicron\nu$ keine neue Bedeutung gewinnen; es war ausgeschaltet, ist durch den Einfluß der EUKLIDischen Elemente viele Jahrhunderte lang vollständig verschwunden und taucht erst sehr spät und spärlich wieder auf¹⁾, nunmehr wohl seinerseits hervorgerufen durch den sprachlichen Gegensatz zu $\delta\eta\tau\acute{\omicron}\nu$. Im Auftreten des Wortes $\acute{\alpha}\rho\delta\eta\tau\omicron\nu$ als spezieller, $\delta\eta\tau\acute{\omicron}\nu$ durch Gegensatz hervorrunder Terminus, in seiner Verallgemeinerung, in seiner Ablösung durch $\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ ist in Kürze die Entwicklungsgeschichte des Irrationalen enthalten.

Gehörte $\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ der reinen Wissenschaft an, war $\acute{\alpha}\rho\delta\eta\tau\omicron\nu$ abgesetzt, $\delta\eta\tau\acute{\omicron}\nu$ zweideutig geworden, so konnte ARISTOTELES keines dieser Worte gebrauchen, ohne unverständlich zu sein oder Mißverständnisse hervorzurufen sowohl bei den elementar, wie bei den wissenschaftlich gebildeten Hörern. Die Folge mußte eben die sein, die wir tatsächlich vorfinden: er vermied alle diese Worte und umschrieb sie durch nichtterminologische Wendungen. Die Terminologie des ARISTOTELES kennzeichnet deutlich einen Übergangszustand; sie ist ein Kompromiß zwischen den Elementen und der Wissenschaft, zwischen THEODOR und THEAETET.

Auch der umgekehrte Schluß führt zu einem beachtenswerten Resultat: Wenn im Dialoge *Hippias major* $\delta\eta\tau\acute{\omicron}\nu$ und $\acute{\alpha}\rho\delta\eta\tau\omicron\nu$ im allgemeinen Sinne gebraucht werden²⁾, so muß diese Schrift zu einer Zeit verfaßt sein, als die THEAETETische Terminologie entweder noch nicht aufgestellt oder in weiteren Kreisen noch unbekannt war. Deshalb gehört der Dialog in die Zeit des voraristotelischen Sprachgebrauchs, also in PLATONs Zeit. Man ist neuerdings geneigt, den *Hippias major* für einen echt PLATONischen Dialog zu halten, aus dem Jahrzehnt 399—390. Der Gebrauch von $\delta\eta\tau\acute{\omicron}\nu$ und $\acute{\alpha}\rho\delta\eta\tau\omicron\nu$ ist geeignet, diese Ansicht zu stützen.

1) Datierbar tritt $\acute{\alpha}\rho\delta\eta\tau\omicron\nu$ nach mehr als 800jähriger Ruhe zweimal auf bei PROKLUS, Kommentar zu EUKLID 6, 21 und 60, 9. (*In Remp. comment.* II, 24, 16 und 25, 8 nur als Zitat aus PLATO) Zweimal finde ich es in „Anonymi variae Collectiones“ (von HULTSCH herausgegeben mit HERO, *Geom. et stereom.*, 1864) cap. 45, 6 und 8, und zwar charakteristischerweise $\acute{\alpha}\rho\delta\eta\tau\omicron\nu$ beidemal erklärt durch $\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ ($\acute{\alpha}\rho\delta\eta\tau\omicron\nu \tau\omicron\upsilon\tau\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu \acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$); ferner einigemal in den Scholien zu EUKLID (V, ed. HIRIBERG), auch hier mehrmals (430, 11; 430, 16; 467, 14) erklärt durch das ganz überwiegend gebrauchte $\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$.

2) 303 C, siehe oben S. 104.

C. Nach ARISTOTELES.

Wir konnten THEAETETS Klassifikation der Quadratwurzeln aus PLATOS *THEAETET*stelle und aus ARISTOTELES' Terminologie erschließen; ein direktes, auf EUDEMUS zurückgehendes Zeugnis fanden wir in der Schrift des ABU OTHMAN (aus dem 10. Jahrhundert). Die älteste Quelle, in der wir der THEAETETischen, später von EUKLID aufgenommenen Terminologie selbst begegnen, ist die unter ARISTOTELES' Namen überlieferte Streitschrift *περὶ ἀτόμων γραμμῶν* „Über unteilbare Linien“ oder „Über Linienatome“.¹⁾ Im ersten Teile dieser Schrift (968^a 2—968^b 22) werden kurz die Gründe aufgeführt, welche für die Linienatome sprechen oder zu sprechen scheinen; der weitaus größere zweite Teil ist der Widerlegung gewidmet (bis 972^b 33).

Die Frage, ob auch die stetigen Größen wie die Körperwelt aus unteilbaren kleinsten Partikeln, Atomen, bestehen, ist, wie oben ausgeführt, schon von DEMOKRIT erwogen worden. Nach dem Zeugnis des ARISTOTELES²⁾ ist diese Lehre auch PLATO nicht fremd gewesen; zu fester Form und zu dogmatischem Ansehen in der PLATONischen Schule ist sie durch XENOKRATES (geb. 396, gest. 314, zweiter Nachfolger PLATOS in der Schulleitung 339—314) gelangt. Dafür bürgt das einstimmige Zeugnis des Altertums³⁾: ὁ Ξενοκράτειος λόγος bedeutet die Lehre von den Linienatomen. Deshalb muß der in der Schrift *περὶ ἀτόμων γραμμῶν* Bekämpfte XENOKRATES sein⁴⁾; die im ersten Teile der Schrift angeführten Gründe⁵⁾ müssen, wenn sie die Grundlage der wissenschaftlichen Widerlegung bilden sollen, seine eigenen, die entscheidenden Worte Zitate aus seinen Schriften sein.

Zwar hat schon ARISTOTELES die Möglichkeit der Linienatome an mehreren Stellen bestritten⁶⁾, aber die Schrift *περὶ ἀτόμων γραμμῶν* kann, darüber herrscht volle Übereinstimmung, nicht von ihm selbst, sondern muß von einem seiner Schüler verfaßt sein. In erster Linie kommt als Verfasser in Betracht THEOPHRAST, ARISTOTELES' Nachfolger in

1) Ausgabe mit Vorwort von O. APALT, Leipzig 1888. Übersetzung von demselben in den *Beiträgen zur Geschichte der griechischen Philosophie*, Leipzig 1891, S. 271—286.

2) *Metaph.* I 9, 992^a 19—22. Vgl. ZELLER, *Philosophie der Griechen* II⁴, 1889, S. 949 Anm. 2.

3) Die Zeugnisse sind zusammengestellt bei ZELLER, a. a. O. II⁴, 1889, S. 1017 Anm. 2. Hinzuzufügen sind: PROKLUS, Kommentar zu EUKLID, ed. FRIEDLEIN 279, 6 und PROKLUS, *In Rempublicam*, ed. KROLL II, 27, 6.

4) Dafür sprechen auch alte ARISTOTELESkommentatoren. Vgl. APALT, a. a. O. S. 269 Anm. 1.

5) Vgl. APALT, a. a. O. S. 269 und RICH. HEINZE, *XENOKRATES*, Leipzig 1892, S. 61 und ZELLER, a. a. O. S. 1017 Anm. 2.

6) Vgl. HEIBERG, a. a. O. S. 23—24.

der Leitung des Peripatos¹⁾ (geb. 372, gest. 287, Schulleiter 322—287). Für ihn spricht die Übereinstimmung der Sprache und gewisser Lehren mit sicher THEOPHRASTISCHEN Schriften und das Zeugnis des DIOGENES LAERTIUS, der unter THEOPHRASTS Namen eine Schrift *περὶ τῶν ἀτόμων γραμμῶν α'* anführt (V, 42).

Die Thesen und Beweise des ersten Teils der Schrift, die Verteidigung der mit XENOKRATES' Namen so eng verknüpften Lehren, werden nicht erst XENOKRATES' letzten Lebensjahren entstammen, sie mögen schätzungsweise spätestens um 320 fixiert und formuliert vorgelegen haben. Aber auch der zweite Teil, der Angriff, kann nicht viel später entstanden sein. Dafür spricht die gänzliche Unterdrückung von XENOKRATES' Namen²⁾, nach dem Urteile von Kennern des literarischen Gebrauchs jener Zeit ein Zeichen³⁾, daß die Schrift noch zu des Angegriffenen Lebzeit verfaßt und veröffentlicht worden ist.

Im mathematischen Wissen und in der Terminologie gehen die *ἄτομοι γραμμαι*, wie HEIBERGS sorgfältige Zusammenstellung beweist⁴⁾, über die echt ARISTOTELISCHEN Schriften unverkennbar hinaus. Es ist zu bedenken, daß auch diese Schrift nicht eine mathematische, sondern philosophische ist; daraus erklärt sich, „daß die etwas veraltete und inkonsequente Terminologie der Schule sich gegen die Fortschritte der Mathematiker zähe behauptet“ (HEIBERG). Aber erkennbar sind diese Fortschritte. Eine größere Anzahl der EUKLIDISCHEN Termini hat sich eingefunden. Zwar wirkt in den Verfassern die Terminologie der THEAETETISCHEN Elemente, in denen sie selbst und ihre Leser geschult waren, noch nach, aber die EUKLIDISCHEN Elemente können ihnen nicht mehr unbekannt gewesen sein.

Beweisend hierfür ist gerade die Behandlung des Irrationalen. Es werden *γραμμαι σύμμετροι μήκει* und *σύμμετροι δυνάμει* unterschieden (970^a 2) und beide zusammen als *ῥηταί* den *ἄλογοι* gegenübergestellt (968^b 19, 22). Von Arten der *ἄλογοι* werden genannt *ἀποτομή* und *ἐκ δυοῖν ὀνομάτοι* (968^b 20), und zwar als Beispiele (*οἷον*), also die dritte Art, die *μέση*, liegt im Hintergrunde. Auch auf Quadrate wird der Begriff des *ῥητόν* angewendet (968^b 16, 970^a 5) im bewußten Gegensatz gegen das mögliche *ἄλογον*.

1) Über diese ganze Frage vgl. V. ROSE, *De ARISTOTELIS librorum ordine et auctoritate*, Berlin 1854, p. 192. ZELLER, a. a. O. II, ³, 1879, S. 90 Anm. 1. HEINZE, a. a. O. S. 61 und besonders APALT, a. a. O. S. 269—270.

2) Dafür stehen allgemeine Wendungen wie *ἐνιοὶ φασιν* (967^a 2), *ὡς φασί* (968^b 6), *οὕτω δ' ἀξιοῦσιν* (969^a 10).

3) APALT, a. a. O. S. 269. HEINZE, a. a. O. S. 61.

4) HEIBERG, a. a. O. S. 34—37.

Kommen hierin gerade die Fortschritte zum Ausdruck, welche die THEAETETISCH-EUKLIDISCHE Theorie des Irrationalen über die THEODORISCH-THEUDISCHE hinaus gemacht hatte, so bleibt nur der Schluß übrig, daß wir mit den *ἄτομοι γραμμαί* den Bereich der EUKLIDISCHEN Elemente betreten haben.

Man kann gegen diesen Schluß einwenden, daß die Klassifikation THEAETETS, welche EUKLID übernommen hat, ja nicht neu war, und daß sie XENOKRATES sowohl wie THEOPHRAST nicht aus den Elementen, sondern aus der Wissenschaft bekannt sein konnte. Beides ist richtig; aber in dieser philosophischen Auseinandersetzung konnten die Verfasser, ebenso wenig wie ARISTOTELES in seinen Schriften, andere als elementare Kenntnisse voraussetzen. Ferner berufen beide sich wiederholt gerade auf das in der Mathematik Grundlegende, allgemein Bekannte und Zugestandene an Definitionen und Lehrsätzen.¹⁾

Für entscheidend aber halte ich eine Wendung des XENOKRATES, mit der man bisher so wenig hat anfangen können, daß APELT sie umgeändert hat²⁾ und HEIBERG, der diese Umänderung mit gutem Grunde verwirft, die Worte für „korrupt“ erklärt.³⁾ (*ᾠρισμένη καὶ τεταγμένη γραμμή*) *οὐκ ἔσται οὔτε ῥητὴ οὔτ' ἄλογος οὔτε τῶν ἄλλων οὐδεμία, ὣν δὴ νῦν εἰρηνται*⁴⁾, *οἷον ἀποτομή ἢ*⁵⁾ *ἐκ δυοῖν ὀνομάτων* (968^b 18—20) „Eine gezeichnet vorliegende, begrenzte Linie (mit dem als unteilbar vorausgesetzten Maße gemessen) „wird weder ‚aussprechbar‘ noch ‚verhältnislos‘ sein, noch wird auf sie eine der anderen Bezeichnungen zutreffen, welche jetzt aufgekomen sind, wie ‚Abschnitt‘ oder ‚aus zwei Benennungen‘.“ Die Attraktion des Nominativs des Relativums, ganz außergewöhnlich in der älteren attischen Prosa, dürfte für XENOKRATES nicht auffällig sein; kommt sie doch auch bei ARISTOTELES nicht selten vor.⁶⁾ An unserer Stelle hat das passivische *ὣν δὴ νῦν εἰρηνται* in Zeile 19 eine besondere Rechtfertigung als Variation der Zeile 5 gebrauchten aktivischen Wendung *ἐξ ὧν αὐτοὶ οἱ ἐν τοῖς μαθήμασι λέγουσιν*, zu der es in inhaltlichem Gegensatz steht.

Nennt XENOKRATES die Begriffe *ἀποτομή* und *ἐκ δυοῖν ὀνομάτων* als Beispiele von „Bezeichnungen, welche jetzt eingeführt worden sind“, so ist dies ein nicht mißzuverstehender Hinweis auf EUKLIDS Elemente.

1) 968^b 5, 969^b 8—10, 969^b 29—30, 970^a 19—20.

2) *De lineis insecabilibus*, prolegomena X—XI. 3) a. a. O. S. 35 Anm. 3.

4) Nach APELT, a. a. O. p. 143 haben die Handschriften *νῦν δὴ εἰρηται* N, *δὴ νῦν εἰρηται* ceteri. APELT ändert in *δυνάμεις ῥηταί*.

5) Nach HEIBERG a. a. O.

6) Vgl. H. SCHINDLER, *De attractionis pronominis relativi usu ARISTOTELICO*. Diss. Breslau 1892, p. 34—46.

Zwar sind diese „modernen“ Begriffe, wie wir wissen, zwischen 390 und 370 von THEAETET aufgestellt. Aber derselbe Unstern, welcher die Verbreitung von THEODORS Entdeckung von Kyrene aus gehemmt hat, scheint auch über THEAETETS Lehre gewaltet zu haben. Seine längere Abwesenheit von Athen¹⁾ und sein früher Tod mögen verhindert haben, daß seine Theorie des Irrationalen in Athen Wurzeln schlug. Sie muß, wie wir aus PLATOS und ARISTOTELES' Verhalten erkennen, mehrere Jahrzehnte lang in den Kreisen der Fachmathematiker ein stilles Dasein geführt haben. Ihre Weiterbildung durch HERMOTIMUS von Kolophon, der nicht der PLATONISCHEN Schule angehörte, kann erst nach längerer Pause erfolgt sein.²⁾ „Nicht viel später“ (PROKLUS 68, 6) „hat EUKLID die Gedanken THEAETETS zum Abschluß gebracht“ (68, 8—9). Da wir aus PLATO und ARISTOTELES die Teilung in *μήκει* und *δυνάμει σύμμετρον* als THEAETETS Eigentum erkannt haben, da nach ARISTOTELES das als Gegensatz notwendige *ἄλογον* ihm zugehört, da endlich nach EUDEMUS (ABU OTHMAN) auch die Gattungen des *ἄλογον* THEAETETISCH sind, so bleibt für EUKLID der „Abschluß“ der Klassifikation durch Hinzufügung der Arten, die Begriffserweiterung durch Behandlung der biquadratischen Irrationalen, der Ausbau der Methode. Wo in der methodischen Behandlung die Grenze zwischen THEAETET und EUKLID zu ziehen ist, sind wir zu erkennen nicht mehr imstande. Aber das wissen wir nach dem Vorangegangenen bestimmt, daß erst durch EUKLID die THEAETETISCHEN Irrationalen in die Elemente aufgenommen und damit in den Gesichtskreis der nicht speziell mathematisch Gebildeten gerückt worden sind. Darauf allein kann das *νῦν* des XENOKRATES bezogen werden. Ganz bewußt stellt XENOKRATES durch sein *ὦν δὴ νῦν εἴρηνται* die neue Klassifikation und die neuen Elemente den alten gegenüber, die sich auf Feststellung des *σύμμετρον* und *ἄσύμμετρον* durch Aufsuchen eines gemeinschaftlichen Teilers beschränkten: *ἐξ ὧν αὐτοὶ οἱ ἐν τοῖς μαθήμασι λέγουσιν* (968^b 5).³⁾

Das ist in der gesamten Literatur der erste Hinweis auf Euklids Elemente, speziell auf Buch X. Diese Notiz nötigt uns, Euklids Elemente um die Zeit von 320 als vorhanden zu betrachten.

1) SUIDAS: *ἐδίδαξεν ἐν Ἡρακλείᾳ*. Dazu die Verdoppelung des Namens THEAETET als *Ἡρακλείας Πόντον*. Vgl. S. 126 Anm. 1.

2) PROKLUS, 67, 20—23. HERMOTIMUS muß, nach der Zusammenstellung mit dem Platoniker PHILIPPUS (PROKLUS, 68, 6) etwa Altersgenosse des ARISTOTELES gewesen sein. Vgl. HEIBERG, a. a. O. S. 4.

3) Zu vergleichen ist diese geschichtliche Andeutung mit dem Hinweis des ARISTOTELES auf die Umgestaltung der Proportionslehre durch EUDOXUS (*Analyt. post.* 74a 19—23) *ὥσπερ ἐδείκνυτό ποτε χωρὶς . . . νῦν δὲ καθόλου δείκνυται*. Vgl. HEIBERG, a. a. O. S. 11.

Die Euklidischen Elemente sind, mag auch im einzelnen Euklids Anteil von dem seiner Vorgänger nicht zu scheiden sein, ihrem Wesen nach die Schöpfung eines ausgereiften Forschers und das Werk vieler Jahre. Gerade das zehnte Buch, die Theorie des Irrationalen, ist von einer solchen Geschlossenheit der Komposition, einer so konsequenten und durchdringenden Kasuistik, einer solchen Schärfe in Grundlegung, Beweisführung und Klassifikation, kurz einer so souveränen Beherrschung des sehr schwierigen Stoffes, daß wir seine Anlage und Ausführung nicht einem ganz jungen Manne zutrauen können. Wenn diese Euklidische Theorie des Irrationalen um 320 als Neuschöpfung vorlag, so müssen wir für die Entstehung des Werkes etwa die Zeit von 330 bis 320 in Anspruch nehmen. Sein Verfasser kann nicht später als etwa 360 geboren sein. Mit dieser Folgerung setze ich mich in Widerspruch zu der herrschenden Annahme, wonach Euklids Blütezeit um 300, also seine Geburt um 340 fällt. Ich behalte mir vor, in einem eigenen Aufsatz meine Datierung von Euklids Leben durch weitere Beweise zu stützen.

Zusammenfassung.

I. Die jüngeren Pythagoreer haben (vor 410) die Inkommensurabilität von Quadratdiagonale und -seite als vereinzelte Tatsache erkannt und bewiesen und für das nicht genau angebbare Zahlenverhältnis Näherungswerte aufgestellt. (*διάμετρος ῥητή; διάμετρος ἄρρητος.*)

II. THEODOR von Kyrene hat (etwa 410—390) das Umkehrproblem der Quadrierung allgemein gestellt, die allgemeine Irrationalität der Quadratwurzeln erkannt und durch Verallgemeinerung des pythagoreischen Gedankenganges bewiesen. (*σύμμετρον, οὐ σύμμετρον; ῥητόν, ἄρρητον.*)

III. THEAETET von Athen hat (etwa 390—370) die Grundlagen einer allgemeinen Theorie der quadratischen Irrationalitäten geschaffen und ihre Hauptgattungen aufgestellt. (*ῥητὸν μήκει, ῥητὸν δυνάμει; ἄλογον: μέση, ἐκ δυοῖν ὀνομάτοι, ἀποτομή.*)

IV. EUKLID hat (etwa von 330 an) die Theorie des Irrationalen ausgebaut, die Klassifikation der Quadratwurzeln durch Aufstellung der Arten vollendet und die biquadratischen Irrationalen in den Bereich der Forschung gezogen. (Elemente Buch X.)

Zur Trigonometrie der Araber.

Von HEINRICH SUTER in Zürich.

Der Leidener Kodex 168 Gol. enthält auf den Blättern 134 v. bis 136 r. vier Beweise trigonometrischer Sätze, die für die Geschichte dieser Disziplin bei den Arabern von Bedeutung sind, und von denen ich deshalb hier eine wörtliche Übersetzung veröffentliche.¹⁾ Der genannte Kodex enthält eine Reihe wichtiger mathematischer Abhandlungen von EL-SIDJĪ, ABŪ'L-DJŪD, ABŪ NAṢR B. 'IRĀK²⁾ und von anonymen Autoren, und ist schon früher von F. WOEPCKE teilweise benützt worden; unsere Abhandlung ist die fünfzehnte des Kodex, alle sind von derselben Hand geschrieben, undatiert, aber nach dem Herausgeber des Kataloges aus früher Zeit.¹⁾

Unsere Abhandlung handelt über den sphärischen und ebenen Sinussatz und gibt zu beiden die Beweise für den Fall des rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreiecks. Es sind dies die Beweise des nach dem Urteil EL-BĪRŪNĪS u. a. jedenfalls bedeutenden arabischen Mathematikers ABŪ NAṢR MAṢŪR B. 'ALĪ B. 'IRĀK, des Lehrers von EL-BĪRŪNĪ. Dieser letztere teilte sie, wie der Schluß unserer Abhandlung angibt, in einem Briefe oder einer Widmungsschrift dem ABŪ SA'ĪD EL-SIDJĪ mit. Die beiden Beweise für den sphärischen Sinussatz sind uns auch von NAṢĪR ED-DĪN in seinem *Shakl el-kattā'*³⁾ aufbewahrt worden; da sie aber dort von sehr schlechten Figuren begleitet sind und in den Vorlesungen über Geschichte

1) Der Kodex 168 Gol. wurde von der Königl. Universitätsbibliothek in Leiden Herrn Prof. Dr. E. WIEDEMANN in Erlangen für längere Zeit zur Benutzung überlassen; dieser Gelehrte hat mir dann von der vorliegenden Abhandlung Photographien in Weiß-Schwarz besorgen lassen; sowohl der Verwaltung der genannten Bibliothek als auch Herrn Prof. WIEDEMANN spreche ich hier für ihr freundliches Entgegenkommen meinen verbindlichsten Dank aus.

2) Vgl. H. SUTER, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber* usw. in Abhandlungen zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 10, 1900, p. 80, 81 und 97. — Das arabische Dschīm (= deutsch dsch) gebe ich nach den neueren Transkriptionsregeln im folgenden immer durch „dj“ wieder.

3) Vgl. CARATHEODORY, *Traité du quadrilatère*, Konstantinopel 1891, p. 145, 146, 155, 156 (der Übersetzung).

der Trigonometrie von v. BRAUNMÜHL weggelassen worden sind, so ist es wohl angezeigt, dieselben hier nochmals zu veröffentlichen; die Figur für den Fall des rechtwinkligen Dreiecks ist allerdings auch in unserem Manuskript nicht besonders gut gezeichnet, sie entbehrt einer richtigen Perspektive, ich habe daher der Figur des Manuskripts eine Verbesserung beigegeben. Wir sehen auch, daß die Beweise unabhängig von der Regel der sechs Größen geführt sind, und daß der Beweis für das schiefwinklige sphärische Dreieck einfacher ist als derjenige ABŪ'L-WEFĀs in seinem *Almagest*¹⁾, ABŪ NAṢR B. 'IRĀK zerlegt einfach das schiefwinklige Dreieck durch eine Höhe in zwei rechtwinklige, wie wir es heute noch tun. Wem von den drei bei NAṢİR ED-DĪN genannten Mathematikern ABŪ'L-WEFĀ²⁾, EL-KHODJENDĪ³⁾ oder ABŪ NAṢR B. 'IRĀK die Priorität in der Erfindung des sphärischen Sinussatzes gehöre, können wir auch heute noch ebensowenig entscheiden, als es NAṢİR ED-DĪN im 13. Jahrhundert imstande war.

Was den ebenen Sinussatz anbetrifft, so wird durch diese Abhandlung die Kenntnis desselben bei den Arabern schon wieder etwas weiter zurückdatiert; v. BRAUNMÜHL mußte in seinen *Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie* I (Leipzig 1900), gestützt auf die damaligen historischen Kenntnisse, die erste Formulierung desselben NAṢİR ED-DĪN (gest. 1274) zuschreiben; NALLINO teilte dann in seiner Ausgabe ALBATTĀNĪS (I, p. LXXIII, Mailand 1903) mit, daß sich derselbe schon in der Chronologie von EL-BĪRŪNĪ befinde; nun wissen wir aus unserer Abhandlung, daß schon ABŪ NAṢR (gest. c. 1000—1020), der Lehrer BĪRŪNĪS, einen Beweis dieses Satzes gegeben hat, und höchst wahrscheinlich ist er schon ziemlich lange vorher den arabischen Mathematikern bekannt gewesen. Der Beweis, den ABŪ NAṢR gibt, ist etwas einfacher als derjenige NAṢİR ED-DĪN⁴⁾ und von dem heutigen wenig verschieden.

Im Namen Gottes des Barmherzigen und Gnädigen, usw. Ableitung (oder Untersuchung)⁵⁾ des vortrefflichen Scheiches ABŪ NAṢR MAṢṢŪR B. 'ALĪ, des Freigelassenen des Emirs der Gläubigen, Gott stehe ihm bei!

Das Dreieck ABG [Fig. 1, 2] liege auf der Kugel (und sei gebildet)⁶⁾ von größten Kreisen, und der Winkel bei A sei ein rechter; ich sage,

1) Vgl. CARRA DE VAUX, *L'Almageste d'ABŪ'L-WĒFA ALBŪZDJĀNĪ* im *Journal asiatique* 19, 1892, p. 423—424.

2) Vgl. H. SUTER, l. c. p. 71.

3) Vgl. H. SUTER, l. c. p. 74.

4) CARATHEODORY, *Traité du quadrilatère*, Konstantinopel 1891, p. 70 und 71 (der Übersetzung).

5) So übersetzen wir das arabische „istikhradj“.

6) Was in runden Klammern beigelegt wird, steht nicht im arabischen Text, sondern ist von mir zur näheren Erklärung beigelegt.

daß das Verhältniß des Sinus von AB zum Sinus von BG gleich sei dem Verhältniß des Sinus des Winkels G zum Sinus des Winkels A . Beweis: Wir vervollständigen AG und BG ¹⁾ zu zwei Quadranten, sie sind GBH und GAT , und ziehen den Bogen HT , der also an Größe

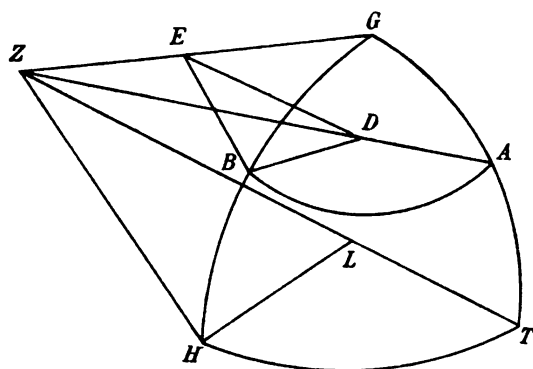


Fig. 1 (Figur des Textes).

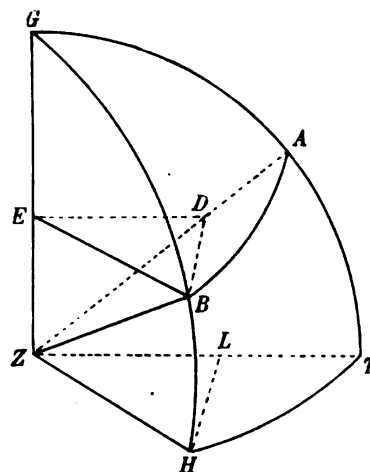


Fig. 2 (verbesserte Figur).

gleich dem Winkel G ist; wir verbinden die Punkte H, T, A, G mit dem Mittelpunkt Z der Kugel durch die geraden Linien HZ, TZ, AZ, GZ und ziehen die Sinus HL, BD, BE , und ziehen noch ED . Dann ist, weil AZ die gemeinsame Linie (der Durchschnitt) der beiden Kreisflächen GAT und AB ist, und BD senkrecht auf AZ steht, auch BD senkrecht auf der Ebene des Kreises GAT , und aus dem gleichen Grunde steht auch HL senkrecht auf dieser Ebene, d. h. auf der Ebene des Kreises GAT , also ist HL parallel BD . Und weil GH ein Quadrant ist, so ist der Winkel GZH ein rechter, ebenso ist der Winkel BEZ ein rechter²⁾, und HZ und BE liegen in derselben Ebene, d. h. in der Ebene des Kreises GH , also sind sie parallel, also ist die Ebene des Dreiecks DBE parallel der Ebene des Dreiecks LHZ ; beide schneiden die Ebene des Kreises GAT , denn die Punkte D, E, L, Z liegen in dieser Kreisfläche, also sind die beiden Dreiecke HLZ ³⁾ und BED ähnlich, mithin besteht die Proportion: $DB [= \sin AB] : BE [= \sin BG] = HL [= \sin G] : HZ [= \sin A]$ ⁴⁾ w. z. b. w.

Es sei nun aber Winkel A kein rechter, so sagen wir, daß doch die Proportion besteht: $\sin AB : \sin BG = \sin G : \sin A$. Beweis: Wir ziehen

1) Diese beiden Seiten sind jedenfalls irrtümlich weggelassen.

2) Weil BE der Sinus des Bogens GB ist. 3) Das Manuskript hat HKZ .

4) Das in eckigen Klammern Stehende ist im Text in Worten hinzugefügt; HZ ist der Radius der Kugel, also der sinus totus, also auch sinus des Winkels A , der ein rechter vorausgesetzt ist.

[Fig. 3, 4] BD als Stück eines größten Kreises senkrecht auf AG . Dann hat man, weil $\sin AB : \sin BD = \sin D : \sin A$, und $\sin BD : \sin BG = \sin G^1) : \sin D^1)$, nach Ausgleichung in den miteinander multiplizierten Verhältnissen²⁾ die Proportion: $\sin AB : \sin BG = \sin G : \sin A$, w. z. b. w.

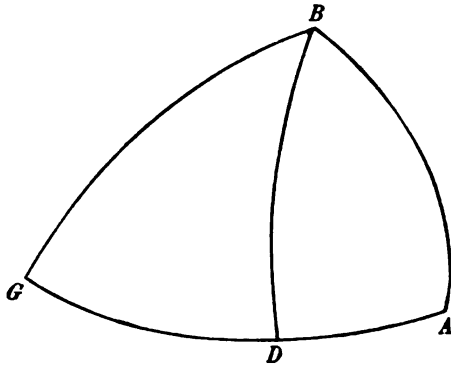


Fig. 3.

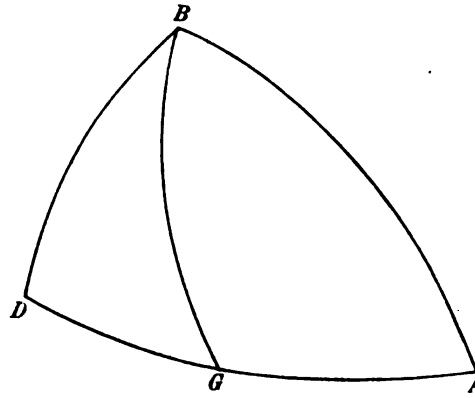


Fig. 4.

Es sei [Fig. 5, 6] das (ebene) Dreieck ABG gegeben, so sage ich, daß die Proportion bestehe: $AB : AG = \sin G : \sin B$. Beweis: Es ist in erster Linie notwendig, daß man wisse, daß unsere Worte „Sinus eines beliebigen Winkels in einem geradlinigen Dreieck“ bedeuten: den Sinus

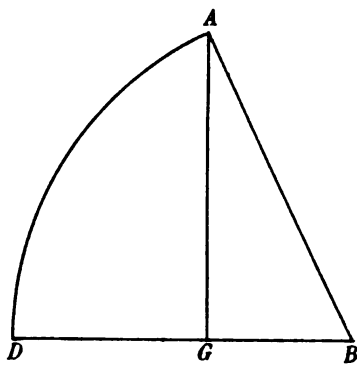


Fig. 5 (diese Figur fehlt im Manuskript).

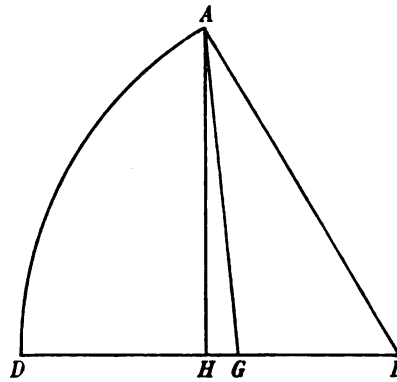


Fig. 6.

des Bogens, der über diesen Winkel beschrieben wird, wenn derselbe im Mittelpunkt des beschriebenen Bogens (gedacht) wird. Nach diesem nehmen wir B als Mittelpunkt eines Kreises an und beschreiben um denselben mit dem Radius BA den Bogen AD und verlängern BG über G

1) Hier steht im Manuskript bei beiden „Winkel“ statt „Sinus“.

2) So habe ich das arabische „el-musāwāt fī'l-nisba el-muḍṭaraba“ übersetzt, während CARATHEODORY (l. c. p. 156) „el-musāwāt el-muḍṭaraba“ übersetzt durch „l'égalité troublée“; allerdings kann „muḍṭaraba“ auch „troublée“ (= aufgeregt, beunruhigt) heißen, aber dies gibt hier gewiß keinen Sinn.

hinaus bis D . Wenn nun der Winkel G ein rechter ist, so ist AG der Sinus des Bogens AD , aber AD mißt den Winkel B am Mittelpunkt, und weil AB der Radius dieses Kreises ist, so ist er der Sinus des Winkels G , der, wenn er am Mittelpunkt wäre, vom Kreise einen Quadranten ausschneiden würde; die Behauptung ist also richtig, wenn der Winkel G ein rechter ist.¹⁾

Wir nehmen nun an, er sei kein rechter; wir ziehen dann von A die Senkrechte AH auf BD , dann hat man: $AG : AH = \sin H : \sin G$, und dies, weil AH der Sinus des Winkels G in dem Kreise, dessen Radius AG ist; ebenso hat man $AH : AB = \sin B : \sin H$, weil AH der Sinus des Winkels B in dem Kreise, dessen Radius AB ist. Also hat man durch Ausgleichen in den miteinander multiplizierten Verhältnissen: $AG : AB = \sin B : \sin G$.

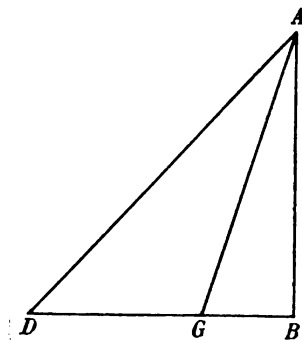


Fig. 7.

Andere Darstellung²⁾: Das Dreieck AGD [Fig. 7] sei gegeben, so sage ich, daß die Proportion bestehe: $AG : AD = \sin D : \sin G$. Beweis: Wir ziehen AB senkrecht auf die Verlängerung von DG , so ist klar, daß die Proportion besteht: $AG : AB = \sin B : \sin G$, ebenso: $AB : AD = \sin D : \sin B$, hieraus folgt: $AG : AD = \sin D : \sin G$, w. z. b. w.

(Dies ist) eine Abschrift aus einer Schrift $ABŪ'L-RAIHĀNS$ an $ABŪ^3$) $SA'ID$; Gott der Erhabene erbarme sich ihrer.

1) D. h. es besteht in der Tat die Proportion: $AB : AG = \sin G : \sin B$, denn $\sin G = AB$ und $\sin B = AG$.

2) Es scheint uns dies eine Einschiebung zu sein, die nicht zum Vorhergehenden gehört, schon die andere Bezeichnung des gegebenen Dreiecks (AGD statt ABG) deutet darauf hin; auch ist der Schluß im Manuskript durch Auslassung von Verhältnissen etwas verdorben; der Beweis ist übrigens von dem andern gar nicht verschieden, nur etwas kürzer gefaßt (vielleicht von $EL-BIRŪNĪ$).

3) Das „ $Abū$ “ fehlt im Text.

A note on the history of the slide rule.

By FLORIAN CAJORI in Colorado Springs.

In JACOB LEUPOLD's *Theatrum Arithmetico-Geometricum* (Leipzig 1727, page 71) there is given a description of a rectilinear slide rule. This is the earliest description of this type of slide rule that appeared in Germany. LEUPOLD begins by saying, „Wer der Inventor davon sey, kan nicht sagen, weil bey derjenigen Beschreibung, so ich als ein alt Manuscript von 10. Bogen besitze, nichts gedacht wird, ich auch dergleichen Linial sonst nirgends angetroffen“. The question as to the invention of the slide rule, to which LEUPOLD refers, has been settled only recently.¹⁾ It has been shown that WILLIAM OUGHTRED, and not EDMUND WINGATE, is the first inventor of the rectilinear slide rule. That WILLIAM OUGHTRED is the first inventor of the circular type has been admitted long since. LEUPOLD's description of the rectilinear slide rule and directions for using it cover in his book six large pages. As far as we know, no one has revealed the authorship of the manuscript used by LEUPOLD. It is the purpose of this paper to throw light upon this point.

Recently I had the opportunity to purchase a book, written by SETH PARTRIDGE and entitled *The Description and Use of an Instrument, called the Double Scale of Proportion* (London 1662). I shall show that the manuscript used by LEUPOLD was a translation of some edition of this book, in whole or in part.²⁾ Biographers of PARTRIDGE and writers on the slide rule have not been aware of the existence of a print of PARTRIDGE's book bearing as early a date as 1662. Copies of this 1662 edition appear to be very scarce. The copy in the British Museum is dated 1671. ALLIBONE's *Dictionary of authors* gives 1671 as the date of publication of the book. In SIDNEY LEE's *Dictionary of National biography*, Art. „PARTRIDGE, SETH,“

1) See CAJORI, *History of the logarithmic slide rule*, New York 1909; see also article in *Nature* (London) 82, 1909, p. 267.

2) Attention to this fact is called in my *History of the logarithmic slide rule*, under „Addenda“, but no quotations or explanations are made there to substantiate the statement.

we find a statement that the author completed the book in 1657, „but [that] it does not seem to have been published until 1672; other editions followed in 1685 and 1692“. The proof that the manuscript used by LEUPOLD was a translation from PARTRIDGE is easily given. In the first place, LEUPOLD says in § 130, „Es wird aber dieses Instrument von unsern unbekannten Autore die doppelte *Scala Proportionum* genennet“. This tallies with the title of PARTRIDGE's book, as given above. In the second place, LEUPOLD prints in quotation marks the parts (except his § 134) which he copies from the manuscript and every one of these passages is found in PARTRIDGE's book. There are few deviations from the English text. The following is a sample:

Leupold, 1727, pages 71, 72 (§ 130):

„Es bestehet dieses *Instrument* aus drey Linealen, deren jedes etwa einen halben Zoll breit, und $\frac{1}{4}$ Zoll (auch etwas mehr oder weniger) dicke, wie es einen jeden gefällt. Was die Länge anlanget, kan man sie 1. 2. oder 3. Fuss machen, denn je länger sie sind, je weiter und mehr können die Abtheilungen der *Scalarum* und folglich auch die *Operationes* desto genauer werden. Von diesen Linealen oder Stücken dieser *Scalarum* müssen die zwey äussersten einerley Länge, das mittlere aber wegen des Herausziehens etwas hervorragender, sonst aber alle drey von gleicher Dicke seyn, und an denen Ecken so juste zusammen schliessen, dass sie können zugleich enge und genau aneinander geschoben werden, und sollen sie an jedem Ende ein klein messingnen Blättgen haben, welches sie zusammen halte, und an den beyden äussern Stücken also befestiget sey, dass sie feste liegen, und das mittlere Lineal zwischen ihnen auf- und abgeschoben werden könne.“

Partridge, 1662, pages 2, 3:

„It consisteth of three pieces, or Rulers, each one about half an inch in breadth, and about a quarter of an inch in thickness, more or lesse, as the Maker and User of them pleaseth; and for their length, they may be made to what length you will, either one foot, two foot, three foot, or more or lesse, for they are not limited to any length, onely the longer they are, the larger and more will be the divisions of the Scales, and so consequently the more exact in operation. These three Rulers, or pieces of this *Scale*, are to be all of one even length and thickness, and the edges so evenly joynted, that they may justly slide along close one by the other, having at each end a little plate of Brasse, or wood fitted to hold them close together, & so fastened to the two out-side pieces, that they may be kept steady, and the middle Ruler to slide to and fro between them.“

We indicate in what follows the pages in the 1662 edition of PARTRIDGE which contain the parts quoted by LEUPOLD.

Leupold.	Partridge.	Leupold.	Partridge.
§ 130.	Pages 1—4.	§ 138.	Pages 12, 13.
§ 131.	Page 4.	§ 139.	„ 17, 23, 33.
§ 132.	Pages 4, 5.	§ 140.	Page 71.
§ 133.	„ 5, 6.	§ 141.	„ 86.
§ 134.	Page 6.	§ 142.	„ 112.
§ 135.	Not in PARTRIDGE.	§ 143.	„ 119.
§ 136.	Pages 9, 10, 11.	§ 144.	Not in PARTRIDGE.
§ 137.	Not in PARTRIDGE.	§ 145.	Pages 165, 166.
		§ 146.	„ 183, 184.

The three sections in LEUPOLD's book not found in PARTRIDGE are not printed there in quotation marks and consist merely of remarks on the extent to which the slide rule may be used and of elucidations relating to the placing of the decimal point.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage¹⁾ von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“.
BM = Bibliotheca Mathematica.

1³: 12, 15, 22, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 61. — **1³: 33**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 307. — **1³: 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 61—64. — **1³: 163—165**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 64, 173—174. — **1³: 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 64—65. — **1³: 198, 201**, siehe BM **9₁**, 1908/9, S. 237. — **1³: 202**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 307—309. — **1³: 203**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 65, 309. — **1³: 206**, siehe BM **9₁**, 1908/9, S. 237—238. — **1³: 213, 225, 236, 245**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 65.

1³: 252. Der Passus: „Man könnte vielleicht erwarten, daß wir in den Schriften des ARISTOTELES die zahlreichen Beispiele absuchten, welche der Geometrie und der Arithmetik entnommen sind. Wir werden uns dieser Mühe nicht unterziehen“ sollte in der 3. Auflage der *Vorlesungen* modifiziert worden sein, weil er seit 1904 fast sinnlos ist, denn der fraglichen Mühe hat sich HEIBERG in seiner von Herrn CANTOR am Ende der Fußnote 1 zitierten Arbeit schon unterzogen. Wie viele der von HEIBERG durchmusterten mathematischen Stellen bei ARISTOTELES „eine geschichtliche Bedeutsamkeit“ besitzen, ist wohl zum Teil eine Geschmackssache, aber wer mit Aufmerksamkeit die HEIBERGSche Arbeit liest, kann daraus wertvolle Ergänzungen der CANTORSchen Darstellung bekommen.

G. ENESTRÖM.

1³: 257, siehe BM **9₁**, 1908/9, S. 139. — **1³: 270, 287, 297**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 66. — **1³: 298**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 66; **10₁**, 1909/10, S. 53—54. — **1³: 310**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 66. — **1³: 335, 339—340, 344, 348**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 174—176. — **1³: 351**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 66. — **1³: 365, 368**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 177. — **1³: 372**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 411—412; **9₁**, 1908/9, S. 238. — **1³: 374, 376**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 412—413. — **1³: 380**, siehe BM **8₁**, 1907/8, S. 66—67.

1³: 383—384. Es wäre meines Erachtens angebracht, die Ausführungen zu streichen, die S. 383 Z. 29 mit den Worten: „Wenn wir noch so vorsichtig“ beginnen und S. 384 Z. 15 mit den Worten: „senkrecht zueinander gezeichneter Strecken“ enden. Es handelt sich um die Frage, ob im 23. Kapitel

¹⁾ Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

der HERONSchen *Dioptra* ein bewußtes Verfahren mit rechtwinkligen Koordinaten zu erkennen sei. Liest man mit Aufmerksamkeit das betreffende Kapitel, so dürfte man leicht finden, daß die Geraden, deren sich HERON bedient, nicht als Koordinaten betrachtet werden können. Sie sind nämlich nur da, um ein gegebenes Flächenstück in kleinere Stücke zu zerlegen, die als geradlinig behandelt werden können. Daß bei HERON die kleineren Geraden auf den längeren Geraden senkrecht stehen, beruht offenbar darauf, daß die meisten Figuren dadurch Paralleltrapeze werden und also leicht zu berechnen sind. Wenn man von rechtwinkligen Koordinaten spricht, so denkt man wohl an die Bestimmung der Lage gewisser Punkte durch ihre Abstände von zwei Achsen, aber bei HERON kommen nur die Abstände der Punkte von der längeren Geraden in Betracht, und diese Abstände werden gemessen, nicht um die Lage der Punkte festzustellen, sondern weil sie Seiten der zu berechnenden Paralleltrapeze sind.

G. ENESTRÖM.

1^s: 388, siehe BM S., 1907/8, S. 177.

1^s: 394. Es ist richtig, daß der Verfasser der von HULTSCH unter dem Titel *HERONIS Geometria* herausgegebenen Schrift das Wort *κορυφή* als Scheitellinie definiert, aber da diese Schrift nach der Ansicht der meisten Sachkundigen byzantinischen Ursprungs ist, darf man nicht mit Herrn CANTOR folgern, daß HERON selbst das Wort *κορυφή* in dieser speziellen Bedeutung gebraucht hat. In den echten HERONSchen *Metrika* bedeutet das Wort sowohl Scheitellinie (siehe z. B. die Ausgabe von H. SCHÖNE, S. 100 Z. 8) wie Scheitelpunkt (siehe z. B. a. a. O. S. 112 Z. 10) und Scheitelfläche (siehe z. B. a. a. O. S. 104 Z. 4). Unter den von HULTSCH 1864 herausgegebenen Schriften dürfte übrigens die „*Geometria*“ die einzige sein, in der das Wort *κορυφή* die spezielle Bedeutung Scheitellinie hat.

G. ENESTRÖM.

1^s: 401–402, siehe BM S., 1908/9, S. 239. — 1^s: 406, 409, siehe BM S., 1907/8, S. 177–178. — 1^s: 409, siehe BM S., 1908/9, S. 239. — 1^s: 410, siehe BM S., 1907/8, S. 178. — 1^s: 429, siehe BM S., 1907/8, S. 67. — 1^s: 431, siehe BM S., 1907/8, S. 67; S., 1908/9, S. 139–140. — 1^s: 432, siehe BM S., 1907/8, S. 67, 178–179. — 1^s: 433, siehe BM S., 1907/8, S. 179. — 1^s: 447, 448, siehe BM S., 1908/9, S. 239–240. — 1^s: 452, siehe BM S., 1907/8, S. 179. — 1^s: 459, siehe BM S., 1907/8, S. 309–310. — 1^s: 464, siehe BM S., 1907/8, S. 179. — 1^s: 470, siehe BM S., 1907/8, S. 311. — 1^s: 471, siehe BM S., 1907/8, S. 413. — 1^s: 476, siehe BM S., 1908, S. 71–72. — 1^s: 488, siehe BM S., 1907/8, S. 67. — 1^s: 498, siehe BM S., 1907/8, S. 180. — 1^s: 500, siehe BM S., 1907/8, S. 67; S., 1908/9, S. 321–322. — 1^s: 502, siehe BM S., 1907/8, S. 67. — 1^s: 503–504, siehe BM S., 1907/8, S. 180–181; S., 1908/9, S. 240–241. — 1^s: 509, 510, siehe BM S., 1907/8, S. 67. — 1^s: 512, siehe BM S., 1908/9, S. 140–141. — 1^s: 513, 515, 528, 545, siehe BM S., 1907/8, S. 68–69. — 1^s: 551, siehe BM S., 1908/9, S. 141–142. — 1^s: 556, siehe BM S., 1909/10, S. 54. — 1^s: 563–564, siehe BM S., 1907/8, S. 69. — 1^s: 567, siehe BM S., 1908/9, S. 241. — 1^s: 576, siehe BM S., 1907/8, S. 69–70, 181; S., 1908/9, S. 142. — 1^s: 580, 583, 590–591, 660, 664, 703, 704, siehe BM S., 1907/8, S. 70. — 1^s: 706, siehe BM S., 1907/8, S. 70, 181. — 1^s: 710, siehe BM S., 1908/9, S. 241. — 1^s: 713, siehe BM S., 1907/8, S. 70. — 1^s: 715, siehe BM S., 1908/9, S. 241. — 1^s: 715–716, siehe BM S., 1907/8, S. 70–71, 181. — 1^s: 717, siehe BM S., 1907/8, S. 71, 182–183. — 1^s: 718, siehe BM S., 1907/8, S. 71; S., 1908/9, S. 242. — 1^s: 719, siehe BM S., 1907/8, S. 183–184. — 1^s: 720, siehe BM S., 1907/8, S. 71. — 1^s: 730, siehe BM S., 1907/8, S. 71, 184–185. — 1^s: 734, siehe BM S., 1907/8, S. 71. —

1^s: 736, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 242. — **1^s: 736—737**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 71—72, 185. — **1^s: 738**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 72. — **1^s: 742**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 242. — **1^s: 743, 748, 750**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 72. — **1^s: 763**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 242. — **1^s: 764**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 185. — **1^s: 766**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 143. — **1^s: 770**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 185. — **1^s: 771**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 143. — **1^s: 779**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 243. — **1^s: 780, 781**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 72. — **1^s: 792**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 143—144. — **1^s: 794**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 72. — **1^s: 795**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 243. — **1^s: 798**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 144. — **1^s: 800**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 73; **9_s**, 1908/9, S. 144—145. — **1^s: 801**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 185—186; **9_s**, 1908/9, S. 145. — **1^s: 802**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 73, 186—187, 414—415. — **1^s: 805—806**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 73. — **1^s: 809—810**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 243. — **1^s: 815**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 73. — **1^s: 838**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 415. — **1^s: 842**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 243. — **1^s: 854**, siehe BM **10_s**, 1909/10, S. 55. — **1^s: 855**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 73. — **1^s: 857**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 73; **9_s**, 1908/9, S. 243—244. — **1^s: 859, 862, 863**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 73—74. — **1^s: 867**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 74, 187. — **1^s: 869, 875—876, 877, 878**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 74—76. — **1^s: 881**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 415—416. — **1^s: 882, 889, 893**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 77—78. — **1^s: 900**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 78, 187—188. — **1^s: 901**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 145—146. — **1^s: 902**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 78—79. — **1^s: 906**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 79, 188—189; **9_s**, 1908/9, S. 244. — **1^s: 908**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 79; **9_s**, 1908/9, S. 146—147. — **1^s: 909**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 79. — **1^s: 910**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 79, 416. — **1^s: 911**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 79—80.

2: 5, siehe BM **7_s**, 1906/7, S. 286; **8_s**, 1907/8, S. 80. — **2: 7**, siehe BM **2_s**, 1901, S. 351. — **2: 8**, siehe BM **1_s**, 1900, S. 501; **6_s**, 1905, S. 309. — **2: 9**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 147. — **2: 10**, siehe BM **1_s**, 1900, S. 502; **9_s**, 1908/9, S. 147—148. — **2: 11**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 189. — **2: 14—15**, siehe BM **2_s**, 1901, S. 144; **5_s**, 1904, S. 200; **6_s**, 1905, S. 208—209. — **2: 17**, siehe BM **8_s**, 1907/8, S. 189. — **2: 20**, siehe BM **1_s**, 1900, S. 502; **3_s**, 1902, S. 239. — **2: 25**, siehe BM **1_s**, 1900, S. 274; **9_s**, 1908/9, S. 148. — **2: 26**, siehe BM **9_s**, 1908/9, S. 244—245. — **2: 30**, siehe BM **6_s**, 1905, S. 105.

2: 30. Mit Recht hat SUTER (BM **6_s**, 1905, S. 105) hervorgehoben, daß die Angabe: „wie auch die Araber eine dritte Annäherung stets als die letzte betrachteten“ auf Grund einer Stelle bei EL-HASSAR (BM **2_s**, 1901, S. 37—38) modifiziert werden muß. Indessen ist EL-HASSAR in Wahrheit viel weiter gegangen und besser verfahren, als SUTER angibt. Bei EL-HASSAR kommen die drei Formeln vor:

$$\sqrt{5} \sim 2 + \frac{1}{2 \cdot 2} = 2\frac{1}{4}, \quad \sqrt{5} \sim 2\frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 2\frac{1}{4}} = 2\frac{17}{72}, \quad \sqrt{5} \sim 2\frac{17}{72} - \frac{(\frac{1}{72})^2}{2 \cdot 2\frac{17}{72}},$$

und wenn man die Worte EL-HASSARS „so kannst du fortfahren, soweit du willst“ in Betracht zieht, so muß man annehmen, daß die drei Formeln auf dieselbe Weise gebildet worden sind. In der Tat ist $1 = 5 - 2^2$, $\frac{1}{16} = (2\frac{1}{4})^2 - 5$, $(\frac{1}{72})^2 = (2\frac{17}{72})^2 - 5$, so daß man die drei Formeln auf folgende Weise schreiben kann:

$$\sqrt{5} \sim 2 - \frac{2^2 - 5}{2 \cdot 2}, \quad \sqrt{5} \sim 2\frac{1}{4} - \frac{(2\frac{1}{4})^2 - 5}{2 \cdot 2\frac{1}{4}}, \quad \sqrt{5} \sim 2\frac{17}{72} - \frac{(2\frac{17}{72})^2 - 5}{2 \cdot 2\frac{17}{72}};$$

aus einem schon berechneten Näherungswert a_n von $\sqrt{A}$ erhält man also nach EL-HASSAR einen neuen Näherungswert a_{n+1} durch die Formel

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 - A}{2a_n}.$$

SUTER hat übersehen, daß $(\frac{1}{72})^2 = (2\frac{17}{72})^2 - 5$, und darum gibt er an, daß EL-HASSAR aus dem zweiten Näherungswert $a + \frac{p}{q}$ den dritten durch den Ausdruck $a + \frac{p}{q} - \frac{(\frac{1}{q})^2}{2(a + \frac{p}{q})}$ berechnet. Aber diese schlechte Berechnungsweise stimmt nicht gut mit den Worten: „so kannst du fortfahren, soweit du willst“ überein.

G. ENESTRÖM.

2:31, siehe BM **2**₃, 1901, S. 351—352; **3**₃, 1902, S. 239—240; **6**₃, 1905, S. 309—310. — **2:32**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 105. — **2:34**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 144; **6**₃, 1905, S. 310; **8**₃, 1907/8, S. 190. — **2:37**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 502; **6**₃, 1905, S. 105. — **2:38**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 352; **9**₃, 1908/9, S. 148. — **2:39**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 502; **6**₃, 1905, S. 209; **9**₃, 1908/9, S. 245. — **2:41**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 352; **8**₃, 1907/8, S. 80—81; **9**₃, 1908/9, S. 72—73. — **2:45**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 148—150. — **2:46**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 81. — **2:51**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 106; **9**₃, 1908/9, S. 150. — **2:52**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 190—191. — **2:53**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 201. — **2:57**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 352. — **2:59**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 207—208. — **2:59—60**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 502; **6**₃, 1905, S. 310—311. — **2:61**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 85—86, 208—209, 286—287; **9**₃, 1908/9, S. 150. — **2:63**, siehe BM **4**₃, 1903, S. 206. — **2:65**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 151. — **2:67**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 209—210. — **2:70**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 417. — **2:73**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 502. — **2:77**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 152. — **2:82**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 502. — **2:87**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 502; **9**₃, 1908/9, S. 323. — **2:88**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 503; **6**₃, 1905, S. 395. — **2:89**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 503; **9**₃, 1908/9, S. 245—246. — **2:90**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 503. — **2:91—92**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 503; **5**₃, 1904, S. 409—410; **6**₃, 1905, S. 395—396; **8**₃, 1907/8, S. 191; **9**₃, 1908/9, S. 152.

2:94. Die Bemerkung: „Man sollte zum voraus der Meinung sein, der Ordensgenosse und fast Zeitgenosse eines JORDANUS müsse tief in die Mathematik eingedrungen sein“, sowie die folgenden Worte: „müsse . . . täuschen“ sollten gestrichen werden; sie enthalten nämlich im besten Falle eine allzu billige stilistische Auszierung der Darstellung. Bekanntlich ist die Identität des Mathematikers JORDANUS NEMORARIUS mit dem Ordensgeneral JORDANUS SAXO höchstens als wahrscheinlich zu betrachten, und auch wenn man diese Identität als bewiesen voraussetzt, so hat man gar keinen Anlaß zu vermuten, daß JORDANUS versucht hat, die Mitglieder des Dominikanerordens zu wirklichen Mathematikern zu machen. PAUL TANNERY war ja ein sehr hervorragender Historiker der Mathematik, aber es wäre geradezu lächerlich, aus diesem Grunde glauben zu wollen, daß die Ingenieure an der Tabakfabrik in Pantin tief in die Geschichte der Mathematik eingedrungen sind.

G. ENESTRÖM.

2:96. Wie PAUL TANNERY in der von Herrn CANTOR zitierten Abhandlung über ROBERTUS ANGLICUS (S. 10, Fußnote 2) bemerkt, ist der *Tractatus quadrantis* auch ins Deutsche übersetzt worden; diese Übersetzung wurde einige Monate nach dem Erscheinen der 2. Auflage der 1. Hälfte des 2. Bandes der *Vorlesungen* von M. CURTZE herausgegeben und zwar im 9. Heft der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik (Leipzig 1899, S. 41—63).

Nebenbei bemerke ich, daß im *Tractatus quadrantis* auch ein Kapitel „De altitudinibus rerum sine quadrante per uirgam“ (S. 63 der Ausgabe TANNERYs)

vorkommt, in dem dasselbe Verfahren (Höhenmessung mit der festen Stange) gelehrt wird, das Herr CANTOR S. 171 als einen entschiedenen Rückschritt bezeichnet; in der deutschen Übersetzung, die etwa aus der Zeit von 1477 zu stammen scheint, findet sich dies Kapitel auch (S. 51 der Übersetzung CURTZES). Es ist schade, daß Herr CANTOR dieses Kapitel nicht gelesen hat, denn sonst hätte er vielleicht aus den Anfangsworten: „Si autem non habeas quadrantem et uelis mensurare altitudinem alicuius rei“ veranlaßt werden können, in Betracht zu ziehen, ob unter allen Umständen eine Höhenmessung mit der festen Stange ein entschiedener Rückschritt sein muß.

G. ENESTRÖM.

2:97, siehe BM 3., 1902, S. 406. — 2:98—99, siehe BM 1., 1900, S. 269—270; 6., 1905, S. 106—107; 7., 1906/7, S. 210. — 2:100, siehe BM 3., 1902, S. 140; 8., 1907/8, S. 81; 9., 1908/9, S. 73—74. — 2:101, siehe BM 3., 1902, S. 325; 6., 1905, S. 396; 9., 1908/9, S. 152—153.

2:104. Z. 20—41 beschäftigt sich Herr CANTOR mit einer bekannten Stelle der EUKLID-Übersetzung, die von RATDOLT 1482 herausgegeben wurde, und die ich der Kürze halber die Übersetzung des CAMPANUS nennen werde. Diese Stelle, die am Ende der „Communes animi conceptiones“ hinzugefügt ist, lautet (ich zitiere nach der EUKLID-Ausgabe, Basel 1537, S. 3):

Quanta est aliqua quantitas ad quamlibet aliam eiusdem generis, tantam esse quamlibet tertiam ad aliquam quartam eiusdem generis. In quantitativis continuis hoc universaliter verum est, sive antecedentes maiores fuerint consequentibus, sive minores: magnitudo enim decrescit in infinitum: in numeris autem, non sic. Sed si fuerit primus submultiplex secundi, erit quilibet tertius aequae submultiplex alicuius quarti: quoniam numerus crescit in infinitum, sicut magnitudo in infinitum minuitur.

Für mich gibt es nur eine einzige Deutung dieser Stelle, weil sie meines Erachtens keine Unklarheit enthält, und diese Deutung ist selbstverständlich die folgende: Wenn die Größen A , B , C gegeben sind, so ist es immer möglich, eine vierte Größe D so zu bestimmen, daß $A:B = C:D$, vorausgesetzt, daß A , B , C kontinuierliche, d. h. geometrische Größen sind. Ist dagegen C eine Zahl, so ist dies nicht immer möglich [vgl. den Fall, in dem A die Seite und B die Diagonale eines Quadrates ist]; anderseits ist das Problem immer lösbar, wenn $B = nA$ (n eine ganze Zahl).

Wie gesagt halte ich diese Deutung für die einzig mögliche, und diese Deutung stimmt mit der folgenden Angabe des Herrn CANTOR überein: „Bei der stetigen Größe muß ein Viertes sich finden lassen, zu welchem ein Drittes in dem Verhältnisse steht, wie ein Erstes zu einem Zweiten.“ Aber unmittelbar nachher bringt Herr CANTOR die folgende höchst überraschende Bemerkung:

Das ist aber nur dem Ausdrücke, nicht dem Sinne nach verschieden von dem Satze, daß beim stetigen Übergange von einem Kleineren zu einem Größeren unbedingt ein Zwischenzustand eintreten müsse, der irgend einem zwischen dem Kleineren und dem Größeren Liegenden genau gleich sei, und dieses Satzes Unwahrheit behauptet CAMPANUS an dieser zweiten Stelle [es handelt sich um *Elementa* III:16] der EUKLID-Ausgabe.

Hinsichtlich dieser Deutung der betreffenden Stelle bei CAMPANUS habe ich folgendes zu bemerken:

- a) die Stelle enthält in Wirklichkeit nicht die leiseste Andeutung des Satzes, den Herr CANTOR aus derselben herauslesen will;
- b) es wäre sehr auffällig (vgl. was Herr CANTOR selbst Z. 20 hervorhebt), wenn CAMPANUS von der Unwahrheit des Satzes, den seines Erachtens EUKLIDES stillschweigend als Axiom betrachtete, überzeugt gewesen wäre, ohne dies sofort anzugeben;
- c) als Beleg verweist Herr CANTOR auf eine zweite Stelle bei CAMPANUS, aber der Verweis ist mir unverständlich. An dieser Stelle beweist nämlich CAMPANUS, wie Herr CANTOR selbst Z. 15—16 andeutet, daß es keinen geradlinigen Winkel gibt, der dem Winkel des Halbkreises gleich sei, d. h. daß dieser Winkel nicht gleicher Art mit dem geradlinigen Winkel ist. Aber an der ersten Stelle handelt es sich ja gerade um Verhältnisse zwischen zweien Größen derselben Art („eiusdem generis“).

Ein großer Teil der Seite 104 sollte also meines Erachtens auf andere Weise redigiert werden.

G. ENESTRÖM.

2:104—105, siehe BM 1., 1900, S. 503; 4., 1903, S. 397—398; 9., 1908/9, S. 153. — 2:106, siehe BM 7., 1906/7, S. 380. — 2:111, siehe BM 2., 1901, S. 352. — 2:112, siehe BM 10., 1909/10, S. 56. — 2:112—113, siehe BM 10., 1909/10, S. 56—57. — 2:114, siehe BM 9., 1908/9, S. 153; 10., 1909/10, S. 57. — 2:116, siehe BM 3., 1902, S. 406; 9., 1908/9, S. 153—154. — 2:117—118, siehe BM 6., 1905, S. 107, 311. — 2:122, siehe BM 1., 1900, S. 503—504; 6., 1905, S. 397. — 2:126, siehe BM 3., 1902, S. 406; 6., 1905, S. 210. — 2:127, siehe BM 3., 1902, S. 406. — 2:128, siehe BM 1., 1900, S. 504; 8., 1907/8, S. 191—192. — 2:129, siehe BM 7., 1906/7, S. 287. — 2:132, siehe BM 1., 1900, S. 515—516. — 2:143, siehe BM 1., 1900, S. 504. — 2:144, siehe BM 7., 1906/7, S. 381. — 2:145, siehe BM 7., 1906/7, S. 287. — 2:148, siehe BM 7., 1906/7, S. 381—382. — 2:150—151, siehe BM 7., 1906/7, S. 288. — 2:155, siehe BM 9., 1908/9, S. 323—325. — 2:155—156, siehe BM 5., 1904, S. 410—411; 7., 1906/7, S. 86—87. — 2:157, 158, siehe BM 2., 1901, S. 352. — 2:160—162, siehe BM 6., 1905, S. 311—312; 7., 1906/7, S. 87—88; 9., 1908/9, S. 154. — 2:163, siehe BM 1., 1900, S. 504; 6., 1905, S. 312. — 2:164, siehe BM 6., 1905, S. 313. — 2:165, siehe BM 7., 1906/7, S. 382; 9., 1908/9, S. 246—247. — 2:166, siehe BM 1., 1900, S. 504. — 2:171, siehe BM 10., 1909/10, S. 58. — 2:175, siehe BM 3., 1902, S. 140. — 2:178—179, siehe BM 8., 1907/8, S. 192—193; 10., 1909/10, S. 58. — 2:206, siehe BM 6., 1905, S. 313. — 2:208, siehe BM 9., 1908/9, S. 247. — 2:210, siehe BM 2., 1901, S. 352—353. — 2:218, siehe BM 4., 1903, S. 284. — 2:219, siehe BM 2., 1901, S. 353. — 2:222, siehe BM 6., 1905, S. 397—398. — 2:224—226, siehe BM 9., 1908/9, S. 155. — 2:228, siehe BM 8., 1907/8, S. 193. — 2:229, siehe BM 1., 1900, S. 504—505; 8., 1907/8, S. 194. — 2:230, siehe BM 8., 1907/8, S. 195—196; 9., 1908/9, S. 155—157. — 2:232, 234, 237, siehe BM 8., 1907/8, S. 196—198. — 2:238, siehe BM 8., 1907/8, S. 198; 10., 1909/10, S. 59.

2:238. Der Däne AQUINAS hat sich jedenfalls längere Zeit in Nürnberg aufgehalten. Denn STIBORIUS gibt bei Aufzählung berühmter Mathematiker Deutschlands an: „Nuernberge: BARBATUS BERNARDUS cum monacho praedicatoris AQUINO Daco preceptore meo“ (in der Vorrede zu den 1514 von TANNSTETTER herausgegebenen *Tabulae eclipsium* des PEUERBACH und *Tabula primi mobilis* des REGIOMONTAN).

A. STURM.

2:240, siehe BM 8., 1907/8, S. 198—199; 10., 1909/10, S. 59. — 2:242, siehe BM 1., 1900, S. 505; 8., 1907/8, S. 199—200. — 2:243, siehe BM 1., 1900,

S. 505; **6**₃, 1905, S. 398; **7**₃, 1906/7, S. 382; **8**₃, 1907/8, S. 200. — **2:245**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 383. — **2:246**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 283; **8**₃, 1907/8, S. 200. — **2:247**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 383—384; **9**₃, 1908/9, S. 247. — **2:249**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 200—201. — **2:250**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 82. — **2:253**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 353. — **2:272**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 247. — **2:273**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 505. — **2:274**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 325. — **2:281**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 411. — **2:282**, **283**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 506; **2**₃, 1901, S. 353—354. — **2:284**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 506; **9**₃, 1908/9, S. 157—158. — **2:286**, **287**, **289**, **290**, **291**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 506—507. — **2:296**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 354. — **2:304**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 201. — **2:305**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 88. — **2:306**, **308**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 248. — **2:313**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 507. — **2:314**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 288—289. — **2:317**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 69; **7**₃, 1906/7, S. 384. — **2:318**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 158. — **2:319**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 201—202. — **2:320**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 88—89; **9**₃, 1908/9, S. 248. — **2:322**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 399; **8**₃, 1907/8, S. 202—203. — **2:325**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 313—314. — **2:327**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 248—249. — **2:328**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 140; **4**₃, 1903, S. 285. — **2:334**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 507. — **2:339**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 82.

2:341, Z. 11 v. u. In Wirklichkeit sind nur 26 Blätter, die aber irrtümlich als 27 gezählt sind.

A. STURM.

2:343. Der Umstand, daß PACIUOLO das Wort „corausto“ erklärt, beweist nach Herrn CANTOR, daß „Agrimensoren am Ende des 15. Jahrhunderts auch in Italien wieder gelesen wurden“. Aber bekanntlich wird das Wort „coraustus“ auch in der *Geometria GERBERTI* gebraucht, und zwar als Benennung der oberen Linie eines Trapeziums (siehe *GERBERTI Opera mathematica* ed. N. BUBNOV, Berlin 1899, S. 77, 78), und PACIUOLO kann also sehr wohl das Wort mittelbar oder unmittelbar aus der *Geometria GERBERTI* entnommen haben. Der Passus (Z. 11—16): „Wir wissen ... geführt werden konnte“ sollte also gestrichen oder modifiziert werden.

G. ENESTRÖM.

2:351, siehe BM **6**₃, 1905, S. 399. — **2:353**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 507; **4**₃, 1903, S. 87. — **2:355**, **357**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 399—400. — **2:358**, siehe BM **4**₃, 1903, S. 87; **8**₃, 1907/8, S. 203. — **2:360**, siehe BM **4**₃, 1903, S. 87. — **2:371**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 314. — **2:375**, siehe BM **9**₃, 1908, S. 75. — **2:379**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 400; **7**₃, 1906/7, S. 384. — **2:380**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 400—401. — **2:381**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 507. — **2:382**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 60. — **2:385**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 81; **4**₃, 1903, S. 207; **7**₃, 1906/7, S. 289.

2:385. Die genaue Beschreibung des Sammelbandes, die Herr CANTOR unter dem unrichtigen (vgl. BM **4**₃, 1903, S. 207) Titel: „Opuscula de CHARLES DE BOUVELLES“ zitiert, hat D. E. SMITH kürzlich in seinen *Rara arithmetica* (Boston 1908, S. 89—91) gebracht. Dasselbst findet sich auch ein Faksimile des Titelblattes, das eigentlich nur ein Inhaltsverzeichnis bietet. Aus der Beschreibung ersieht man, daß der „Liber de duodecim numeris“ (Bl. 148—171) nichts über vollkommene Zahlen enthält; dieser Gegenstand wird erst in einem folgenden Traktat „De numeris perfectis“ (Bl. 172—180) behandelt. Überdies werden auf dem Titelblatt folgende mathematische Traktate erwähnt: „De mathematicis rosis“, „De geometricis corporibus“, „De geometricis supplementis“, die zusammen Bl. 180^b—198 füllen, so daß die CANTORSche Angabe Z. 4 modifiziert werden muß.

G. ENESTRÖM.

2: 386, siehe BM **1**, 1900, S. 507; **5**, 1904, S. 306. — **2: 388**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 289. — **2: 392**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 82.

2: 392. Laut einem in Melk befindlichen Bilde war **TANSTETTER** 1482 geboren und laut der Grabschrift hinter der Spitalkirche in Innsbruck starb er 1535.

A. STURM.

2: 395, siehe BM **1**, 1900, S. 507—508. — **2: 396**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 82. — **2: 397**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 211. — **2: 398**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 204; **9**, 1908/9, S. 158—160. — **2: 399**, siehe BM **6**, 1905, S. 107—108; **8**, 1907/8, S. 204—205. — **2: 401, 405**, siehe BM **1**, 1900, S. 507. — **2: 410**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 290. — **2: 411, 412**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 89. — **2: 413**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 205. — **2: 419**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 205—206; **9**, 1908/9, S. 249—250. — **2: 420**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 83, 206. — **2: 421, 422**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 206. — **2: 425**, siehe BM **1**, 1900, S. 507. — **2: 426**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 207; **10**, 1909/10, S. 60—61. — **2: 427**, siehe BM **6**, 1905, S. 314—315; **8**, 1907/8, S. 207. — **2: 428**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 208; **9**, 1908/9, S. 160. — **2: 429**, siehe BM **5**, 1904, S. 201—202; **8**, 1907/8, S. 208—209. — **2: 430**, siehe BM **2**, 1901, S. 145. — **2: 434**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 160—161. — **2: 437—438**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 209—210. — **2: 440**, siehe BM **4**, 1903, S. 285. — **2: 441**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 161. — **2: 442**, siehe BM **3**, 1902, S. 325. — **2: 444**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 210. — **2: 446**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 250. — **2: 449**, siehe BM **3**, 1902, S. 140.

2: 449, Z. 11 v. u. Die Geometrie des **WOLFGANG SCHMID** ist vom Jahre 1539.

A. STURM.

2: 452, siehe BM **8**, 1907/8, S. 210. — **2: 454**, siehe BM **3**, 1902, S. 242. — **2: 457**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 250—251. — **2: 471**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 161. — **2: 474**, siehe BM **3**, 1902, S. 140—141; **9**, 1908/9, S. 161, 251. — **2: 476**, siehe BM **9**, 1908, S. 75. — **2: 479—480**, siehe BM **3**, 1902, S. 141; **7**, 1906/7, S. 290—291, 385; **9**, 1908, S. 75, 251. — **2: 481**, siehe BM **1**, 1900, S. 508; **8**, 1907/8, S. 83. — **2: 482**, siehe BM **1**, 1900, S. 508; **2**, 1901, S. 354; **3**, 1902, S. 240; **6**, 1905, S. 401. — **2: 483**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 291. — **2: 484**, siehe BM **3**, 1902, S. 141. — **2: 486, 489**, siehe BM **1**, 1900, S. 509. — **2: 490**, siehe BM **1**, 1900, S. 509; **7**, 1906/7, S. 385—386. — **2: 497**, siehe BM **1**, 1900, S. 509; **4**, 1903, S. 87; **7**, 1906/7, S. 291, 386. — **2: 503, 505**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 292. — **2: 506, 507**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 162—163. — **2: 509**, siehe BM **1**, 1900, S. 270, 509. — **2: 510**, siehe BM **1**, 1900, S. 509. — **2: 512**, siehe BM **3**, 1902, S. 141. — **2: 514, 516, 517**, siehe BM **1**, 1900, S. 509. — **2: 524**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 90.

2: 524. Hier sollten etwa 6 Zeilen gestrichen werden, nämlich (Z. 25—31): „Für einen Übersetzer . . . nicht schieben, da“. Herr **CANTOR** bemängelt **TARTAGLIA**, weil dieser die Definitionen: „die gerade Linie ist die kürzeste Ausdehnung von einem Punkte zum anderen“ und „die Ebene ist die kürzeste Ausdehnung von einer Linie zur anderen“ **EUKLIDISCH** nennt. Aber bekanntlich finden sich gerade in der lateinischen Übersetzung, die am Anfange des 16. Jahrhunderts allgemein benutzt wurde, nämlich die Übersetzung, welche unter dem Namen des **CAMPANUS** herausgegeben worden ist, die Definitionen: „Linea recta, est ab uno puncto ad alium brevissima extensio, in extremitates suas eos recipiens“ und „Superficies plana, est ab una linea ad aliam brevissima extensio, in extremitates suas eas recipiens“. Wenn sich Herr **CANTOR** der Mühe unterzogen hätte, die von ihm S. 514 zitierte italienische **EUKLID-**

Übersetzung TARTAGLIAS einzusehen, so hätte er gefunden, daß TARTAGLIA die dritte [d. h. nach unserer Zählung die vierte] Definition des 1. Buches der *Elementa* auf folgende Weise übersetzt (siehe die Auflage Venedig 1565, Bl. 9): „La linea retta è la breuissima estensione da uno ponto ad un'altro, che riceue l'uno e l'altro di quelli nelle sue estremità“, und schon hieraus kann man folgern, daß die von Herrn CANTOR bemängelte Ausdrucksweise des *General trattato di numeri, et misure* nicht auf „Nachlässigkeit“ beruht.

Übrigens ist es ein wenig auffällig, daß Herrn CANTOR die von dem EUKLIDischen Texte abweichenden Definitionen der oben erwähnten lateinischen Übersetzung unbekannt geblieben sind. Die Kenntnis derselben kann ohne weiteres aus der verbreiteten EUKLID-Ausgabe von CLAVIUS entnommen werden (siehe z. B. die Auflage Rom 1603, S. 34), und in unseren Tagen hat H. WEISSENBORN im dritten Heft der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik (Leipzig 1880, S. 147) besonders hervorgehoben, daß „CAMPANO, abweichend von dem griechischen Texte, die gerade Linie als die *brevissima extensio* definiert und somit das Axiom: Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten vorwegnimmt“.

G. ENESTRÖM.

2:525. Der Anfang dieser Seite enthält ein gutes Beispiel einer unkritischen Kritik. Es handelt sich um einen Absatz bei TARTAGLIA, in dem die Fläche eines Rhombus mit den Diagonalen 20 und 10 berechnet wird, und als Resultat gibt TARTAGLIA richtig 100 an. Aber am Anfange desselben Absatzes behandelt TARTAGLIA die Frage, wie groß die Fläche eines Rhombus mit der Seite 6 ist, und bemerkt, daß sie offenbar kleiner als 36 sein muß; ferner findet sich am Rande des Absatzes eine einzige Figur, in der neben den zwei Diagonalen und den Seiten bzw. die Zahlen 20, 5 und 5, und 6 stehen. Dieser letzte Umstand veranlaßt nun Herrn CANTOR zu behaupten, daß TARTAGLIA durch ein „Versehen“ (!) 5 und 10 als Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse 6 angegeben hat, obgleich der Text kein einziges Wort hierüber enthält. Ich gebe natürlich zu, daß es richtiger gewesen wäre, dem fraglichen Absatz zwei Figuren beizufügen, aber wie Herr CANTOR dazu gekommen ist, auf Grund der Vereinigung zweier Figuren in eine einzige dem Verfasser des *General trattato di numeri et mesure* ein „Versehen“ der angegebenen Art zuzuschreiben, verstehe ich nicht. Ist die Figur für die Kenntnisse TARTAGLIAS maßgebend, so hat er übrigens einen noch schlimmeren Fehler begangen, denn nach der Figur gibt es ein gleichschenkliges Dreieck mit den Seiten 6, 6, 20, in der also die Summe zweier Seiten kaum mehr als die Hälfte der dritten beträgt. Ferner muß TARTAGLIA vom Gesichtspunkte des Herrn CANTOR aus geglaubt haben, daß 100 kleiner als 36 sei!

Die nur auf die Figur gestützte Kritik des Herrn CANTOR ist um so auffälliger, weil man aus den Zahlen der Figur sofort sieht, daß sie nicht von einem Sachkundigen hinzugefügt worden sind; die Diagonale, deren zwei Hälften mit den Zahlen 5 und 5 bezeichnet sind, ist nämlich mehr als doppelt so lang wie die Diagonale mit der Zahl 20!

G. ENESTRÖM.

2:527, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 387. — 2:529, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 91. — 2:530, siehe BM 2₃, 1901, S. 354—355; 3₃, 1902, S. 141. — 2:531, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 212. — 2:532, siehe BM 1₃, 1900, S. 509; 7₃, 1906/7, S. 292; 8₃, 1907/8, S. 84; 9₃, 1908/9, S. 163—164. — 2:535, siehe BM 1₃, 1900, S. 509.

— 2:536, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 212—213. — 2:537, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 387. — 2:539, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 293; 9₃, 1908/9, S. 252. — 2:541, siehe BM 1₃, 1900, S. 509. — 2:547, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 84. — 2:548, siehe BM 1₃, 1900, S. 510; 9₃, 1908, S. 76. — 2:549, siehe BM 1₃, 1900, S. 510; 6₃, 1905, S. 401. — 2:550, siehe BM 2₃, 1901, S. 355; 9₃, 1908, S. 76. — 2:554, siehe BM 1₃, 1900, S. 510. — 2:555, siehe BM 4₃, 1903, S. 285; 6₃, 1905, S. 322. — 2:558, siehe BM 9₃, 1908, S. 76. — 2:561, siehe BM 7₃, 1906, S. 91. — 2:565, siehe BM 4₃, 1903, S. 285. — 2:566, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 85. — 2:567, 568, siehe BM 4₃, 1903, S. 286. — 2:569, siehe BM 1₃, 1900, S. 510. — 2:572—573, siehe BM 1₃, 1900, S. 510; 3₃, 1902, S. 141. — 2:576, siehe BM 2₃, 1901, S. 355—356. — 2:579, siehe BM 2₃, 1901, S. 145. — 2:580—581, siehe BM 4₃, 1903, S. 207; 8₃, 1907/8, S. 85—86; 9₃, 1908/9, S. 326—327. — 2:582, siehe BM 1₃, 1900, S. 510. — 2:583, siehe BM 1₃, 1900, S. 270; 2₃, 1901, S. 356. — 2:585, siehe BM 5₃, 1904, S. 69—70. — 2:592, siehe BM 2₃, 1901, S. 146. — 2:593, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 387. — 2:594, siehe BM 1₃, 1900, S. 270. — 2:597, siehe BM 1₃, 1900, S. 270; 2₃, 1901, S. 146. — 2:599—600, siehe BM 2₃, 1901, S. 146. — 2:602, siehe BM 1₃, 1900, S. 270. — 2:603—604, siehe BM 1₃, 1900, S. 270—271; 6₃, 1905, S. 108; 8₃, 1907/8, S. 211. — 2:605, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 86. — 2:610, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 388. — 2:611, siehe BM 2₃, 1901, S. 356—357. — 2:612, siehe BM 1₃, 1900, S. 277; 2₃, 1901, S. 146; 8₃, 1907/8, S. 212. — 2:612—613, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 91—92. — 2:613, siehe BM 2₃, 1901, S. 357; 5₃, 1904, S. 306; 7₃, 1906/7, S. 294, 388—389. — 2:614, siehe BM 3₃, 1902, S. 141. — 2:617, 619, siehe BM 6₃, 1905, S. 108—109. — 2:620, siehe BM 3₃, 1902, S. 141. — 2:621, siehe BM 1₃, 1900, S. 277; 2₃, 1901, S. 146; 6₃, 1905, S. 402; 7₃, 1906/7, S. 214, 389; 8₃, 1907/8, S. 86—87; 9₃, 1908, S. 77. — 2:622, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 87. — 2:623, siehe BM 1₃, 1900, S. 277; 2₃, 1901, S. 146—147. — 2:624, 625, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 87—88. — 2:626, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 389—390. — 2:632, siehe BM 6₃, 1905, S. 109. — 2:634, 637, siehe BM 6₃, 1905, S. 315—316. — 2:638, siehe BM 2₃, 1901, S. 147. — 2:639, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 77. — 2:641, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 253. — 2:642, siehe BM 1₃, 1900, S. 271. — 2:643, siehe BM 1₃, 1900, S. 271; 7₃, 1906/7, S. 391. — 2:644, siehe BM 6₃, 1905, S. 402—403. — 2:655, siehe BM 2₃, 1901, S. 357. — 2:656, siehe BM 4₃, 1903, S. 286. — 2:659, 660, siehe BM 2₃, 1901, S. 147—148. — 2:661, siehe BM 6₃, 1905, S. 403. — 2:665, siehe BM 1₃, 1900, S. 271. — 2:666, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 88—89; 9₃, 1908/9, S. 164—165. — 2:667, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 89. — 2:669, siehe BM 5₃, 1904, S. 203. — 2:670, siehe BM 6₃, 1905, S. 403; 7₃, 1906/7, S. 391. — 2:674, siehe BM 4₃, 1903, S. 88. — 2:683, siehe BM 2₃, 1901, S. 148; 9₃, 1908/9, S. 328. — 2:687, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 294. — 2:689, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 391; 8₃, 1907/8, S. 89; 9₃, 1908/9, S. 253. — 2:693, siehe BM 4₃, 1903, S. 287; 7₃, 1906/7, S. 394—395. — 2:699, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 165—166. — 2:700, 701, siehe BM 1₃, 1900, S. 271. — 2:703, siehe BM 1₃, 1900, S. 271—272; 8₃, 1907/8, S. 212. — 2:704, 705, siehe BM 1₃, 1900, S. 272—273. — 2:712, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 212—213. — 2:713, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 254. — 2:714, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 89—90. — 2:715, siehe BM 5₃, 1904, S. 412. — 2:716, siehe BM 6₃, 1905, S. 404. — 2:717, 718, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 92—93. — 2:719, siehe BM 2₃, 1901, S. 357. — 2:720, siehe BM 4₃, 1903, S. 287; 6₃, 1905, S. 404. — 2:721, siehe BM 1₃, 1900, S. 273; 6₃, 1905, S. 404—405. — 2:726, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 90. — 2:727, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 392. — 2:741, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 395—396. — 2:742, siehe BM 1₃, 1900, S. 273; 3₃, 1902, S. 142. — 2:746, siehe BM 1₃, 1900, S. 273. — 2:747, siehe BM 1₃, 1900, S. 173; 2₃, 1901, S. 225. — 2:749, siehe BM 4₃, 1903, S. 88. — 2:753—754, 758, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 254—255. — 2:763, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 166. — 2:765, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 90—91. — 2:766, siehe BM 3₃, 1902, S. 142; 5₃, 1904, S. 412—413. — 2:767, siehe BM 2₃, 1901, S. 148, 357—358. — 2:770, siehe BM 4₃, 1903, S. 208. — 2:772, siehe BM 2₃, 1901, S. 358; 7₃, 1906/7, S. 392—393. — 2:773, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 213; 9₃, 1908/9, S. 167. — 2:775, siehe BM 2₃, 1901, S. 358—359. — 2:777, siehe BM 2₃, 1901, S. 148; 3₃, 1902, S. 204. — 2:780, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 78, 167. — 2:783, siehe BM 2₃, 1901, S. 359; 4₃, 1903, S. 88—89. — 2:784, siehe BM 2₃, 1901, S. 148. — 2:787, siehe BM 6₃, 1905, S. 405; 7₃, 1906/7, S. 296. — 2:790, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 393; 9₃, 1908/9, S. 255;

10_s, 1909/10, S. 62—63. — **2:791**, siehe **BM 6_s**, 1905, S. 405. — **2:793—794**, siehe **BM 5_s**, 1904, S. 307; **6_s**, 1905, S. 316—317, 405—406. — **2:795**, siehe **BM 6_s**, 1905, S. 317. — **2:797—798**, siehe **BM 5_s**, 1904, S. 307; **6_s**, 1905, S. 317; **10_s**, 1909/10, S. 63—64. — **2:799**, siehe **BM 5_s**, 1904, S. 307. — **2:802**, siehe **BM 4_s**, 1903, S. 208. — **2:812**, siehe **BM 4_s**, 1903, S. 37. — **2:815**, siehe **BM 10_s**, 1909/10, S. 64.

2:817. Herr CANTOR behauptet (Z. 29), daß man bei DESCARTES vergebens die Gleichung der geraden Linie sucht, aber in Wirklichkeit tritt diese Gleichung bei DESCARTES als Spezialfall der Gleichung eines Kegelschnittes auf. Nachdem DESCARTES diese Gleichung auf die Form

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}$$

gebracht hat, bemerkt er in betreff der Terme unter dem Wurzelzeichen: „s'ils étoient nuls, ce point *C* se trouveroit en la ligne droite *IL*“ (*La géométrie*, Paris 1886, S. 23 Z. 2—3 v. u.), woraus ja unmittelbar folgt, daß die Gleichung der geraden Linie *IL* $y = m - \frac{n}{z}x$ ist. Ebenso bemerkt er, daß, wenn $pm = \frac{o^2}{4}$

ist, so daß $\sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}$ auf die Form $m + \frac{ox}{2m}$ gebracht werden kann, der Punkt *C* auf einer geraden Linie liegt, und die Gleichung wird ja in diesem Falle $y = m - \frac{n}{z}x + m + \frac{ox}{2m}$, die also die Gleichung einer geraden

Linie ist. Freilich sagt DESCARTES meines Wissens nicht ausdrücklich, daß jede Gleichung ersten Grades eine gerade Linie darstellt; die erste gedruckte Schrift, in der dieser Satz vorkommt, dürfte die SCHOOTENSche Ausgabe der Geometrie des DESCARTES sein (siehe die Auflage 1649, S. 142). Der Satz ist daselbst von F. DEBEAUNE ausgesprochen, und die „Notae breves“, worin er vorkommt, waren schon 1639 im Besitze des DESCARTES. G. ENESTRÖM.

2:820, siehe **BM 2_s**, 1901, S. 148; **5_s**, 1904, S. 307. — **2:825**, siehe **BM 2_s**, 1901, S. 148. — **2:827, 830**, siehe **BM 9_s**, 1908/9, S. 256—257. — **2:832**, siehe **BM 5_s**, 1904, S. 203—204; **6_s**, 1905, S. 211. — **2:840**, siehe **BM 2_s**, 1901, S. 148—149. — **2:843**, siehe **BM 3_s**, 1902, S. 328. — **2:850**, siehe **BM 6_s**, 1905, S. 109—110.

2:851. Z. 5 v. u. sollte das Wort „quadratischen“ gestrichen werden (siehe die folgende Bemerkung). Die Angabe der Fußnote 3: „Schon MONTUCLA II, 130—131 hat die Methode gut erfaßt“ (es handelt sich um DESCARTES' Lösung der Normalenaufgabe) ist richtig, aber es ist nicht leicht zu verstehen, warum Herr CANTOR überhaupt die Angabe gebracht hat. DESCARTES' eigene Darstellung seiner Methode ist sehr deutlich, und lange Zeit vor MONTUCLA war die Methode von anderen Mathematikern gut gefaßt worden, z. B. von F. DEBEAUNE und F. VAN SCHOOTEN (siehe *Geometria a RENATO DES CARTES anno 1637 gallice edita ... in linguam latinam versa ... opera ... F. A SCHOOTEN*, Lugduni Batavorum 1649, S. 148—150, 215—223). Immerhin ist es schade, daß Herr CANTOR nicht der Darstellung MONTUCLAS folgte, denn dadurch hätte er eine in meiner folgenden Bemerkung hervorgehobene Ungenauigkeit vermieden. MONTUCLA weiß nämlich sehr wohl, daß die Methode nicht im allgemeinen auf eine quadratische Gleichung führt. G. ENESTRÖM.

2: 852. Diese Seite, an der es sich zum größten Teil um die DESCARTESsche Lösung der Normalenaufgabe handelt, gibt zu verschiedenen Bemerkungen Anlaß. Schon am Ende der Seite 851 beginnen die Ungenauigkeiten der CANTORSchen Darstellung (vgl. die vorangehende Bemerkung), denn das Wort „quadratischen“ setzt voraus, daß der Kreis die Kurve nur in zwei Punkten schneidet, und DESCARTES nimmt auch den allgemeinen Fall in Betracht. Aus demselben Grunde sollte S. 852 Z. 3—4 das Wort „quadratische“ gestrichen werden, Z. 7—8 sollte etwa: „welche aus der Multiplikation eines Polynoms mit $(y - e)^2$, also $y^2 - 2ey + e^2$ “ stehen und überdies erwähnt werden, daß e die Abszisse des Punktes M ist (bei DESCARTES bezeichnet nämlich y die Abszisse der gegebenen Kurve), wenn dieser mit M_1 und M_2 zusammenfällt.

Ganz umgearbeitet sollten ferner die Zeilen 11—18 werden. Will man als Beispiel die Parabel wählen, so sollte bemerkt werden, daß dieses Beispiel nicht bei DESCARTES, sondern im Kommentar SCHOOTENS vorkommt, und weiter sollte das wirkliche Verfahren von DESCARTES an diesem Beispiel erläutert werden; daß dies bei Herrn CANTOR nicht der Fall ist, sieht man ja schon aus dem Umstand, daß der Buchstabe e nicht benutzt wird. Das Verfahren wird also das folgende sein (ich habe dabei x und y vertauscht): aus den zwei Gleichungen $(y - z)^2 + x^2 = r^2$ und $x^2 = ay$ folgt $y^2 - (2z - a)y + z^2 - r^2 = 0$, und da diese Gleichung nur zweiten Grades ist, kann man sie sofort mit der Gleichung $y^2 - 2ey + e^2 = 0$ vergleichen, so daß

$$2e = 2z - a, \quad e^2 = z^2 - r^2,$$

und durch Elimination von e bekommt man $r^2 = az - \frac{a^2}{4}$. Dann kann man etwa wie in der CANTORSchen Darstellung fortfahren. Nebenbei bemerke ich, daß die CANTORSche Herleitung unter allen Umständen unnötigerweise verwickelt ist; der Grund dafür ist, daß Herr CANTOR x durch $\frac{y^2}{a}$ und nicht y^2 durch ax ersetzt.

Endlich sollte ausdrücklich erwähnt werden, wie DESCARTES verfuhr, wenn die Gleichung, die der obigen Gleichung $y^2 - (2z - a)y + z^2 - r^2 = 0$ entspricht, nicht zweiten Grades ist. Ist die Gleichung z. B. dritten Grades, so nimmt DESCARTES statt $y^3 - 2ey + e^2 = 0$ die Gleichung

$$(y^3 - 2ey + e^2)(y + k) = 0$$

und verfährt dann wie oben, wodurch er drei Gleichungen erhält, aus denen er e und k eliminiert.

G. ENESTRÖM.

2: 856, 865, siehe BM **2**, 1901, S. 149. — **2: 876, 878, 879,** siehe BM **1**, 1900, S. 511. — **2: 891,** siehe BM **1**, 1900, S. 273. — **2: 897,** siehe BM **6**, 1905, S. 406. — **2: 898,** siehe BM **4**, 1903, S. 37, 208.

2: 898. Die Bemerkung (Z. 9—12): „Gleichwohl ist durch ihn [d. h. STEFANO DEGLI ANGELI] vermutlich ein Wort in den mathematischen Sprachschatz eingeführt worden, welches gerade in der analytischen Geometrie sich als zukunftsreich bewährt hat“ sollte gestrichen werden. Es ist richtig, daß bei DEGLI ANGELI (*Miscellaneum hyperbolicum, et parabolicum*, Venetiis 1659, S. 179 Z. 8—9) der Ausdruck: „ad partem diametri abscissam ab ordinatim applicata versus verticem“ vorkommt, aber das Wort „abscissa“ ist hier, wie

schon J. TROPFKE hervorgehoben hat (*Geschichte der Elementarmathematik* 2, Leipzig 1903, S. 426), gar kein Fachwort, und meines Wissens ist dasselbe von DEGLI ANGELI nur zweimal benutzt worden (siehe S. 175 Z. 10—11: „aequales erunt factis sub abscissis diametri versus verticem ab ordinatim applicatis“; die Angabe bei TROPFKE, a. a. O. Fußnote 1683: „ebensowenig an anderen Stellen der ganzen Abhandlung“ ist also nicht ganz genau). Sonst wendet DEGLI ANGELI auch die Wörter „intercepta“ (siehe z. B. S. 20 Z. 11, 168 Z. 10—11) oder „terminata“ (siehe z. B. S. 165 Z. 12) in ähnlicher Bedeutung an. Auch bei anderen mit DEGLI ANGELI gleichzeitigen Verfassern kommt das Wort „abscissa“ auf ähnliche Weise vor, z. B. bei J. DE WITT (siehe seine *Elementa curvarum* im 2. Bande der 2. SCHOOTENSCHEN Ausgabe der Geometrie von R. DESCARTES, Amsterdam 1659, S. 224 Z. 21—23: „rectangulum sub diametri portionibus, a centro per contingentem applicatamque abscissis“).

Da Herr CANTOR Z. 20—23 auf Übersetzungen des Satzes I: 20 der APOLLONISCHEN Kegelschnitte hinweist, bemerke ich, daß bei COMMANDINO die Verbalform „abscinduntur“ benutzt wird. Andererseits kommt bei ihm, soviel ich weiß, das Wort „abscissa“ nicht vor, aber wohl „linea interjecta“ (vgl. z. B. Satz I: 34). Dagegen wird in der APOLLONIUS-Übersetzung von ABRAHAM ECHELLENSIS und J. A. BORELLI (*Conicorum lib. V. VI. VII.*, Florentiae 1661) der Ausdruck „abscissa rami“ als Fachterm definiert und benutzt (siehe S. 1, 3), und in der Darstellung wird oft das Wort „rami“ weggelassen (vgl. z. B. S. 9: „rectangulo sub abscissa MC et latere recto CF“), so daß „abscissa“ als wirkliches Fachwort auftritt. Ganz modern ist freilich die Bedeutung des Wortes noch nicht, denn die Abszisse wird nicht auf den betreffenden Punkt bezogen, sondern auf den „ramus“, d. h. die Gerade, die den Punkt mit einem festen Punkt der Achse verbindet.

Ich benutze diese Gelegenheit, um eine frühere Bemerkung (BM 10₃, 1909/10, S. 67—68) zur Geschichte des Wortes „abscissa“ zu ergänzen. Ich habe daselbst die CANTORSCHEN Worte „in den Indivisibilen“ auf die Arbeit CAVALIERIS bezogen, aber vielleicht kann man dieselben auch auf die DECHALESsche Darstellung der CAVALIERISCHEN Lehren beziehen. Indessen braucht man nicht besonders scharfsinnig zu sein, um einzusehen, daß DECHALES höchstwahrscheinlich bei seiner Darstellung eben die Terminologie CAVALIERIS benutzt haben muß, und der aufmerksame Leser muß darum sofort die zwei von mir in der Bemerkung erwähnten Angaben CANTORS unvereinbar finden. Immerhin ist es also möglich, entweder daß Herr CANTOR selbst nicht auf den Gedanken gekommen ist, daß die Benutzung des Wortes „abscissa“ bei DECHALES auf das Vorkommen desselben Wortes vor DEGLI ANGELI hinweist, oder daß es Herrn CANTOR gleichgültig war, ob seine Angaben die aufmerksamen Leser verwirren müßten.

G. ENESTRÖM.

2:901, siehe BM 1₃, 1900, S. 511. — 2:902, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 329—330; 10₃, 1909/10, S. 64. — 2:911, siehe BM 9₃, 1908, S. 78—79. — 2:919, siehe BM 5₃, 1904, S. 204. — 2:VIII (Vorwort), siehe BM 3₃, 1902, S. 142. — 2:IX, X (Vorwort), siehe BM 1₃, 1900, S. 511—512.

3:4, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 65—67. — 3:9, siehe BM 2₃, 1901, S. 359. — 3:10, siehe BM 1₃, 1900, S. 518; 6₃, 1905, S. 211; 7₃, 1906/7, S. 393—394. — 3:11, siehe BM 4₃, 1903, S. 209. — 3:12, siehe BM 1₃, 1900, S. 512. — 3:14—15, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 296—297. — 3:17, siehe BM 1₃, 1900, S. 512. —

3:18, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 168. — **3:19**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 67–68. — **3:22**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 512; **4**₃, 1903, S. 209. — **3:23**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 297–298; **8**₃, 1907/8, S. 91. — **3:24**, siehe BM **4**₃, 1903, S. 209. — **3:25**, siehe BM **4**₃, 1903, S. 209, 399; **9**₃, 1908/9, S. 168. — **3:26**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 359; **7**₃, 1906/7, S. 394. — **3:29**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 331. — **3:37**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 91–92. — **3:39**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 407. — **3:40**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 394. — **3:45–48, 49, 50**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 512–513. — **3:57**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 298–299.

3:62. Z. 21–22 sollte meines Erachtens die Bemerkung „Seine [d. h. WALLIS'] Ausdrucksweise ist nicht leicht verständlich“ gestrichen werden, weil man dadurch verleitet werden kann, anzunehmen, daß bei WALLIS die Ausdrucksweise nicht recht deutlich sei (vgl. A. PRINGSHEIM, *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* **2:3:1**, Leipzig 1909, S. 32, Fußnote 113).

Auch was Herr CANTOR Z. 22–28 angibt, sollte meiner Ansicht nach entweder gestrichen oder modifiziert werden. Allerdings führt das von WALLIS benutzte Verfahren zu einem Ergebnis, das ein moderner Mathematiker auf folgende Weise herleiten würde (a ist > 1):

$$\log a = \log \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right)} = -\log \left(1 - \left[1 - \frac{1}{a}\right]\right) = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^3 + \dots$$

Aber WALLIS gelangt zu diesem Ergebnis auf einem ganz anderen Wege; in unsere mathematische Sprache kann sein Verfahren auf folgende Weise übersetzt werden (vgl. die Andeutung bei ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig 1903, S. 314–315). Sei $a > 1$, so weiß man, daß

$$\log a = \int_1^a \frac{dx}{x}.$$

Führt man nun eine neue Veränderliche y ein, die der Gleichung $1 - y = \frac{x}{a}$ genügt, so wird

$$\log a = - \int_{1 - \frac{1}{a}}^0 \frac{dy}{1 - y} = \int_0^{1 - \frac{1}{a}} \frac{dy}{1 - y},$$

und wenn man das rechte Glied in eine unendliche Reihe entwickelt, so kann jedes Glied dieser Reihe integriert werden, so daß

$$\log a = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^3 + \dots,$$

und die jetzt erhaltene Reihe ist offenbar konvergent. Setzt man hier $1 - \frac{1}{a} = A$, so wird $a = \frac{1}{1 - A}$, und da der Wert der Reihe tatsächlich $-\log(1 - A)$ ist, so gelangt man zu der Identität $\log \frac{1}{1 - A} = -\log(1 - A)$. Aber, soviel ich weiß, hat WALLIS selbst nicht diese Identität ausdrücklich angegeben.

G. ENESTRÖM.

3:63, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 93–94. — **3:68**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 299; **9**₃, 1908/9, S. 257–258. — **3:69**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 69. — **3:70**, siehe

BM 2₃, 1901, S. 360; 9₃, 1908/9, S. 258. — 3:78, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 92. — 3:79, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 69—71. — 3:82, siehe BM 5₃, 1904, S. 308. — 3:97, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 894. — 3:100, siehe BM 2₃, 1901, S. 149; 7₃, 1906/7, S. 299—300. — 3:102, siehe BM 6₃, 1905, S. 318; 7₃, 1906/7, S. 300; 9₃, 1908/9, S. 169. — 3:104, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 331. — 3:112, siehe BM 4₃, 1903, S. 209—210; 6₃, 1905, S. 318. — 3:113, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 258—259. — 3:116, siehe BM 1₃, 1900, S. 513. — 3:117, siehe BM 1₃, 1900, S. 518; 9₃, 1908/9, S. 259—260. — 3:118, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 92—93. — 3:122, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 301. — 3:123, siehe BM 1₃, 1900, S. 513; 4₃, 1903, S. 399; 7₃, 1906/7, S. 301—302. — 3:124, siehe BM 3₃, 1902, S. 407—408; 4₃, 1903, S. 400. — 3:126, siehe BM 4₃, 1903, S. 288. — 3:129—130, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 93. — 3:131, siehe BM 4₃, 1903, S. 210. — 3:151, siehe BM 3₃, 1902, S. 326. — 3:166, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 332. — 3:167, 172—173, siehe BM 4₃, 1903, S. 400. — 3:174, siehe BM 2₃, 1901, S. 149—150. — 3:174, 181, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 71—73. — 3:183, siehe BM 1₃, 1900, S. 432. — 3:188, siehe BM 3₃, 1902, S. 241. — 3:195, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 311, 332—333; 10₃, 1909/10, S. 73. — 3:196, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 333. — 3:201, siehe BM 1₃, 1900, S. 513. — 3:207, siehe BM 1₃, 1900, S. 519. — 3:215, siehe BM 2₃, 1901, S. 150; 9₃, 1908/9, S. 260—262. — 3:218, siehe BM 1₃, 1900, S. 513. — 3:220, siehe BM 3₃, 1902, S. 326. — 3:221, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 333. — 3:224, siehe BM 1₃, 1900, S. 514. — 3:225, siehe BM 2₃, 1901, S. 150. — 3:228, siehe BM 2₃, 1901, S. 150; 9₃, 1908/9, S. 333—334. — 3:230, siehe BM 6₃, 1905, S. 211—212. — 3:232, siehe BM 1₃, 1900, S. 514; 6₃, 1905, S. 212; 7₃, 1906/7, S. 303; 8₃, 1907/8, S. 94; 9₃, 1908/9, S. 334—335. — 3:244—245, siehe BM 5₃, 1904, S. 205, 413; 7₃, 1906/7, S. 303—304. — 3:246, siehe BM 1₃, 1900, S. 514; 2₃, 1901, S. 151. — 3:250, siehe BM 1₃, 1900, S. 514. — 3:253, 254, 258, 260, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 73—76. — 3:270, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 395. — 3:276, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 304. — 3:279, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 335—336. — 3:286, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 76. — 3:303, siehe BM 2₃, 1901, S. 155. — 3:306, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 304. — 3:327, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 77. — 3:330—331, siehe BM 3₃, 1902, S. 241—242. — 3:337, siehe BM 5₃, 1904, S. 206. — 3:350, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 336. — 3:364, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 304—305. — 3:365, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 94. — 3:367, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 215. — 3:370—371, siehe BM 5₃, 1904, S. 308. — 3:382, siehe BM 6₃, 1905, S. 213. — 3:384, siehe BM 6₃, 1905, S. 319. — 3:397, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 94. — 3:398, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 305—306; 8₃, 1907/8, S. 94—95. — 3:399, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 77—78. — 3:406, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 262. — 3:408, siehe BM 6₃, 1905, S. 213. — 3:412, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 306. — 3:427, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 169. — 3:447, 455, siehe BM 2₃, 1901, S. 151. — 3:461, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 337. — 3:473, siehe BM 2₃, 1901, S. 154—155; 4₃, 1903, S. 401. — 3:475, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 79—80. — 3:476, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 169—170, 476. — 3:477, 479, siehe BM 2₃, 1901, S. 151—152. — 3:480, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 95. — 3:481, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 79.

3:482. Statt der Worte (Z. 2—6): „Schon hier kann . . . zweitens sind hier wahre Polarkoordinaten vorhanden“ sollte meines Erachtens etwa: „Nebenbei sei bemerkt, daß die Gleichung $y^2 = lx$ durch eine äußerst einfache Modifikation auf eine Gleichung in Polarkoordinaten gebracht werden kann“ gesetzt werden. Daß bei LEIBNIZ gar nicht von krummlinigen Koordinaten gesprochen wird, habe ich in der BM 10₃, 1909/10, S. 43—47 nachgewiesen, und der von Herrn CANTOR benutzte Ausdruck „wahre Polarkoordinaten“ ist meiner Ansicht nach nicht gut gewählt. Natürlich wußte JAKOB BERNOULLI, daß alle Ordinaten durch den Mittelpunkt des Abszissenkreises gehen mußten, aber der Gedanke, diesen Mittelpunkt als Pol zu betrachten, war ihm durchaus fremd, und ebensowenig dachte er daran, die Kreisabszissen mit den entsprechenden Polwinkeln in Beziehung zu setzen.

G. ENESTRÖM.

3:496, siehe BM **9**, 1908/9, S. 337–338. — **3:497, 498**, siehe BM **5**, 1904, S. 309. — **3:507**, siehe BM **5**, 1904, S. 71–72. — **3:507–509, 509**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 338–339. — **3:521**, siehe BM **2**, 1901, S. 441. — **3:527**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 95. — **3:535**, siehe BM **4**, 1903, S. 401. — **3:536**, siehe BM **5**, 1904, S. 206. — **3:560**, siehe BM **6**, 1905, S. 319–321. — **3:565**, siehe BM **3**, 1902, S. 326–327. — **3:571**, siehe BM **3**, 1902, S. 327; **5**, 1904, S. 72; **9**, 1908/9, S. 170. — **3:575**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 263. — **3:578**, siehe BM **3**, 1902, S. 327; **5**, 1904, S. 309. — **3:582**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 307. — **3:583**, siehe BM **10**, 1909/10, S. 80. — **3:586**, siehe BM **5**, 1904, S. 309. — **3:593**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 214. — **3:609**, siehe BM **5**, 1904, S. 309–310. — **3:612**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 307–308; **9**, 1908/9, S. 339–340. — **3:614–615**, siehe BM **4**, 1903, S. 89–90; **7**, 1906/7, S. 308. — **3:616**, siehe BM **6**, 1905, S. 214, 408; **9**, 1908/9, S. 263. — **3:617**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 263; **10**, 1909/10, S. 80–81. — **3:636–637**, siehe BM **2**, 1901, S. 441. — **3:646–647**, siehe BM **5**, 1904, S. 206–207. — **3:652**, siehe BM **2**, 1901, S. 446; **5**, 1904, S. 207. — **3:660**, siehe BM **2**, 1901, S. 441.

3:666. In betreff der GOLDBACHschen Reihe sollte jedenfalls auf die Abhandlung EULERS *Methodus generalis summandi progressionis* (Comment. acad. sc. Petrop. **6** [1732/3], 1738, S. 68–97) verwiesen werden, wo EULER S. 97 die Reihe erwähnt. Diese Abhandlung wurde nach den Protokollen der Petersburger Akademie schon am 20. Juni 1732 vorgelegt. Übrigens ist es kaum richtig, die Summation der GOLDBACHschen Reihe erst im Kapitel mit der Überschrift „Reihen seit 1737“ zu erwähnen, denn seit 1843 weiß man, daß GOLDBACH schon 1729 genau auf die von Herrn CANTOR S. 666–667 angegebene Weise die Reihe summiert hatte (siehe FUSS, *Correspondance mathématique* II, St. Pétersbourg 1843, S. 296, 306).

In der Fußnote steht auf Grund eines Schreibfehlers 1739 statt 1737, und derselbe Schreibfehler ist S. 667 zweimal wiederholt; dagegen steht S. 668 (Fußnote 1) richtig 1737.

G. ENESTRÖM.

3:667, siehe BM **2**, 1901, S. 441–442; **5**, 1904, S. 207–208, 310. — **3:675**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 340–341. — **3:682**, siehe BM **6**, 1905, S. 408. — **3:686**, siehe BM **5**, 1904, S. 208. — **3:688**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 341. — **3:689**, siehe BM **2**, 1901, S. 442; **8**, 1907/8, S. 215. — **3:692**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 215. — **3:693**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 341. — **3:695**, siehe BM **2**, 1901, S. 442. — **3:700**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 171, 342. — **3:702**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 171. — **3:703, 705**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 342–343. — **3:722**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 172. — **3:726–728**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 343–344. — **3:736**, siehe BM **6**, 1905, S. 111. — **3:749**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 172. — **3:750**, siehe BM **2**, 1901, S. 446. — **3:753**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 172–174. — **3:754**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 344–345. — **3:758**, siehe BM **2**, 1901, S. 446; **9**, 1908/9, S. 345–346. — **3:759**, siehe BM **5**, 1904, S. 208. — **3:760**, siehe BM **2**, 1901, S. 447. — **3:762**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 346. — **3:766**, siehe BM **2**, 1901, S. 446. — **3:773**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 174–175, 346–347. — **3:774**, siehe BM **2**, 1901, S. 442–443. — **3:792**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 347. — **3:798**, siehe BM **2**, 1901, S. 443. — **3:813**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 348. — **3:819**, siehe BM **6**, 1905, S. 321. — **3:845**, siehe BM **2**, 1901, S. 447; **3**, 1902, S. 327–328. — **3:848**, siehe BM **2**, 1901, S. 443. — **3:870–871**, siehe BM **10**, 1909/10, S. 81–82. — **3:880**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 95–96. — **3:881**, siehe BM **2**, 1901, S. 443; **9**, 1908/9, S. 264–265; **10**, 1909/10, S. 83. — **3:882**, siehe BM **2**, 1901, S. 447; **5**, 1904, S. 414. — **3:890**, siehe BM **4**, 1903, S. 401; **9**, 1908/9, S. 348–349. — **3:892**, siehe BM **3**, 1902, S. 143; **9**, 1908/9, S. 265. — **3:894**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 349–350. — **3:897**, siehe BM **10**, 1909/10, S. 83. — **3:IV** (Vorwort), siehe BM **2**, 1901, S. 443.

Anfragen.

144. Über den Ursprung eines von Ramus (1569) gelehrten Divisionsverfahrens. In seinem Lehrbuche *Scholarum mathematicarum libri unus et triginta* (Basel 1569, S. 127—128) hat RAMUS bekanntlich (vgl. Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 1, 1877, S. 54; *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* 1:4:2, 1908, S. 211) ein Verfahren angegeben, wodurch man bei einer Division in ganzen Zahlen ohne Probieren die sukzessiven Ziffern des Quotienten bestimmen kann; man schreibt nämlich alle Vielfachen des Divisors bis zum Neunfachen auf und sieht dann immer sofort, welche Ziffer für den Quotienten gewählt werden soll. Dieses Verfahren kommt auch in dem sehr verbreiteten Lehrbuche *Epitome arithmeticae practicae* (siehe die Ausgabe Köln 1584, S. 71—72) des CLAVIUS vor und war also schon in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts allgemein bekannt.

Über den Ursprung des fraglichen Verfahrens habe ich bisher keine genauen Aufschlüsse bekommen können. Daß es schon am Ende des 15. Jahrhunderts benutzt worden ist, scheint aus dem folgenden Passus bei PACIUOLO (*Summa de arithmetica geometria proportioni e proportionalita*, Venedig 1484, BL 33^b) hervorzugehen:

Unde tal consideratione bisogna che da te sia sperimentando per li numeri da .1. fin .9. che piu oltra non bisogna multiplicando li in mente: o in tauola via el partitore.

Immerhin ist eine genauere Untersuchung über den Ursprung des Verfahrens erwünscht.

G. ENESTRÖM.

Rezensionen.

A. Voss. Über das Wesen der Mathematik. Rede gehalten am 11. März 1908 in der öffentlichen Sitzung der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften. Erweitert und mit Anmerkungen versehen. Leipzig, B. G. Teubner 1908. 8°, 98 S. Mark 3.60.

Wenn Herr Voss nur seine Rede veröffentlicht hätte, so würde ich kaum Anlaß gehabt haben, die jetzt vorliegende Schrift in der *Bibliotheca Mathematica* zu besprechen, denn auch in ihrer erweiterten Form enthält die Rede selbst zu wenig Geschichte der Mathematik, um als historische Schrift betrachtet werden zu können. Indessen hat Herr Voss, wie das Titelblatt ausdrücklich angibt, bei der Drucklegung der Rede Anmerkungen hinzugefügt, und einerseits sind diese zum großen Teil historischen Inhalts, andererseits sind sie zusammen viel umfangreicher als die Rede selbst, und aus diesem Grunde kann die Schrift wirklich als mathematisch-historisch betrachtet werden. Selbstverständlich muß eine Rede über das Wesen der Mathematik auch andere Sachen enthalten, aber mit diesen habe ich mich nicht hier zu beschäftigen.

Die historischen Angaben des Herrn Voss können in zwei Gruppen verteilt werden. Die erste Gruppe bezieht sich auf die Geschichte der neueren Mathematik, etwa von GAUSS ab, und für die Angaben dieser Gruppe sind ausschließlich oder fast ausschließlich die Quellen selbst benutzt. Die zweite Gruppe umfaßt die Notizen über die frühere Geschichte der Mathematik; in betreff dieser ist Herr Voss nur selten auf die Quellenschriften zurückgegangen, und in erster Linie hat er seine Angaben aus den CANTORSchen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* entnommen.

Hinsichtlich der Angaben der ersten Gruppe sind die Bemerkungen, die ich notiert habe, von untergeordneter Bedeutung. Meiner Ansicht nach könnten z. B. S. 38 die historischen Notizen über das Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze in Fortfall kommen, da das Prinzip tatsächlich lange Zeit vor 1822 von den Mathematikern stillschweigend benutzt worden ist, und da es meines Erachtens in diesem Falle von geringem Belang ist, zu ermitteln, wer sich zuerst die Mühe gegeben hat, das Prinzip in Worten auszudrücken. Wie Herr Voss selbst richtig hervorhebt, handelt es sich ja nicht um ein Prinzip im gewöhnlichen Sinne, sondern um eine Forderung, die sich allerdings oft erfüllen läßt.

Um so wichtiger sind die Bemerkungen, zu denen die Angaben der zweiten Gruppe Anlaß geben. Es ist natürlich lobenswert, daß Herr Voss sich so viel für die ältere Geschichte der Mathematik interessiert, daß er den Entwicklungsgang gewisser mathematischer Begriffe und Theorien rückwärts

verfolgen will. Allein wenn man nicht in der Lage ist, sich bessere Kenntnisse auf diesem Gebiete zu verschaffen, sollte man meines Erachtens nicht die Resultate seiner Studien veröffentlichen. Noch weniger sollte man (siehe den Selbstbericht des Herrn Voss in dem Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 17, 1908, S. 151—152) die historischen Anmerkungen denjenigen empfehlen, die „in die behandelten Fragen tiefer eindringen wollen“. Wie wenig tief Herr Voss selbst in die ältere Geschichte der Mathematik eingedrungen ist, sieht der Sachkundige am leichtesten, wenn er die Seiten 10—11 liest; aber auch an vielen anderen Stellen gibt es Belege hierfür. Im allgemeinen kann man nicht sagen, daß die historischen Angaben des Herrn Voss ganz unrichtig sind, aber sie enthalten allzu oft unnötigerweise Ungenauigkeiten, die den nicht sachkundigen Leser irre führen müssen und darum zu beanstanden sind. Ich werde hier nur beispielsweise einige dieser Ungenauigkeiten hervorheben.

S. 10 gibt Herr Voss an, daß den Griechen die Einheit nicht als Zahl galt, und daß die ARISTOTELISCHE Ansicht war, daß die Zahl immer den Begriff der Vielheit einschließe. Hier ist der Ausdruck „den Griechen“ sehr irreführend, denn in Wirklichkeit waren bei ihnen verschiedene Ansichten in betreff dieser Frage vertreten, wie Herr Voss leicht aus dem von ihm selbst (S. 34) zitierten Heft 1:I:1 der *Encyclopédie des sciences mathématiques* (S. 4 und 9) hätte erfahren können; bekanntlich wird dieser Gegenstand ausführlich von JAMBlichus (siehe *In NICOMACHI arithmetica introductionem liber*. ed. H. PISTELLI, Leipzig 1894, S. 10—11) behandelt. Auch die Bemerkung in betreff der Ansicht des ARISTOTELES ist nicht ganz richtig (vgl. die soeben erwähnte Stelle S. 9 des Heftes 1:I:1 der *Encyclopédie des sciences mathématiques*).

S. 11 behauptet Herr Voss, daß die Zeichen + und — „plötzlich bei J. WIDMANN etwa 1480, dann bei M. STIFEL 1544 erscheinen“. In betreff dieser Angabe ist erst zu bemerken, daß das Wort „plötzlich“ durchaus unzutreffend ist, wenn es sich um das Pluszeichen handelt, und zwar aus folgenden Gründen. In Handschriften aus dem Mittelalter finden sich für das Wort „et“ Ligaturen, von denen eine sich nicht besonders weit von unserem Pluszeichen unterscheidet, und da „et“ das lateinische Additionswort des Mittelalters war (z. B. octo et tres = $8 + 3$), so ist es natürlich, daß auch die Addition durch dieselbe Ligatur bezeichnet wurde, ohne daß man daran dachte, die Ligatur als ein mathematisches Zeichen zu betrachten. Ebenso leicht ist zu verstehen, daß die Mathematiker, denen die lateinische Sprache geläufig war, geneigt sein würden, die Ligatur des Wortes „et“ auch für das entsprechende deutsche Wort „und“ zu benutzen, wenn sie deutsch schrieben. Es ist also schon a priori wahrscheinlich, daß das Pluszeichen nicht „plötzlich“ in die mathematische Literatur eingedrungen ist, und in Wirklichkeit ist die Wahrscheinlichkeit nunmehr fast zur Gewißheit geworden, denn:

- a) man weiß, daß WIDMANN im Besitze einer handschriftlichen lateinischen Algebra war, worin + als Ligatur für „et“ benutzt wird, sowohl wenn „et“ Additionswort ist, als auch sonst;
- b) eben dieselbe allgemeine Benutzung des Zeichens + für „und“ kommt in dem 1489 erschienenen deutschen Rechenbuch WIDMANNs vor, so daß bei ihm + noch nicht ein rein mathematisches Zeichen war.

Von einem „plötzlichen“ Auftreten des Pluszeichens bei WIDMANN kann also nicht die Rede sein.

Auch das Auftreten des Minuszeichens bei WIDMANN kann kaum „plötzlich“ genannt werden. Man weiß nämlich:

- A) daß WIDMANN höchstwahrscheinlich im Jahre 1481 eine ältere Algebra in deutscher Sprache abgeschrieben hat, in der das Subtraktionswort „minner“ ist, statt dessen aber in den bisher veröffentlichten Auszügen ausnahmsweise an einer einzigen Stelle das Zeichen — steht;
- B) daß WIDMANN auch in seinem gedruckten deutschen Rechenbuch das Zeichen — zuweilen, aber nicht regelmäßig, anwendet;
- C) daß dagegen das Minuszeichen ziemlich regelmäßig in der oben erwähnten lateinischen Algebra vorkommt.

Aber auch wenn man in der Angabe des Herrn Voss das Wort „plötzlich“ streicht, so kann diese dennoch kaum als befriedigend betrachtet werden. Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, waren + und — bei WIDMANN noch nicht regelmäßig als reine mathematische Zeichen benutzt; andererseits kommt diese Benutzung schon vor STIFEL bei GRAMMATEUS, RIESE und RUDOLFF vor, so daß das Wort „dann“ des Herrn Voss irreleitend ist.

S. 36 bemerkt Herr Voss in betreff der Quadratwurzel aus einer negativen Zahl: „Ihr Auftreten bei CARDANUS, 1545, in dem *Artis magnae seu de regulis algebraicis liber*, geriet bald wieder in Vergessenheit“ und erwähnt unmittelbar nachher A. GIRARD. Hier ist der Ausdruck: „geriet bald wieder in Vergessenheit“ höchst unzutreffend. Erstens erwähnt CARDANO nur im Vorübergehen die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl, und er fügt hinzu, daß die fragliche Größe „vere est sophistica“, und daß es sich um eine Sache handelt, die „adeo est subtile, ut sit inutile“. CARDANO hat also selbst seine gelegentliche Bemerkung als fast wertlos gekennzeichnet. Zweitens ist es unrichtig, daß die Frage der negativen Quadratwurzeln in Vergessenheit geriet, denn noch vor CARDANOS Tod erschien eine Arbeit, worin diese Frage ausführlich behandelt wurde, nämlich *L'algebra* (1572) des BOMBELLI. Es ist sehr auffällig, daß Herr Voss diesen Umstand, der für die Geschichte der imaginären Größen viel wichtiger ist, als die gelegentliche Bemerkung CARDANOS, stillschweigend übergeht, obgleich er sehr leicht aus der von ihm vielfach zitierten Arbeit von TROPFKE Auskunft hierüber hätte bekommen können.

Offenbare Schreibfehler sind in den historischen Anmerkungen nicht besonders selten; ein recht auffälliger Fehler dieser Art befindet sich S. 7 am Anfang der Fußnote 1), in der Herr Voss „Bd. II, III 2. Aufl., 1892, 1898“ der CANTORSchen *Vorlesungen* erwähnt; bekanntlich erschien die erste Auflage dieser Bände 1892 und 1898, während die zweite Auflage 1900 und 1901 herausgegeben wurde. Ich nenne diesen Schreibfehler auffällig, weil Herr Voss tatsächlich nach der ersten Auflage zitiert, so daß der Leser, der nur auf die Angabe „2. Aufl.“ Bezug nimmt, die Stellen, auf die Herr Voss verweist, nicht wiederfindet. Auch von einem anderen Gesichtspunkte aus ist die Berufung auf die erste Auflage der CANTORSchen *Vorlesungen* ein wenig auffällig, denn zuweilen beziehen sich die Verweise auf Stellen, die CANTOR selbst in der 2. Auflage berichtigt hat, und noch auffälliger ist die Berufung auf die 1892 erschienene 1. Auflage des 2. Bandes der *Vorlesungen* als Beleg für

die Behauptung (S. 11), daß eine gewisse Frage „immer noch (also noch 1908!) nicht völlig aufgeklärt ist“.

Bevor ich diese kurze Besprechung der historischen Anmerkungen der Schrift des Herrn Voss schließe, will ich ausdrücklich hervorheben, daß man Ausstellungen wie die, welche ich hier oben gemacht habe, auch gegen kürzlich erschienene Schriften anderer hervorragender Mathematiker unserer Zeit richten kann (vgl. *Biblioth. Mathem.* 10₃, 1909/10, S. 9). Aber diese Schriften enthalten eine so geringe Zahl historischer Bemerkungen, daß ich keinen Anlaß habe, sie in der *Bibliotheca Mathematica* zu besprechen.

Stockholm.

G. ENESTROM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

- | | | | |
|-----------------------------|----------------------|------------------------|-------------------|
| Ahrens, 29, 128. | Fields, 122. | Kriemelke, 84. | Stamper, 17. |
| Alasia, 98. | Forbes, 27. | Lampe, 4, 105. | Stein, 59. |
| Amodeo, 56, 57, 123. | Freund, 10. | Lebon, 102. | Stodola, 106. |
| André, 124. | Fueter, 113. | Loria, 18, 121. | Sudhoff, 1, 36. |
| Aubry, 86. | Galliei, 63. | Mansion, 35. | Suter, 49. |
| Auerbach, 5. | Gauss, 87. | Manville, 100. | Tannery, J., 92. |
| Bacon, E., 52. | Gerland, 26. | Maroger, 12. | Tannery, M., 101. |
| Ball, 10, 11. | Goerges, 23. | Milhaud, 40. | Tchakiwskij, 14. |
| Becker, 114. | Gravelaar, 61. | Mortet, 44. | Teixeira, 19. |
| Bjelankin, 130. | Gray, 73. | Moser, 115. | Thirion, 28. |
| Björnbo, 50. | Guimarães, 81. | Müller, Ad., 64. | Tyler, 122. |
| Bopp, 58. | Günther, L., 66. | Müller, Carl H., 97. | Vacca, 62. |
| Bosmans, 70. | Günther, S., 81. | Müller, Felix, 13, 94. | Viaene, 16. |
| Buchka, 1. | Haas, 24, 25. | Naber, 37. | Vivanti, 98, 99. |
| Cajori, 68, 69. | Hartmann, 47. | Nikomachos, 46. | Vogl, 39. |
| Cantor, 8, 9. | Hayashi, 78, 79, 90. | Pasch, 111. | Vogt, 38. |
| Castellnuovo, 2. | Heiberg, 41, 45. | Pellicani, 57. | Voss, 30. |
| Dannemann, 20. | Hill, 112. | Pfeiffer, 130. | Wade, 125. |
| Dintzi, 131. | Hoppe, 32. | Rose, 128. | Wangerin, 91. |
| Duhem, 22, 51, 54, 55, 60. | Huygens, 71. | Rudio, 126, 127. | Weiss, 112. |
| Eckart, 85. | Jahnke, 95. | Schlesinger, 96. | Wiedemann, 48. |
| Elliot, 112. | Jeremias, 33. | Simon, 34, 46, 88. | Wohlwill, 67. |
| Eneström, 3, 6, 75, 76, 77. | Joachimescu, 108. | Smith, B., 74. | Zaremba, 89. |
| Favaro, 63, 65. | Jouguet, 21. | Smith, D. E., 42, 53. | Zeuthen, 7, 43. |
| Fehr, 82. | Karpinski, 15. | Stäckel, 83. | |
| Felber, 80. | Korteweg, 72. | Stadler, 1. | |

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, herausgegeben von K. von BUCHKA, H. STADLER, K. SUDHOFF. Leipzig. 8°. [1

1 (1909): 1—6. — [Rezension:] *Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient.* 17, 1910, 287—292, 295—298. (H. BOSMANS.) — *Mittell. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss.* 9, 1909/10, 14—19. (GÜNTHER.)

Atti del IV° congresso internazionale dei matematici. Pubblicati per cura di G. CASTELNUOVO. I (1909). [Rezension:] *Bullet. d. sc. mathém.* 33, 1909, 181—182. (J. T.) [2

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. ENESTRÖM. Leipzig (Stockholm). 8°. [3
10, (1909/10): 1. — [Rezension des Bandes 9:] *Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient.* 16, 1909, 649—651. (H. BOSMANS.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von F. LAMPE. Berlin. 8°. [4
38 (1907): 2

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Herausgegeben von FELIX AUERBACH (1909). — [Rezension:] *Arch. der Mathem.* 15, 1909, 210—211. (E. JAHNKE.) — *Bullet. d. sc. mathém.* 33, 1909, 225—226. (J. G.) [6

Eneström, G., Zur Frage der verschiedenen Arten mathematischer Geschichtsschreibung. [6
Biblioth. Mathem. 10, 1909/10, 1—14.

Zeuthen, H. G., Quelques traits de la propagation de la science de génération en génération (1909). [Rezension:] *Mittell. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss.* 8, 1909, 487. (GÜNTHER.) [7

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1^o (1907). [Kleine Bemerkungen:] *Biblioth. Mathem.* 10, 1909/10, 53—55. (G. ENESTRÖM.) — 2^o (1900). [Kleine Bemerkungen:] *Biblioth. Mathem.* 10, 1909/10, 56—64. (G. ENESTRÖM.) — 3^o (1901). [Kleine Bemerkungen:] *Biblioth. Mathem.* 10, 1909/10, 65—83. (G. ENESTRÖM.) [8

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, herausgegeben von M. CANTOR. Vierter Band. Von 1759 bis 1799 (1908). [Rezension:] *Arch. der Mathem.* 15, 1910, 350. (J. TROPFKE.) [9

Ball, W. W. R., *Histoire des mathématiques.* Edition française, traduite par L. FREUND. II (1907).

- [Rezension:] *Mathesis* 10, 1910, 19. (P. M.) — *Revue génér. d. sc.* 19, 1908, 714. [10]
- Ball, W. W. R., A short account of the history of mathematics. Ed. 4 (1908). [Rezension:] *Biblioth. Mathem.* 10, 1909/10, 85—88. (G. ENESTRÖM) [11]
- Maroger, A., Leçons critiques et historiques sur les fondements des mathématiques (1908). [Rezension:] *Porto, Acad. polyt., Annaes* 4, 1909, 241. (G. T.) [12]
- Müller, Felix, Führer durch die mathematische Literatur (1908). [Rezension:] *Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient.* 17, 1910, 292—295. (H. BOSMANS.) — *Bullet d. sc. mathém.* 33, 1909, 261—262. (J. T.) [13]
- *Tchalkiwskij, M. [Geschichte der Zahlensysteme.] Lemberg 1908 [14]
8°. — Kleinrussisch.
- Karpinski, L. C., The decimal system of numbers. [15]
Popular science monthly 1909, 490—498. — *Historische Notiz.*
- Viaene, E., Essai sur la numération de quelques peuples du Congo belge. [16]
Bulletin de la société belge de géographie 32, 1908. — [Rezension:] *Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient.* 16, 1909, 630—632. (J. MAUS.)
- Stamper, A. W., A history of elementary geometry (1909). [Rezension:] *Science* 30, 1909, 887—888. (F. CAJORI.) [17]
- Loria, G., Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Terza edizione (1907). [Rezension:] *Porto, Acad. polyt., Annaes* 4, 1909, 244—245. (G. T.) — *Mathem. gazette* 4, 1908, 341. — *Mathesis* 10, 1910, 20. [18]
- Teixeira, F. G., Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches. Ouvrage couronné et publié par l'académie royale des sciences de Madrid. Traduit de l'espagnol, revue et très augmenté. Tome II. Coimbra 1909. [19]
4°, (7) + 497 S. — *Obras sobre mathematica do F. G. TEIXEIRA. Volume quinto.* — [Rezension:] *Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient.* 16, 1909, 579—582. (H. BOSMANS.) — *Bullet d. sc. mathém.* 33, 1909, 169. (J. T.) — *Mathesis* 9, 1909, 220—221. (J. N.) — [Rezension des 1. Teiles (1908):] *Mathem. gazette* 4, 1908, 398—399. — *Revue génér. d. sc.* 19, 1908, 915. — *Wiskundig tijdschrift* 5, 1909, 101—104.
- Dannemann, Fr., Aus der Werkstatt großer Forscher (1908). [Rezension:] *Monatsh. für Mathem.* 20, 1909, Lit.-Ber. 59. (Sr. M.) [20]
- Jouguet, E., Lectures de mécanique. La mécanique enseignée par les auteurs originaux. I—II (1908—1909). [Rezension:] *Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient.* 16, 1909, 595—599. (M. O.) — *Arch. der Mathem.* 15, 1909, 202—203. (E. LAMPE) — *Revue génér. d. sc.* 19, 1908, 956. [21]
- Duhem, P., Le mouvement absolu et le mouvement relatif (1909). [Rezension:] *Bullet d. sc. mathém.* 33, 1909, 210—215. (J. T.) [22]
- Goerges, E., Die Zusammensetzung der Kräfte. Halle a. S. 1909. [23]
8°, 32 + (2) S. + 1 Taf. — *Historische Abhandlung.*
- Haas, A. E., Die Entwicklungsgeschichte des Satzes von der Erhaltung der Kraft (1909). [Rezension:] *Deutsche Literaturz.* 30, 1909, 3063—3065. (Fr. STRUNZ.) — *Naturwiss. Rundschau* 25, 1910, 12. (A. BECKER.) [24]
- Haas, A. E., Die Anfänge der mathematischen Physik. [25]
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 402—409.
- Gerland, E., Das Handwerk in der Geschichte der Physik [26]
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 347—353.
- *Forbes, G., History of astronomy. London, Watts 1909. [27]
8°, X + 154 S. — [1 sh.] — [Rezension:] *Nature* 82, 1909, 245—246. (W. E. R.)
- Thirion, J., La comète de Halley. Son histoire et la légende de son excommunication. [28]
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 16, 1909, 670—695.
- Ahrens, W., Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Erster Band. Leipzig, Teubner 1910. [29]
8°, IX + 400 S.
- Voss, A., Über das Wesen der Mathematik. Rede (1908). [Rezension:] *Mathem. gazette* 4, 1908, 396—397. [30]
- Guimarães, R., Les mathématiques en Portugal. Deuxième édition soigneusement revue et très considérablement augmentée. Coimbra 1909. [31]
8°, 655 + (2) S. — [24 fr.]
- b) Geschichte des Altertums.
- Hoppe, E., Das Sexagesimalsystem und die Kreisteilung. [32]
Arch. der Mathem. 15, 1910, 304—313.
- *Jeremias, A., Das Alter der babylonischen Astronomie. Zweite Auflage. Leipzig, Hinrichs 1909. [33]
8°, 92 S. — [1.60 Mk.]
- Simon, M., Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte. Berlin, Cassirer 1909. [34]
8°, XVII + 401 S. — [15 Mk.]
- Mansion, P., Le système des sphères homocentriques comme origine du système des épicycles. [35]
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 376—379.
- Sudhoff, K., Jatro-mathematisches auf Papyrusblättern. [36]
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 469—474.
- Naber, H. A., Das Theorem des Pythagoras (1908). [Rezension:] *Amsterdam, Wisk. genoot., Nieuw archief* 9, 1909, 78—83. (G. MANNOURY.) — *Wiskundig tijdschrift* 5, 1909, 94—96. [37]

Vogt, H., Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Platon und anderen Quellen des vierten Jahrhunderts. Breslau 1909. [38
8°, 7 S.]

Vogl, S., Über die (Pseudo-)Euklidische Schrift „De speculis“. [39
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 419—435.]

Milhaud, G., Le traité de la méthode d'Archimède. [40
Revue scient. 10., 1908, 417—425.]

Heiberg, J. L., A newly discovered treatise of Archimedes. [41
The monist (Chicago) 19, 1909, 202—224.]

Smith, D. E., A commentary on the Heiberg manuscript of Archimedes. [42
The monist (Chicago) 19, 1909, 225—230.]

Zenthen, H. G., Über einige Archimedische Postulate. [43
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 320—327.]

Mortet, V., Recherches critiques sur Vitruve et son oeuvre. [44
Revue archéologique (Paris) 11, 1909.]

Heiberg, J. L., Der sogenannte Heronis liber geponicus. [45
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 410—418.]

Simon, M., Die ersten 6 Kapitel der Institutionis Arithmetica des Nikomachos. [46
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 455—463.]

Hartmann, N., Des Proklus Diadochus philosophische Anfangsgründe der Mathematik nach den ersten zwei Büchern des Euklidkommentars dargestellt. Gießen 1909. [47
8°, (2) + 57 S. — [3 Mk.] — Philosophische Arbeiten, herausgegeben von H. COHEN und P. NATORP.]

c) Geschichte des Mittelalters.

Wiedemann, E., Anschauungen der Muslime über die Gestalt der Erde. [48
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 310—319.]

Suter, H., Die Abhandlung des Abū Kāmil Shōgā' b. Aslam „über das Fünfeck und Zehneck“. [49
Biblioth. Mathem. 10., 1909/10, 15—42.]

Björnbo, A. A., Die mittelalterlichen lateinischen Übersetzungen aus dem Griechischen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. [50
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 385—394.]

Duhem, P., A propos du *Philorexus* de Jordanus de Nemore. [51
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 380—384.]

Duhem, P., Un fragment inédit de l'Opus tertium de Roger Bacon précédé d'une étude sur ce fragment. Quaracchi (près Florence) 1909. [52
8°, 197 S.]

Smith, D. E., An ancient english algorism. [53
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 301—309.]

Duhem, P., Sur la découverte de la loi de la chute des graves. [54
Atti del IV congresso internazionale dei matematici 3, Roma 1909, 432—435.]

Duhem, P., Un précurseur français de Copernic: Nicole Oresme (1377). [55
Revue génér. d. sc. 20, 1909.]

Amodeo, F., Appunti su Biagio Pelicani da Parma. [56
Atti del IV congresso internazionale dei matematici 3, Roma 1909, 549—553.]

Amodeo, F., Riproduzione delle questioni sul trattato „de latitudinibus formarum“ di Nicole Oresme fatto da Biagio Pelicani. [57
Napoli, Istituto tecnico, Annali 25, 1909. (2) + 27 S.]

Bopp, K., Ein Sendschreiben Regiomontans an den Cardinal Bessarion. [58
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 395—401.]

***Stein, J.**, Calixte III et la comète de Halley. Rome 1909. [59
4°, 41 S. — [Rezensien:] *Bruxelles*, Soc. scient., *Revue des quest. scient.* 17., 1910, 299—303. (J. THIRION.)]

Duhem, P., Étude sur Léonard de Vinci; ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu. [60
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 18, : 1, 1909, 286—288.]

d) Geschichte der neueren Zeit.

Gravelaar, N. L. W. A., Cardano's transmutatiemethoden (1909). [Rezensien:] *Bruxelles*, Soc. scient., *Revue des quest. scient.* 16., 1909, 642—648. (H. BOSMANS.) [61]

Vacca, G., Maurolycus, the first discoverer of the principle of mathematical induction. [62
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 16., 1909, 70—73.]

Favaro, A., Una lettera inedita di Galileo Galilei concernente il „Simplicio“ dei „Massimi sistemi“. [63
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 464—468.]

- Müller, Adolf**, Der Galilei-Prozeß (1909). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 31, 1910, 250—253. (E. GERLAND.) [64]
- Favaro, A.**, Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXII. Michele Coignet (1908). [Rezension:] Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 16., 1909, 644—647. (H. BOSMANS.) [65]
- Günther, L.**, Die Mechanik des Weltalls. Eine volkstümliche Darstellung der Lebensarbeit Johannes Keplers (1909). [Rezension:] Arch. der Mathem. 15., 1909, 237—238. (PH. MAENNCHEN.) [66]
- Wohlwill, E.**, Zur Geschichte der Entdeckung der Sonnenflecken [67]
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 443—454.
- *Cajori, F.**, A history of the logarithmic slide rule and allied instruments. London, Constable 1909. [68]
8°, (6) + 144 S. — [4½ sh.]
- Cajori, F.**, Slide rules with „Runners“. [69]
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 370—376. — [Résumé:] Nature 82, 1909, 267—268.
- Bosmans, H.**, La carte lunaire de van Langren conservée à l'université de Leyde. [70]
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 17., 1910, 248—264 + Faksimile.
- Oeuvres complètes de CHR. HUYGENS. Tome 9 (1908). [Rezension:] Revue génér. d. sc. 20, 1909, 139. [71]
- Korteweg, D. J.**, Christian Huygens' wissenschaftliche Lehrjahre. I. [72]
Internationale Wochenschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik 8, 1909, Nr. 44.
- Gray, G. J.**, A bibliography of the works of I. Newton. Ed. 2 (1907). [Rezension:] Arch. der Mathem. 15., 1909, 206—207. (W. AHRENS.) [73]
- Smith, B.**, An annotated copy of Newton's „Principia“. [74]
Nature 79, 1909, 130
- Eneström, G.**, Über das angebliche Vorkommen krummliniger Koordinaten bei Leibniz. [75]
Biblioth. Mathem. 10., 1909/10, 43—47.
- Eneström, G.**, Über die Geschichte der Reihe der reziproken Quadratzahlen im 17. Jahrhundert. [76]
Biblioth. Mathem. 10., 1909/10, 83—84. — Anfrage.
- Eneström, G.**, Über elementare Herleitung von Maximalwerten. [77]
Biblioth. Mathem. 10., 1909/10, 84. — Antwort auf eine Anfrage.
- Hayashi, T.** [Über das Porträt von Takakazu Seki.] [78]
Tōkyō, Sōgaku-Buturigakkwai, Kiji 4., 1908, 264—265 + Porträt. — Japanisch.
- Hayashi, T.**, How have the Japanese used the Dutch books imported from Holland? [79]
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 9., 1909, 42—48.
- Felber, V.** [Leonhard Euler und seine Werke.] [80]
Časopis pro pěstov. mathem. 37, 1908, 177—192, 289—300. — Tschechisch.
- Günther, S.**, Eulers Verdienste um die mathematische und physikalische Geographie. [81]
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 475—490.
- Fehr, H.**, Les portraits d'Euler. [82]
L'enseignement mathém. 12, 1910, 55—56.
- Stäckel, P.**, Variierte Kurven bei Daniel Bernoulli und Leonhard Euler. [83]
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 1, 1909, 293—300.
- Kriemelke, K.**, J. H. Lamberts Philosophie der Mathematik. Berlin, Mayer & Müller 1909. [84]
8°, 101 S.
- Eckart, R.**, Abraham Gotthelf Kästner's Selbstbiographie und Verzeichnis seiner Schriften nebst Heyne's Lobrede auf Kästner herausgegeben. Hannover, Geibel 1909. [85]
8°, (3) + 40 S. + Porträt. — [1 Mk.]
- Aubry, A.**, Sur les travaux arithmétiques de Lagrange, de Legendre et de Gauss. L'enseignement mathém. 11, 1909, 430—450 [86]
- Gauss, C. F.**, Werke. Band 7 (1906). [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 152—156. (O. KNOPF.) [87]
- Simon, M.**, Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert (1906). [Rezension:] Časopis pro pěstov. mathem. 37, 1908, 75—77. [88]
- Zaremba, S.**, Pogląd na historię rozwoju i stan obecny teoryi równań fizyki w czterech odczytach. [89]
Wiadomości matem. 13, 1909, 145—221. — Über die historische Entwicklung und den gegenwärtigen Stand der Theorie der Differentialgleichungen der Physik.
- Hayashi, T.**, Some Dutch books on mathematical and physical sciences imported from Holland to Japan before the restoration in 1868. (Third note.) [90]
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 2., 1909, 39—41.
- Wangerin, A.**, Franz Neumann (1907). [Rezension:] Arch. der Mathem. 15., 1909, 235—236. (E. PRINGSHEIM.) [91]
- Tannery, J.**, Manuscrits et papiers inédits de Galois (1908). [Rezension:] Arch. der Mathem. 15., 1909, 253—254. (O. PERRON.) [92]
- Alasia, C.**, Daniel Augusto da Silva e la teoria delle congruenze binomie. [93]
Porto, Acad. polyt., Annaes 4, 1909, 166—192. — Wiederabdruck der Abhandlung „Sul stato della teoria delle congruenze binomie avanti il 1852“ (Rivista di fisica 4: 2, 1903, 149—208).

Müller, Felix, Zur Erinnerung an Hermann Graßmann. [94]
Dresden, Isis, Abhandl. 1909, 43—47.

Jahnke, E., La science extensive de Graßmann (Ausdehnungslehre). [95]
L'enseignement mathém. 11, 1909, 417—429.

Schlesinger, L., Bericht über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865 (1909). [Rezension:] Arch. der Mathem. 15, 1909, 246—247. (G. WALLENBERG.) — Bullet. d. sc. mathém. 33, 1909, 219—221. (J. T.) — Naturwiss. Rundschau 24, 1909, 530—531. (E. LAMPE.) [96]

Müller, Carl H., Der handschriftliche Nachlaß „Müttrich“. [97]
Zeitschr. für mathem. Unterr. 40, 1909, 506—510.

Vivanti, G., La nozione dell'infinito secondo gli studi più recenti (1908). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 95. [98]

Vivanti, G., Über den gegenwärtigen Stand der ganzen transzendenten Funktionen. [99]
Arch. der Mathem. 15, 1910, 318—343.

Mauville, O., Les découvertes modernes en physique. Ed. 2 (1909). [Rezension:] New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 16, 1909, 92—93. (E. B. WILSON.) [100]

[Tannery, Mme. M.] Liste des travaux de Paul Tannery (1908). [Rezension:] Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 16, 1909, 647—648. (H. BOSMANS.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 96. [101]

Leben, E., Henri Poincaré (1909). [Rezension:] L'enseignement mathém. 11, 1909, 490. (H. FEHR.) — Mathesis 9, 1909, 241—242. (J. N.) [102]

B. G. Teubners Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften und Technik (1908). [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 24, 1909, 668. (E. LAMPE.) [103]

e) Nekrologe.

Shelford Bidwell (1848—1909). [104]
Nature 82, 1909, 252—253.

Hugo Hertzner (1831—1908). [105]
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 417—422 [mit Porträt und Schriftenverzeichnis]. (E. LAMPE.)

Albin Herzog (1852—1909). [106]
Schweizerische Naturf. Ges., Verhandlungen 92, 1909, Nekrologe 82—95 [mit Schriftenverzeichnis] + Porträt. (A. STODOLA.)

Pierre Jules César Janssen (1824—1907). [107]
London, Royal soc., Proceedings 81, 1908, Mathem. LXXVII—LXXXI. (N. L.)

G. Kirilov (1845—1908). [108]
Gazeta matem. (Bukarest) 14, 1908/9, 97—99. (A. G. JOACHIMESCU.)

Hermann Laurent (1841—1908). [109]
HERMANN LAURENT 1841—1908. Biographie — bibliographie. Paris 1909.
8°, (2) + 63 S. + Porträt.

Heinrich Maschke (1853—1908). [110]
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 98—94.

Peter Muth (1860—1909). [111]
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 454—456 [mit Porträt und Schriftenverzeichnis]. (M. PASCH.)

Simon Newcomb (1835—1909). [112]
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 16, 1909, 48. — Science 30, 1909, 353—357 (G. W. HILL); 357—359 (E. C. ELLIOTT)

Walther Ritz (1878—1909). [113]
Schweizerische Naturf. Ges., Verhandl. 92, 1909, Nekrologe 96—103 [mit Schriftenverzeichnis] + Porträt. (E. FUKER.) — Naturwiss. Rundschau 24, 1909, 668—669. (P. WEISS.)

Max Rosenmund (1857—1908). [114]
Schweizerische Naturf. Ges., Verhandl. 91 (1908), 1909, Nekrologe 89—95 [mit Schriftenverzeichnis] + Porträt. (F. BECKER.)

Georg Sidler (1831—1907). [115]
Schweizerische Naturf. Ges., Verhandl. 91 (1908), 1909, Nekrologe 101—107 [mit Schriftenverzeichnis] + Porträt. (CHR. MOSER.)

Richard Strachey (1817—1908). [116]
London, Royal soc., Proceedings 81, 1908, Mathem. LXXXIV—XCIII. (G. H. D.)

Washington Irving Stringham (1857—1909). [117]
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 16, 1909, 101.

William Thomson, Lord Kelvin (1824—1907). [118]
München, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 38, 1908, 79—80.

Giovanni Vallati (1863—1909). [119]
Wiadomości matem. 13, 1909, 316.

Hermann Carl Vogel (1841—1907). [120]
München, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 38, 1908, 80.

f) Aktuelle Fragen.

Loria, G., Sur les moyens pour faciliter et diriger les études sur l'histoire des mathématiques (1908). [Rezension:] Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 16, 1909, 639—642. (H. BOSMANS.) [121]

Tyler, H. W., On the course in the history of mathematics in the Massachusetts Institute of technology. [122]
Biblioth. Mathem. 10, 1909/10, 48—52.

Amodeo, F., Sulla necessità di formare un archivio delle scienze matematiche. [123]
Atti del IV congresso internazionale dei matematici 3, Roma 1909, 557—562.

André, D., Des notations mathématiques. Enumération, choix et usage. Paris, Gauthier-Villars 1909. [124]
8°, XVIII + 501 S. — [16 fr.] — [Rezension:] Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 17, 1910, 284—287 (T. J.) — Bullet. d. sc. mathém. 33, 1909, 228—244. — Mathesis 10, 1910, 15—18.

- Wade, H. T.**, A museum to illustrate the development of mathematics. [125]
Scientific american 101, 1909, n° 1.
- Radlo, F.**, Bericht der Eulerkommission für das Jahr 1908/09 (1909). [Wiederabdruck mit Nachträgen.] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 133—143. [126]
- Radlo, F.**, Die Herausgabe der sämtlichen Werke Leonhard Eulers. [127]
Internationale Wochenschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik 4, 1910, 4 S.
- Ahrens, W.**, Latein oder Deutsch? Die „Sprachenfrage“ bei der Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. Magdeburg, Peters 1910. [128]
8°, IV + 76 S.
- Rose, J.**, Sur l'enseignement des mathématiques en Belgique. [129]
L'enseignement mathém. 12, 1910, 20—36.
- [Internationaler Mathematikerkongreß in Rom 1908.] [130]
Kiew, Univ., Izvestija 1908 Nr. 11 a. 14 S. (J. BJELANKIN); 1909, Nr. 3 a. 7 S. (G. PFEIFFER).
- [Deutsche Mathematikerversammlung in Salzburg 1909.] [131]
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 125—132. — New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 16, 1909, 114—121. (E. DINTZL.) — L'enseignement mathém. 11, 1909, 471—476.
- [Englische Mathematikerversammlung in Winnipeg 1909.] [132]
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 16, 1909, 110—113. (J. C. FIELDS.)
- [Französische Mathematikerversammlung in Lille 1909.] [133]
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 144—145.
- [Italienische Mathematikerversammlung in Florenz 1909.] [134]
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 174—175. — L'enseignement mathém. 11, 1909, 475—476.
- [Nordische Mathematikerversammlung in Stockholm 1909.] [135]
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 145. — New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 16, 1909, 155—156. — L'enseignement mathém. 11, 1909, 476—477.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Professor M. ABRAHAM in Göttingen zum Professor der rationellen Mechanik an der Technischen Hochschule in Mailand.

— Privatdozent A. ADLER in Wien zum Professor der darstellenden Geometrie an der Universität daselbst.

— Professor R. J. ALEY in Bloomington zum „Superintendent of public instruction of the state of Indiana“.

— Privatdozent FR. BIDLINGMAIER in Berlin zum Professor der Geophysik an der Universität daselbst.

— Professor FR. L. BISHOP zum Professor der Physik an der Universität in Pittsburgh.

— Professor T. BOGGIO in Florenz zum Professor der rationellen Mechanik an der Universität in Turin.

— Dr. J. W. BRADSHAW in Ann Arbor zum Professor der Mathematik an der Universität von Michigan daselbst.

— Dr. W. C. BRENKE in Lincoln zum Professor der Mathematik an der Universität von Nebraska daselbst.

— Dozent W. BROWN in Dublin zum Professor der Physik am „Royal college of science“ daselbst.

— „Instructor“ B. H. CAMP in Middletown zum Professor der Mathematik an der „Wesleyan university“ daselbst.

— Dr. A. W. CONWAY zum Professor der mathematischen Physik an der „University college“ in Dublin.

— „Instructor“ R. F. DEIMEL in Hoboken zum Professor der Mathematik am „Stevens institute“ daselbst.

— Privatdozent C. FRITSCH in Darmstadt zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Professor G. A. GIBSON in Glasgow zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor E. L. HANCOCK in Lafayette zum Professor der Mechanik am „Worcester polytechnic institute“.

— Dr. U. S. HANNA in Bloomington zum Professor der Mathematik an der Universität von Indiana daselbst.

— Observator J. HARTMANN in Potsdam zum Professor der Astronomie an der Universität in Göttingen.

— Professor G. W. HARTWELL in Lawrence zum Professor der Mathematik an der „Hamline university“ in St. Paul, Minnesota.

— Professor CH. HASEMAN in Bloomington zum Professor der Mathematik an der Universität von Nevada in Reno.

— Professor C. N. HASKINS in Urbana zum Professor der Mathematik am „Dartmouth college“.

— Professor J. VON HEPPERGER in Wien zum Direktor der Universitätssternwarte daselbst.

— Professor E. HERTZSPRUNG in Göttingen zum Observator am Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam.

— F. E. KESTER zum Professor der Physik an der Universität von Kansas in Lawrence.

— Professor G. KOWALEWSKI in Bonn zum Professor der Mathematik an der deutschen Technischen Hochschule in Prag.

— Dr. J. KUNZ in Ann Arbor zum Professor der Mathematik an der Universität von Illinois in Urbana.

— Professor A. LAMPA in Wien zum Professor der Physik an der Universität in Prag.

— J. A. M'CLELLAND zum Professor der mathematischen Physik am „University college“ in Dublin.

— H. C. M'WEENEY zum Professor der Physik am „University college“ in Dublin.

— Dr. J. MILLER zum Professor der Mathematik am „Technical college“ in Glasgow.

— Privatdozent K. MÖNNICHMEYER in Bonn zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Dr. C. A. MOORE in Cincinnati zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. H. PLYAN zum Professor der Experimentalphysik am „University college“ in Dublin.

— Privatdozent CL. PREY in Wien zum Professor der Astronomie und Geodäsie an der Universität daselbst.

— Professor R. SALIGER in Prag zum Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Wien.

— Privatdozent I. SCHUR in Berlin zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Miss M. E. SINCLAIR am „Oberlin college“ zum Professor der Mathematik daselbst.

— E. SOLER in Messina zum Professor der theoretischen Geodäsie an der Universität in Padua.

— A. H. TAYLOR zum Professor der Physik an der Universität von North Dakota.

— Miss RUTH G. WOOD am „Smiths college“ zum Professor der Mathematik daselbst.

Todesfälle.

— KNUT ÅNGSTRÖM, Professor der Physik an der Universität in Upsala, geboren in Upsala den 12. Januar 1857, gestorben daselbst den 4. März 1910.

— SHELFORD BIDWELL, Rechtsanwalt, Physiker, geboren in Thetford den 6. März 1848, gestorben zu Oaklands chase in Weybridge den 18. Dezember 1909.

— HUGH BLACKBURN, emeritierter Professor der Mathematik an der Universität in Glasgow, gestorben den 9. Oktober 1909, 86 Jahre alt.

— ANATOLE BOUQUET DE LA GRYE, früher „directeur du service hydrographique“, geboren in Thiers den 29. Mai 1827, gestorben in Paris den 22. Dezember 1909.

— PAUL FENNER, Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule in Darmstadt, geboren zu Homburg v. d. Höhe den 8. Juli 1852, gestorben im November 1909.

— O. O. HOWARD, früher Professor der Mathematik an der Kriegshochschule in West Point, gestorben den 26. Oktober 1909, 78 Jahre alt.

— HENRI PELLAT, Professor der Physik an der Universität in Paris, geboren in Grenoble den 27. Juli 1850, gestorben in Paris den 18. Dezember 1909.

— J. W. RUSSELL, früher „lecturer of mathematics“ am „St. Johns college“ in

Oxford, gestorben den 4. November 1909, 81 Jahre alt.

— WASHINGTON IRVING STRINGHAM, Professor der Mathematik an der Universität von California, geboren zu Yorkshire, N. Y. den 10. Dezember 1857, gestorben den 5. Oktober 1909.

Die Euler-Ausgabe.

— Am 19. Dezember 1909 sind in einer Sitzung in Bern die Organisationen geordnet, die zur Durchführung der EULER-Ausgabe erforderlich sind. Das Redaktionskomitee besteht aus den Herren F. RUDIO (Zürich), P. STÄCKEL (Karlsruhe) und A. KRAZER (Karlsruhe). Der Präsident des ebenfalls dreigliedrigen Finanzausschusses ist Herr K. VON DER MÜHLL (Basel). Den Druck und den Kommissionsverlag hat die Firma B. G. Teubner übernommen. — Ende März 1910 betrug die Zahl der subskribierten Exemplare 386.

Gekrönte Preisschriften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles* Concours de l'année 1909. Un prix a été décerné à M. E. J. WILCZYNSKI pour son mémoire sur la géométrie infinitésimale de l'espace euclidien réglé.

Mathematikerversammlungen im Jahre 1909.

— *Deutsche Mathematikervereinigung*. Die Jahresversammlung 1909 fand zu Salzburg 19.—23. September statt. Vorträge historischen Inhalts wurden gehalten von F. ENGEL („HERMANN GRASSMANN“), E. HOPPE („Das Sexagesimalsystem und die Kreisteilung der Babylonier“) und S. GÜNTHER („Mathematische und physikalische Geographie bei LEONHARD EULER“). Andere Vorträge wurden gehalten von E. WÄLSCH, G. PICK, E. NÖTHER, G. KOHN, R. ROTHE, R. MÜLLER, R. MEHME, M. GRÜBLER, E. SALKOWSKI, H. WIENER, E. STÜBLER, R. SKUTSCH, A. EINSTEIN, H. JUNG, L. G. DU PASQUIER, W. VELTEN, H. HAHN, A. KORN, W. WIRTINGER, O. PERRON, E. TIERMANN, E. PAPPERITZ, E. MÜLLER, E. CZUBER und F. ENGEL. In der Geschäftssitzung wurde u. a. auch über die literarischen Unternehmungen der Vereinigung berichtet und beschlossen, die bibliographische Kommission in ihrer bisherigen Zusammensetzung auch weiterhin fortbestehen zu lassen.

The circle-squaring of the Chinese.

By YOSHIO MIKAMI at Ōhara (Kazusa).

The ancient Chinese employed for π the value 3, or, to speak more precisely, they took the ratio of the circumference of a circle to its diameter as 3 to 1. As to how long this had been the custom we do not know. We only know that an ancient work on the calendar, the *Chou-pei*, contains certain passages from which we infer that the value of π employed was 3. This value must have been universally adopted in old times, for the *Chiu-chang Suan-shu* or the *Arithmetical Rules in Nine Sections*, the oldest extant book on Chinese mathematics, makes use of no other value of π , and it is the same with the *Wu-ts'ao Suan-shu* and the treatises of SUN-TSU, HSIA-HOU YANG, CHANG CHIU-CHIEN and CHÊN LUAN, all the older works on mathematics now extant. These treatises were all written in the seven centuries following the second century B. C. Nothing is said in these treatises about the mensuration of the circle.¹⁾

But the Chinese did not remain satisfied with this approximate value of π . According to the *Sui Shu* or the *Records of the Sui Dynasty*, there had already appeared quite a host of circle-squarers in the persons of LIU HSIAN, CHANG HENG, LIU HUI, WANG FAN, P'I YEN-TSUNG and numerous others, who calculated the length of the circumference, but with varying results. Of these, LIU HSIAN's and P'I YEN-TSUNG's values are lost. The former belonged to the first century B. C., and the latter to the third or fourth century.

CHANG HENG, who lived in 78—139 A. D., asserted that the squares on a circumference and on the perimeter of its circumscribed square are as 5 to 8, which is equivalent to taking π as equal to $\sqrt{10}$. This is recorded in a commentary on the *Arithmetical Rules in Nine Sections*, but the details of his computation are lost. CHANG was a great astronomer and his work on the calendar, *Ling-hsian*, is remarkable for its

1) Throughout this article, only original sources have been used, except where the contrary is expressly stated.

theory of creation of the universe, in which he explains how the world developed from chaos or nothing.

WANG FAN (229—267), a young general of the Wei Kingdom and an astronomer, in the heroic age of the Three Monarchies, gave 142 as the value of the circumference of a circle whose diameter is 45, this corresponding to the value $\pi = 3.1555 \dots$ ¹⁾

Contemporary with WANG FAN, but belonging to a different kingdom, Wei in North China, there lived LIU HUI, about whose life we know nothing except that he wrote in 263 his commentaries on the *Arithmetical Rules in Nine Sections*. His commentaries are extant, and we find among them the particulars of his quadrature of the circle. LIU HUI first inscribes an hexagon in a circle, and then by doubling successively the number of sides constructs a dodecagon, a 24-gon, and so forth. In this way the areas of the polygons thus formed approach as a limit the area of the circle. „Hence“, he says, „by doubling and doubling the number of sides and by proceeding until we can no more continue the process of doubling, the perimeter becomes ultimately coincident with the circumference of the circle, so that by taking the area of this ultimate polygon for that of the circle, no portion however small would be neglected. By multiplying, therefore, by half the diameter, we get the area of the circle.“ Although this proposition was so simply enunciated, the actual value of the area could not be deduced from it without actually calculating the successive polygons inscribed in the circle. Thus the diameter being taken as 2 feet long, one side of the inscribed hexagon is equal to half the diameter or to 1 foot. Taking the two right-angled triangles formed when one of the sides is bisected by a radius, the square of a side of the inscribed dodecagon will be found to be $0.267949193445 \dots$, the square root of which gives the length of a side. In these calculations LIU HUI of course did not have the assistance of the decimal fraction, — a concept entirely unknown to the ancient Chinese. He however makes use of the equivalent of 0.000001 of a foot as the unit. LIU next calculates the square of the sides of the 24-gon and 48-gon, respectively, finding them to be 68148349466 and 17110278813, omitting the decimal point. The square root of this latter is 130806. Multiplying it by the radius and by 24 and dividing by 100000000000, LIU then proceeds to find the area of the 96-gon as equal to $313\frac{584}{624}$, the tenth of a foot being the unit. Here it must be remarked that the old Chinese occasionally expressed areas in the same units as lengths. The area of the 192-gon is

1) YÜEN YÜEN, Biographical collections of astronomers and mathematicians, written in Chinese.

accordingly given as containing $314\frac{64}{625}$ such units. Twice the difference of this area and that of the 96-gon, or $\frac{210}{625}$, is the sum of 96 rectangles constructed on the outside of the 96-gon, each being equal to the product of one side of the polygon and the difference between its apothem and radius. This sum being added to the area of the 96-gon, the result is obviously greater than the area of the circle. LIU HUI takes therefore the integral part in the area of the 192-gon as the area of the circle, the fractional part being neglected. Twice this area being divided by the radius, the length of the circumference is found to be 6.28 feet, and LIU finally expresses, comparing it with the diameter 2 feet, the ratio of the circumference to the diameter as 157:50. LIU adds that this gives a value of the circumference somewhat smaller than its actual value.

In describing LIU HUI's mensuration of the circle we cannot but recall ARCHIMEDES' studies. Even if there was no relation between the Greek and the Chinese sciences, still the latter could not escape being affected by influences coming from the land of Buddha. Is it not noteworthy that the study of this problem arose in China only after Indian intercourse had been opened through Central Asia? The Chinese may have been instigated to study the squaring of the circle through their Indian masters, although we have but little knowledge of the actual state of the mathematical attainments of the Indians at that time. ARYABHATTA's value of $\pi = 62832 : 20000$ may or may not be related to LIU HUI's, but the latter flourished some time before the former.

However great the Indian influence might have been in stimulating the Chinese, the latter were not always mere followers of their foreign predecessors. Some two centuries subsequent to LIU HUI there appeared another circle-squarer more prominent and far more distinguished than he, the illustrious TSU CH'UNG-CHIH, who belonged to the Kingdom of Liu Sung. Although placed in MORITZ CANTOR's *Geschichte der Mathematik*¹⁾ at the end of the 6th century, the *Records of the Ch'i Kingdom in the South* and the *Records of the Southern Monarchies* agree, in their biographical notices, in representing this noted scholar as flourishing in the 5th century. Moreover, of his two fractional values of π one only is mentioned in CANTOR, while the other, in which TSU anticipated the moderns by a whole millenium, is not mentioned. TSU lived according to these authentic sources of information in 428—499.

TSU CH'UNG-CHIH used, as we read in the *Records of the Sui Dynasty*, a method of procedure more exact or more minute than his predecessors. He took a circle of diameter 100000000 or 10^8 , which he represented

1) M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 1^a, Leipzig 1907, S. 683—684.

as equal to 10 feet, and found for the length of its circumference the limits 31.415927 feet and 31.415926 feet, from which he inferred that the true value must lie between these two. From these he deduced in some way two values for π , $\frac{22}{7}$ and $\frac{355}{113}$, known respectively as Tsu's rough and close approximations.

The first of Tsu's fractions is the same as that obtained by ARCHIMEDES hundreds of years previously; but there is no earlier trace of the other. The Greeks never possessed it and the Hindus knew nothing of it. Even the learned Arabs in subsequent ages left no trace of having rediscovered Tsu's value. It was only in 1585 that the Dutch mathematician ADRIAAN ANTHONISZON, father of METIUS, found it once more. The Chinese having possessed this value so long before the moderns, would it not be desirable to name it henceforth in honour of its discoverer?

TSU CH'UNG-CHIH wrote the *Chui-shu*, consisting of many books or chapters, in which his calculations of the above values of π were laid down, but the work is unfortunately lost. The description given above is mentioned, however, in the *Records of the Sui Dynasty*, that was written in the first half of the seventh century by the learned doctor and statesman WEI CHIH.

The term *Chui-shu* has sometimes been considered to have originally meant the method or process which Tsu used in his circle-measurement. Thus the same term was in later years actually applied to kindred processes both in China and in Japan, the Japanese term *tetsu-jutsu*, by which sometimes the analytical method of circle-measurement and generally the operation of infinite expansions used in such a measurement was meant, being represented in the same ideographes as *Chui-shu*. But the term signified originally some process of calendar computation, — it is actually employed in this meaning by the older writers, such as TSIN CHIU-SHANG and others. Tsu's book was no doubt a treatise on the calendar, and his calculations of the circle were appended to it or constituted a chapter. Tsu was a great astronomer, as history tells us, and he was the inventor of a calendar system. He is noted for his uncommon inventive genius, for it is related that he constructed a south-pointing vehicle, an automobile machine, and a motor boat, descriptions of which are all lost.¹⁾

On account of certain terms used by Tsu, which are recorded in the *Records of the Sui Dynasty*, some scholars have been inclined to believe not without cause that Tsu had recourse to a sort of expansion in series.

1) The Records of the Ch'i Kingdom in the south and the Records of the southern monarchies, etc.

It seems possible that TSU applied undetermined multipliers to the first three terms of such an expansion in some such way as in the process of the *chao-ch'a* or the Japanese *shōsa*, which KUO SHOU-CHING employed in the 13th century. This plan in connection with the first two terms is said to have been used by LI CH'UN-FENG in his calendar calculations in the beginning of the 7th century.

TSU CH'UNG-CHIH's theories as laid down in his *Chui-shu*, WEI CHIH writes¹⁾, were so extraordinarily minute and elegant that he was never surpassed by any other mathematician. The native academic world was so little able to penetrate into the depth of his writings that they were consequently destined to be forgotten.

Of the two values obtained by TSU, the simpler soon became used generally, but not the closer approximation. Even the renowned commentator LI CH'UN-FENG, who was a contemporary of the author of the *Records of the Sui Dynasty*, used TSU's rough value instead of the more exact one. TSU's second fraction does not reappear in the history until it is quoted again by CHANG YU-CHIN, who lived during the Mongol Dynasty.

About the latter we know nothing except that he wrote the *Kê-hsiao Hsin-shu*, consisting of 5 books, in which his treatment of the circle is given.²⁾ CHANG mentions the various values of π used from ancient times, that is, the values, 3, $3 \cdot 14$, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$, etc., the last named being the most accurate. He first takes a circle of radius 10 units and inscribes in it a square, from which an octagon, a 16-gon, etc., are constructed, and after finding thus a polygon of 2^{14} or 16 384 sides he assumes that this polygon coincides with the circle. The sides and consequently the perimeters of these polygons are successively calculated in the same manner as in the works of LIU HUI. But a radius consisting of 10 units being inconvenient, CHANG changes it to 1000 units after his calculation of the octagon. He thus finds the perimeter of the 16 384-gon to be 3141.592... This being multiplied by 113, the result is the number 355, from which CHANG concludes that $\frac{355}{113}$ is the most accurate of all values obtained for π . CHANG made no use of circumscribed polygons, whereas TSU is believed by MEI WEN-TING and later scholars to have used both the inscribed as well as the circumscribed hexagons.

As shown by CHANG's work, TSU's minuter fraction had not been altogether forgotten in later ages. It is true, however that it was but little used by current mathematicians, for most writers give the simpler one only. TSIN CHIU-SHANG gave in his *Su-shu Chiu-chang* of 1247 the values 3 and $\frac{22}{7}$ as well as another, $\sqrt{10}$, which CHANG HENG had used in

1) The Records of the Sui dynasty. 2) YÜEN YÜEN, Biographical collections.

earlier times. CH'EN HUO, who lived a short time before TSIN, possibly used the same value. This fact deserves attention, because the Indians and the Arabs also used the same value. The Chinese may or may not have borrowed it from some foreign source.

The value $\pi = \sqrt{10}$ appears once more in the course of the Chinese history of mathematics. In the middle of the 18th century WANG YÜAN-CHI gives it in his *Kou-ku Yen*. The reason for WANG's adoption of this value is not known, but it was also used by CH'EN T'ANG, who emphasised its convenience and its practical accuracy. He argues thus: The old value 3 as well as LIU HUI's value 3.14 are generally accepted, but these are by no means exact. When we measure a material circle, its circumference will be found 3.16 times as great as its diameter. Of the inaccuracy of the old value little needs be said. LIU HUI's value is obtained by dividing the circle, that is, by inscribing polygons in the circle and calculating the altitudes of the arcs thus divided. In this way small remainders are neglected and in the end the chord is considered to coincide with the arc, so that the circumference obtained is not the true circumference and the result arrived at does not represent the true value. Besides, LIU HUI's calculation ends in the 96-gon. It is no wonder, therefore, that his result should be so inaccurate. There is, however, a way of getting at the value of π more closely than by measuring the circumference. This consists in taking 10 times the square of the diameter for the square of the circumference. The value of π is therefore 3.16.¹⁾ This value was probably adopted because it seemed better to use an approximation depending upon a simple law of formation. Possibly borrowed from abroad, the love of simplicity that characterizes the Chinese mind probably prevailed upon them to use such a value in practice.

Towards the end of the 18th century T'AN T'AI experimentally measured the circumference of a wooden circle 10 feet in diameter, and he found it equal to 31.6 feet. His *Chou-ching-shuo* or *On the Circumference and the Diameter* was then written, in which the correctness of CH'EN T'ANG's opinion was defended. How much this appealed to the Chinese is seen from the fact that this value was used, as CHU K'É-FENG writes in his *Third Series of the Biographical Collections of Astronomers and Mathematicians*, until so illustrious a personage as HSÜ YU-TING again attempted the calculation of the true value by means of inscribed and circumscribed polygons.

At the close of the 16th century HSING YUN-LU gave for π the value 3.126. He was followed by YEN SHIH-LUNG, who taught that the

1) YÜEN YÜEN, Biographical collections.

area of a square circumscribed about a circle is $\frac{32}{25}$ times its area. This is equivalent to taking $\pi = \frac{25}{8} = 3.125$. K'U CH'ANG-FA also adopted the same value of π , which is sometimes called CHIH's value, and seems to have been in use in very early times.¹⁾

In the *Su-li Ching-yün* of 1713, compiled by an imperial order, there is a chapter devoted to the quadrature of the circle. Here we find both the square and the hexagon inscribed in and circumscribed about a circle. The diameter of the circle is taken as 2 000 000 000 000, and the sides of the successive polygons are calculated step by step, the perimeters of the inscribed and circumscribed polygons of 3×2^{34} or 5 153 960 752 sides and of 2^{38} or 34 359 738 368 sides being found to be

6 283 185 307 179 . 586 476 580 134 822 035 501 088 768,
 6 283 185 307 179 . 586 476 932 154 601 778 283 960 832,
 6 283 185 307 179 . 586 476 863 083 106 755 003 023 360,
 6 283 185 307 179 . 586 477 312 717 861 858 941 337 600.

From these values the first 19 figures in the value of π are obtained, which are

$$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,238.$$

Before the publication of the *Su-li Ching-yün*, in which some of the science of the Western World appears, there were Jesuit missionaries who laboured to introduce Occidental learning into the Middle Empire. One of these missionaries, ADAM SCHAAL, who is known in China by his Chinese name T'ANG Jô-wang, is said to have computed the value of π , but we are ignorant of his result.

In the beginning of the 18th century MEI KOU-CH'ENG wrote the *Ch'ih-shui I-chei* or the *Jewel Dropped in the Red River*, in which he published among others three of the formulae in infinite series for the circumference of a circle, for an arc and its sine, cosine, etc., nine in all, known in China as TU TÊ-MEI's nine formulae. TU TÊ-MEI is the Chinese name of the French missionary JARTOUX, whose writings are said to have been given by the Emperor KANGHY to MEI's grandfather MEI WEN-TING, who was himself a mathematician of profound erudition.²⁾

After the publication of MEI's book the studies of allied subjects became prominent, for which MING AN-T'U, TUN YU-CH'ENG, HSIANG MING-TA, HSU YU-T'ING, LI SHAN-LAN, T'AI HSU and others became distinguished.

1) YÜEN YÜEN, Biographical collections.

2) YÜEN YÜEN, Biographical collections, and CHU, Third series of the Biographical collections; also T. HAYASHI in the Proceedings of the Tokyo Mathematical society 5, 1909, p. 43—57. The author consulted the latter essay only after the completion of this article.

But we shall not in this place enter into discussion of the works of these scholars.

By using one of TU TE-MEI's formulae, CHU HUNG in the beginning of the 19th century, calculated the value of π to 40 places, which was afterwards published by HSÜ YU-T'ING in one of his works. CHU's value is

$$\pi = 3.141592653589793238462643186367472279514,$$

of which the first 25 figures only are correct, as later Chinese scholars have pointed out.

Subsequently TS'ENG CHI-HUNG, a younger son of the heroic statesman TS'ENG KUO-FAN, and who died when still young, attempted another method under his master TING CH'U-CHUNG's guidance. TS'ENG used in his calculation the formula

$$\begin{aligned} \arccos \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{2^3} - \frac{1}{7} \frac{1}{2^4} + \dots \\ &+ \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{3^3} - \frac{1}{7} \frac{1}{3^4} + \dots \end{aligned}$$

which he obtained from the relation $(1 - \frac{1}{2}) / (1 + 1 \times \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$, by expanding $\arccos \frac{1}{2}$ and $\arccos \frac{1}{3}$ according to a formula arrived at by HSÜ YU-T'ING. TS'ENG's value,

$$\pi = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067(97),$$

was published in 1874 by T'ING.¹⁾

1) The Editor is indebted to Professor DAVID EUGENE SMITH for revising Mr. MIKAMI's article for publication.

Ibn al Haitams Schrift über parabolische Hohlspiegel.

Von J. L. HEIBERG in Köbenhavn und E. WIEDEMANN in Erlangen.

Von optischen Problemen hat besonders die Lehre von den Hohlspiegeln, und zwar sowohl von den parabolischen wie von den sphärischen, die Gelehrten des Altertums, die der islamischen Welt und im Anschluß an diese diejenigen des okzidentaln Mittelalters beschäftigt.

Die folgenden Seiten sollen zu unseren bisherigen Kenntnissen auf diesem Gebiet einiges hinzufügen, indem wir zunächst eine Schrift von IBN AL HAITAM über parabolische Hohlspiegel besprechen. Wir bemerken dazu, daß die philologische Bearbeitung des lateinischen Textes von J. L. HEIBERG, das übrige überwiegend von E. WIEDEMANN herrührt.¹⁾ In einem folgenden Artikel werden wir hierzu einige Zusätze machen und uns mit einer Schrift von IBN AL HAITAM über sphärische Hohlspiegel beschäftigen.

1. Einleitung.

Nach ZEUTHEN²⁾ hätte bereits ARCHIMEDES den parabolischen Hohlspiegel benutzt; nach der Einleitung zu der Schrift des IBN AL HAITAM scheint dies aber doch nicht sicher. Weiter hat sich ANTHEMIUS³⁾ ein-

1) Auf Grund der arabischen Handschriften usw. hat der eine von uns (E. W.) früher eine kurze Übersicht über den uns beschäftigenden Gegenstand gegeben (vgl. *Annalen der Physik* (WIEDEMANN-Reihe) 89, 1890, S. 110). Dort sind auch die Leistungen des okzidentaln Mittelalters in ihrer Abhängigkeit von IBN AL HAITAM kurz besprochen worden. Eine eingehendere Untersuchung wäre sehr erwünscht.

2) H. G. ZEUTHEN, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* (1886), S. 374 ff. — Neuerdings ist in Syrakus ein Denkmal des ARCHIMEDES mit dem Brennspiegel in der Hand und einer entsprechenden historisch falschen Unterschrift aufgestellt worden. Sie lautet: „Invento speculo naves romanas incendit.“

3) Wir geben hier die Literatur über das Fragment des ANTHEMIUS und das später gefundene „Fragmentum Bobiense“. Das ANTHEMIUS-Fragment aus dem Werke *περί παραδόξων μηχανημάτων* (über die mechanischen Paradoxa) hat zuerst L. DUPUY (Paris 1777) mit einer Übersetzung versehen herausgegeben. Seine Ausgabe ist wieder abgedruckt in *Histoire de l'académie des inscriptions et belles*

gehend mit diesem Gegenstand beschäftigt. Die arabischen Bibliographen erwähnen übrigens merkwürdigerweise keine Schrift des ARCHIMEDES und ANTHEMIUS über Brennspiegel, während ersterer nach griechischen Quellen eine leider verloren gegangene Schrift über Katoptrik geschrieben hat; wohl werden aber diese beiden Männer in der Einleitung zu der Schrift von IBN AL HAṬAM genannt.

Von den Muslimen wird DIOKLES als der Erfinder der parabolischen Hohlspiegel betrachtet. Auch ANTHEMIUS selbst bemerkt, daß er Vorgänger gehabt habe, und wies dabei wohl auf DIOKLES hin. AL SINGĀRĪ (SACHĀWĪ, ANṢĀRĪ) sagt bei der Besprechung der Brennspiegel in seiner Enzyklopädie¹⁾: „Die Alten stellten die Spiegel aus ebenen Flächen her. Einige machten sie konkav (wohl aus Kugeln), bis DIOKLES (DIŪKLIS) zeigte und bewies, daß, wenn die Fläche dieser Spiegel entsprechend einer Parabel gekrümmt ist, sie die höchste Kraft besitzen und am stärksten brennen. Es gibt ein unter diesem Gesichtspunkt verfaßtes Werk von IBN AL HAṬAM.“ — Die Schrift des DIOKLES ist uns weder griechisch noch in arabischer Übersetzung erhalten; die arabischen Bibliographen führen auch nicht, soweit sich hat finden lassen, ihren Titel auf.

Die Schrift des DIOKLES über die Brennspiegel (*περὶ πυρσέων*) wird aber in dem Kommentar des EUTOKIUS zu der Schrift des ARCHIMEDES über die Kugel und den Zylinder dreimal erwähnt.²⁾

Den Arabern ist sie wohl im Anschluß an den EUTOKIUS-Kommentar bekannt gewesen. Sie wird bei ihnen gelegentlich der folgenden Aufgabe zitiert: Es seien zwei Linien a und b gegeben, es sollen zwei andere a_1 und b_1 gesucht werden, so daß:

$$a : a_1 = a_1 : b_1 = b_1 : b.$$

lettres (Paris) 42, 1786, S. 392. Die Ausgabe enthält zahlreiche sachliche und sprachliche Bemerkungen.

Einen Teil hat mit Verbesserungen publiziert J. G. SCHNEIDER in *Eclog. physicae* (Lips. 1801, p. 402 ff.), endlich das Ganze A. WESTERMANN in seinem Buch *Paradoxographie* (Braunschweig 1839).

Das für die Kenntnis der Alten von den Brennspiegeln sehr wichtige „Fragmentum Bobiense“ ist herausgegeben von CHR. BELGER (*Hermes* 16, 1881, S. 261), von O. WACHSMUTH und M. CANTOR (*ibid.* S. 627) und von J. L. HEIBERG (*Zeitschr. für Mathem.* 28 (1883), Hist. Abt. S. 121) sprachlich und sachlich behandelt worden.

Eine neueste Behandlung nebst Übersetzung von T. L. HEATH findet sich *Biblioth. Mathem.* 7., 1906/7, S. 225; dieser hält das „fragm. Bobiense“ für viel älter als ANTHEMIUS. Der eine von uns (HEIBERG) war schon vorher selbst zweifelnd geworden über den von ihm früher behaupteten Zusammenhang zwischen beiden; doch hat er gegen den Ansatz von HEATH Bedenken.

1) Vgl. E. WIEDEMANN, Sitzungsber. der phys.-mediz. Sozietät in Erlangen 37, 1905, S. 402.

2) ARCHIMEDES, *Opera omnia* ed. HEIBERG 3, S. 78, 19; 152, 24; 188, 12.

Einiges von dem, was der eine von uns über die Erwähnung der Schrift bei muslimischen Schriftstellern gefunden hat, sei hier mitgeteilt.

Nach einer freundlichen Mitteilung von dem leider verstorbenen H. DERREBOURG in Paris geht in dem Manuskript 960 des Escorial (955 nach CASIRI) der Schrift des MENELAUS über die Zusammensetzung von Legierungen, von der der eine von uns demnächst eine Übersetzung mitteilen wird, fol. 22—42 eine Enzyklopädie voraus, die mit den Worten beginnt: „Es sammelte ihren Bericht EUTOKIUS in seiner Erklärung zu dem zweiten Buche des ARCHIMEDES über die Kugel und den Zylinder und er sagt, daß sie behandelten die Ermittlung von zwei Linien $[a_1, b_1]$ zwischen zwei Linien $[a, b]$, so daß die vier in einer stetigen Proportion stehen, nach der Gesamtheit der Alten, es sind HERON, PHILON der Byzantiner, APOLLONIUS, DIOKLES, PAPPUS usw.“

Etwas mehr als diese Notiz enthält eine solche von F. WÖPCKE¹⁾, der den Titel der obigen Abhandlung folgendermaßen angibt: „Abhandlung von EUTOKIUS, die von den Lösungen berichtet, die von den Alten gegeben sind für das Problem: zwei zwischen zwei anderen Linien gelegene Linien [der Größe nach] so zu bestimmen, daß diese vier Linien in stetiger Proportion sind, übersetzt von ABU' L HASAN TĀBIT BEN QURRA. Das Werk enthält 18 Figuren (Propositionen) und [die Lösungen] von 11 Geometern, nämlich HERON, PHILON dem Byzantiner, APOLLONIUS, DIOKLES, PAPPUS, SPOROS, MENECHMUS, ERATOSTHENES, PLATON, ARCHYTAS, NIKOMEDES.“

Dies sind ganz dieselben Namen, die auch der griechische erhaltene EUTOKIUSKOMMENTAR, wenn auch in etwas anderer Reihenfolge, enthält.²⁾

Der eine von uns hat von den den DIOKLES betreffenden Seiten des Escorialmanuskriptes eine weiß-schwarze Photographie dank der Güte von Herrn MANERO erhalten. Die Entwicklungen von DIOKLES sind, wie er sagt, nach dem Werke über die Brennspiegel („al Mirâjat al muhriqa“) gegeben.

Ob und inwiefern trotz der Figuren und der abweichenden einleitenden Worte doch der Inhalt des arabischen Textes mit dem griechischen sich deckt, kann erst eine genauere Untersuchung lehren.

Eine Anwendung auf die Hohlspiegel findet sich in dem arabischen Text nicht; der eine von uns (HEIBERG) vermutete übrigens schon früher, daß es sich um die Lösung der geometrischen Aufgabe handelt.³⁾

In einer Leydner Handschrift⁴⁾ wird ebenfalls das Werk des DIOKLES erwähnt. ABŪ GA'FAR AL CHĀZIN⁵⁾ hatte in der ersten Maqāla seines

1) OMAR AL KHAYYAMI S. XIII. Die von ihm erwähnte Handschrift ist in Paris, *Catalogue* von DE SLANE no. 2457, 44. 2) HEIBERG, a. a. O. 3, S. 67 ff.

3) Zeitschr. für Mathem. 28, 1883, Hist. Abt. S. 128,

4) cod. 14; Katalog Bd. 3, S. 52.

5) ca. 1000 SUTER, Abhand. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 10, 1900, no. 124 S. 58.

Werkes „Tabellen für die Scheiben“ zwei Probleme aufgestellt, denen er eine weitschweifige Lösung beigelegt hatte. Der anonyme Verfasser des vorliegenden Traktates hat sie in einfacherer Weise gelöst; er fügt zwei Bemerkungen über denselben Gegenstand hinzu mit dem Titel: Was PHILON der Byzantiner sagt, und was hierüber DIOKLES in seinem Werk über die Brennspiegel sagt. (So sind die Dozy unverständlich gebliebenen Namen zu lesen.)

Aus den uns erhaltenen Stellen ist nicht zu ersehen, daß DIOKLES außer den parabolischen Hohlspiegeln auch die sphärischen behandelt hat.

Die von den Völkern des klassischen Altertums gewonnenen Resultate wurden von den muslimischen Gelehrten übernommen und zum Teil weitergeführt.

Eine ganze Reihe von Notizen über die Brennspiegel, die sich bei arabischen Schriftstellern finden, hat der eine von uns zusammengestellt.¹⁾

Erhalten ist uns einmal ein kleiner dem ALEXANDER zugeschriebener Traktat²⁾ über einen bis auf sehr große Entfernungen brennenden Spiegel. Er besteht aus zahlreichen (20) ebenen Spiegeln, die genau zusammengesetzt werden. Das Ganze erhält die Gestalt einer Mütze („Bartāl“). (Vgl. dazu S. 235.)

Wie sonst um die Optik, so hat sich um die Lehre von den Brennspiegeln IBN AL HAITAM in ganz hervorragendem Maße verdient gemacht. Die Titel der von ihm nach seinen eigenen Angaben verfaßten optischen Schriften³⁾, in denen sich Angaben über die Brennspiegel finden dürften, sind:

1. Analyse der optischen Wissenschaft, wie sie in den Werken des EUKLID und PTOLEMAEUS sich findet; ich habe sie ergänzt durch die Hauptbegriffe des ersten verlorenen Buches des Werkes von PTOLEMAEUS (S. 162 Nr. 5).

2. Abhandlung über die Brennspiegel, die sich von dem unterscheidet, was ich bei der Analyse der beiden Bücher von EUKLID und PTOLEMAEUS über die Optik gesagt habe (S. 170 Nr. 18).

3. Abhandlung über die Optik nach der Methode des PTOLEMAEUS (S. 173 Nr. 27).

4. Abhandlung über die kreisförmigen Brennspiegel (S. 172 Nr. 18).

5 Über die Brennspiegel, die Kegelschnitten⁴⁾ entsprechen (S. 172 Nr. 19).

1) E. WIEDEMANN, Sitzungsber. der phys.-mediz. Sozietät in Erlangen 37, 1906, S. 402.

2) Gotha, Katalog von PERTSCH Nr. 1348 und Paris, Katalog von DE SLANE Nr. 2825. Steht auch in dem ALEXANDER zugeschriebenen Werk von den Listen und Kriegen (Leyden Katalog Bd 3 S. 290).

3) Die Zitate beziehen sich auf E. WIEDEMANN, IBN AL HAITAM, Festschrift für J. ROSENTHAL, Leipzig 1906.

4) Es heißt nicht „die der Parabel entsprechen“, doch ist wohl nur diese gemeint.

6. Über die Optik (S. 171 Nr. 3) (es ist das bekannte von RISNER herausgegebene große Werk).¹⁾

Aus den Titeln der Abhandlungen 1 und 2 können wir schließen, daß IBN AL HAITAM bei der Behandlung der kugelförmigen Hohlspiegel sich zunächst der irrigen Anschauung des EUKLID über die Lage des Brennpunktes angeschlossen hat und erst später zu der richtigen Auffassung gelangt ist.²⁾

IBN AL HAITAMS Schrift über die Kegelschnitt-(parabolischen) Hohlspiegel ist uns sowohl arabisch als auch in lateinischer Übersetzung handschriftlich erhalten (vgl. hierzu unten S. 208). Weiter ist sie zum Teil von GOGAVA gedruckt (vgl. S. 231) und endlich hat sie R. BACO als Grundlage zu seinen Arbeiten gedient.

Von dem arabischen Text sind, soweit mir (E. W.) bekannt, zwei Handschriften vorhanden. Die eine in London India Office Nr. 734⁵, die ich Dank der Güte von Herrn Professor ROST und Herrn Professor W. T. ARNOLD wiederholt benutzen konnte. Sie ist bei der folgenden Vergleichung mit dem lateinischen Text und bei der Übersetzung zugrunde gelegt. Die andere ist in Leyden.³⁾ Die Herren Professor Dr. GOEJE und Dr. JUYNBOLL waren so gütig, nachzusehen, ob ihr Inhalt mit dem der Londoner übereinstimmt, was in der Tat der Fall ist. Letzterer hat mit gewohnter Liebenswürdigkeit noch ein paar spezielle Stellen verglichen.

Um das Verständnis des Textes zu erleichtern, bzw. dessen Inhalt auch solchen, die des Lateinischen nicht mächtig sind, zugänglich zu machen, soll zunächst eine zum Teil gekürzte Übersetzung gegeben werden, bei der auch unsere moderne Formelsprache benutzt wird. Zu beachten ist, daß, wie alle Arbeiten von IBN AL HAITAM, so auch diese äußerst breit geschrieben ist.

II. Übersetzung der Schrift über parabolische Hohlspiegel.

Im Namen Gottes des Allbarmherzigen. Meine Leitung ist nur bei Gott.

Abhandlung von AL HASAN BEN AL HASAN BEN AL HAITAM
über die Brennspiegel nach Kegelschnitten.⁴⁾

Zu dem Erhabenen, was die Geometer erfanden, und nach dem die Alten leidenschaftlich beehrten, und in dem das Erstaunliche (badī') der

1) Eine Untersuchung, wie sich der von RISNER zugrunde gelegte Text zu dem uns arabisch erhaltenen Kommentar von KAMAL AL DİN AL FĀRISĪ verhält, erscheint in dem Archiv für Geschichte der Naturwissenschaft und Technik.

2) Vgl. hierzu S. VOGL, *ROGER BACO*, Inauguraldiss., Erlangen 1906, S. 67.

3) Cod. 161 (3) Gol. Nr. 1010 des Katalogs.

4) Es heißt eigentlich nur qutū' „Schnitte“.

geometrischen Figuren zur Erscheinung kommt und was an ihnen an natürlichen Dingen eintritt¹⁾, gehört die Herstellung (Iṣṭinâ²⁾ der Spiegel, die durch die Reflexion³⁾ (In'ikâs) der Sonnenstrahlen brennen. Sie gingen bei ihrer Erfindung (Herstellung, Ittichâd) verschiedene Wege. Sie fanden, daß der Strahl von der Fläche des ebenen Spiegels und ebenso daß er von den Flächen der kugelförmigen Spiegel reflektiert wird; dabei sind die Orte, zu welchen der Strahl reflektiert wird, verschieden entsprechend der Verschiedenheit ihrer Größe. Indessen hatten sie deutlich erkannt, daß der Strahl, welcher von dem ebenen Spiegel zu einem Punkt reflektiert wird, nur von einem Punkt reflektiert wird, und daß der, welcher von einem kugelförmigen Spiegel [zu einem Punkt] reflektiert wird, nur von dem Umfange eines der Kreise, die auf dieser Kugel liegen, reflektiert wird.

Die Beweise hierfür sind in ihren Werken evident. Der Plan einer Anzahl von ihnen war, zahlreiche ebene Spiegel herzustellen, von denen einer an den anderen gefügt war und die alle den Strahl zu einem Punkt reflektierten⁴⁾; einige beabsichtigten, kugelförmige Hohlspiegel zu konstruieren, unter diesen waren solche, die zahlreiche kugelförmige Hohlspiegel konstruieren wollten⁵⁾, deren Strahlen zu einem Punkt reflektiert wurden, damit das Brennen kräftiger sei. Die diese Spiegel erfanden, waren berühmt wie ARCHIMEDES, ANTHEMIUS und andere als diese beiden. Dann dachten sie über die Eigenschaften der Figuren nach, von denen der Strahl reflektiert wird, und betrachteten daher [auch] die Eigenschaften der Kegelschnitte.⁵⁾ Sie fanden, daß die konkave Fläche des Paraboloides die Strahlen von ihrer ganzen Fläche zu ein und demselben Punkt reflektiert. Es ist daher klar, daß das Brennen, welches bei einem Spiegel, der diese Gestalt hat, eintritt, stärker ist als das Brennen aller Spiegel, welche eine andere Gestalt haben. Sie erläuterten, aber nicht genügend, den Beweis mit Bezug auf diesen Sachverhalt (Ma'na) und den Weg,

1) Im arabischen Text steht in beiden Handschriften „‘anhâ“; man müßte dann übersetzen: „was von ihnen von den Naturerscheinungen abweicht“. Man muß aber wohl korrigieren „minhâ“.

2) Wörtlich die Umkehrung (lat. conversio). Wir wollen „In'ikâs“ und das entsprechende „In'itaf“ stets mit „reflektiert werden“ übersetzen, selbst wenn es sich nur um Linien handelt, die an einer Stelle ihre Richtung ändern. Auch IBN AL HAṬṬAM benutzt dasselbe Werk in beiden Bedeutungen; vgl. dazu die Definitionen bei AL FĀRĀBĪ (E. WIEDEMANN, Sitzungsber. der phys.-mediz. Sozietät in Erlangen 89, 1907, S. 88). Das lateinische Wort Sectio bedeutet „Stück“ und „Parabel“.

3) Vgl. oben (S. 204) den Spiegel des „Alexander“.

4) Es sind eigentlich Ringe aus sphärischen Spiegeln (s. die zweite Abhandlung).

5) „Machrūt“ wird, wie das auch sonst geschieht, im lateinischen Text mit „Pyramide“ übersetzt.

durch den sie diese Entwicklung fanden. Bei den sehr großen Nutz-
anwendungen und dem allgemeinen Nutzen, die darin liegen, beabsichtigen
wir, die Sache zu erläutern und auseinanderzusetzen, damit es die Wissen-
schaft dessen umfasse, der eine Sehnsucht nach der Kenntnis der Wahr-
heiten hat und daß es der weiß, dessen Streben nach der Kenntnis der
Anwendungen geht.

Wir haben es in dieser Abhandlung auseinandergesetzt und haben
den Beweis entsprechend der Wissenschaft als Wahrheit dargelegt und
den Weg zur Ausführung einer Konstruktion und der Zusammensetzung
des Instrumentes angegeben. Wir haben ferner die Prinzipien, welche
die Geometer bei allen Arten der Spiegel anwandten, vorausgeschickt,
damit dahin gelangt, wer es dringend erstrebt und jeder es erreicht, der
es beabsichtigt.

Praemissen, über die Übereinstimmung herrscht. Der Strahl
der Sonne geht nach den Flächen aller Arten von Spiegeln [wie]
zu allen Körpern auf geraden Linien und alle Strahlen, die auf ebene
Spiegel fallen, werden von den Flächen der Spiegel unter gleichen
Winkeln reflektiert. Und alle Strahlen, die auf die Hohlspiegel fallen,
werden unter gleichen Winkeln reflektiert, und zwar von den ebenen
Flächen, die diese Flächen in dem Punkte berühren, auf den der Strahl
fällt. Ich verstehe unter dem unter gleichen Winkeln reflektierten Strahl,
daß der reflektierte Strahl mit einer geraden Linie, nämlich der gemein-
samen Schnittlinie zwischen der Ebene der beiden geraden Linien, d. h.
den beiden Strahlen, und der ebenen Tangentialfläche an der Spiegel-
fläche oder an dem Hohlspiegel zwei gleiche Winkel einschließt. Und
die geraden Linien, welche zu den Flächen sämtlicher Arten von Spiegeln
gelangen und nach gleichen Winkeln reflektiert werden, sei es von den
Flächen der ebenen Spiegel, sei es von den Flächen, welche die Hohl-
spiegel berühren, nämlich die Linien, welche nach der Art der reflek-
tierten Strahlen reflektiert sind, sind die Strahlen, welche [auf diesen
Linien fortschreiten und]¹⁾ wiederum nach diesen Linien reflektiert
werden.

Unter der eine konkave Fläche berührenden ebenen Fläche verstehe
ich die Fläche, die mit der konkaven Fläche nur einen einzigen ge-
meinsamen Punkt hat.

Unter der Fläche der reflektierten Linie und des reflektierten Strahles
verstehe ich die Fläche, in welcher jene zwei Linien liegen, nämlich die Linie
selbst und die Linie, die mit ihr einen Winkel bildet [d. h. die reflektierte].

Beweis für die beabsichtigte Sache (al Ma'an al maqsûd).

1) Fehlt im Lateinischen.

1. Ziehen wir die Achse (den Pfeil) (dh) irgendeiner Parabel und tragen wir von dem Scheitel a ein Viertel der senkrechten Seite (des Parameters¹⁾ L) $= ae$ ab; wird ferner eine Linie innerhalb der Parabel parallel zur Achse gezogen, trifft sie auf die Parabel in Punkt b und wird sie zu dem Punkt in $\frac{1}{4}L$ reflektiert, so bilden die beiden Linien mit der Tangente an den Schnitt an dem [Reflexions]punkt zwei gleiche Winkel.²⁾

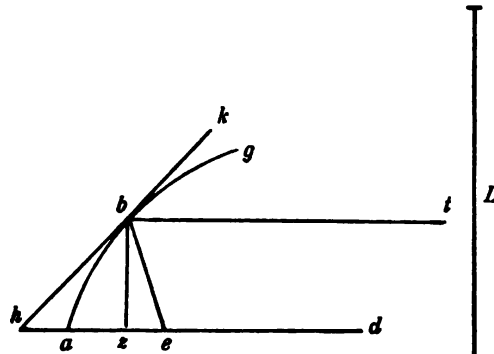


Fig. 1.

Es sei z. B. abg die Parabel, ad ihre Achse, L ihr Parameter. Man trägt auf ad eine Linie $ae = \frac{1}{4}L$ ab und zieht $tb \parallel da$, verbindet b und e und zieht eine Tangente $k b h$. Ich sage, daß

$$\sphericalangle t b k = \sphericalangle e b h.$$

Der Winkel $b e h$ sei zunächst ein spitzer [Fig. 1].

Nach der Methode der Analyse werde angenommen, daß

$$\sphericalangle t b k = \sphericalangle e b h.$$

Da $tb \parallel da$, so ist $\sphericalangle t b k = \sphericalangle b h e$.

Nun ist $\sphericalangle t b k = \sphericalangle h b e$, also $\sphericalangle h b e = \sphericalangle b h e$.

Daher ist $b e = e h$ und $b e^2 = e h^2$.

Wir ziehen $b z$ als Lot auf die Achse, dann ist

$$e z^2 + z b^2 = e h^2.$$

Nun ist $b z^2 = a z \cdot L$, wie APOLLONIUS, der Treffliche, in seinem Werke über die Kegelschnitte gezeigt hat; dabei ist

$$e z^2 + a z \cdot L = e h^2.$$

Nun ist $ea = \frac{1}{4}L$, also ist $4 a z \cdot ae = a z \cdot L$.

Daher ist $4 a z \cdot ae + z e^2 = e h^2$.

1) Der Parameter L heißt: „die senkrechte Seite“. Es ist $y^2 = Lx$, jetzt verwendet man meist die Gleichung in der Form $y^2 = 2px$, so daß $L = 2p$ ist.

2) Der Satz wird gesondert für die drei Fälle bewiesen, nämlich daß der Winkel zwischen be und der Achse ein spitzer, ein rechter und ein stumpfer ist, und zwar jedesmal nach zwei Methoden. Einmal nach der Methode der Analyse (Tariq al Tahlil); dabei wird angenommen, daß die beiden Winkel bei b gleich sind, und dann aus einer hieraus abgeleiteten Eigenschaft der Tangente an der Parabel gezeigt, daß die Linie, für die die Gleichheit der Winkel eintritt, die Tangente ist. Der zweite Beweis wird nach der Methode der Synthese (Tariq al Tarkib) gegeben. Dazu wird die Tangente gezogen und dann gezeigt, daß die beiden betreffenden Winkel einander gleich sind.

Daher ist¹⁾ $ah = az$.

Das ist aber der Fall, da bh eine Tangente ist und $bz \perp dh$.

2. Nach der Methode der Synthese. Ich sage, daß $\sphericalangle tbk = \sphericalangle ebh$ ist.

Beweis: Wir ziehen bz , wie vorgeschrieben. Da bh die Parabel berührt und $bz \perp dh$, so ist $az = ah$. Daher ist

$$4ea \cdot az + ez^2 = eh^2.$$

Es ist aber $ea = \frac{1}{4}L$. Daher ist $4ae \cdot az = L \cdot az$.

Also ist $L \cdot az + ez^2 = eh^2$.

Nun ist aber $L \cdot az = bz^2$, da bz senkrecht steht;

daher ist $bz^2 + ez^2 = eh^2 = eb^2$.

Also ist $eb^2 = eh^2$.

Also $eb = eh$.

Daher ist $\sphericalangle ebh = \sphericalangle ehb$.

Nun ist $tb \parallel da$,

also ist $\sphericalangle ebh = \sphericalangle tbk$.

Dasselbe ist bei jeder Linie der Fall, die parallel zur Achse gezogen wird, zu dem Punkte e reflektiert wird und mit ea einen spitzen Winkel bildet. Das ist, was wir beweisen wollten.

3. Wir verwenden dieselbe (analoge) Figur. be möge mit ea einen rechten Winkel [Fig. 2] bilden. Ich sage, daß

$$\sphericalangle tbk = \sphericalangle ebh.$$

Nach der Methode der Analyse mache ich die beiden Winkel gleich. Da $tb \parallel ad$ ist, so ist $\sphericalangle tbk = \sphericalangle ehb$. Nach der An-

nahme ist $\sphericalangle tbk = \sphericalangle ebh$, also ist $\sphericalangle ebh = \sphericalangle ehb$, also ist $eb = eh$ und $eb^2 = eh^2$.

Nun ist aber $eb^2 = ea \cdot L$ (L ist der Parameter, da $be \perp hd$).

Daher ist $ea \cdot L = eh^2$.

Es ist aber $ea \cdot L = \frac{1}{4}L^2$, da $ea = \frac{1}{4}L$.

Also ist $eh^2 = \frac{1}{4}L^2$.

Also $eh = \frac{1}{2}L$.

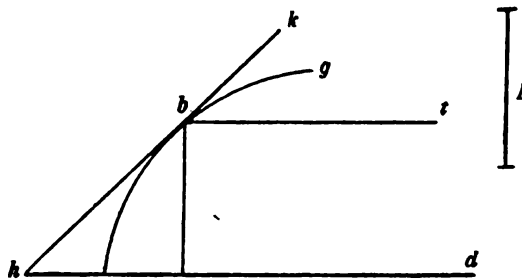


Fig. 2.

1) Nach APOLLONIUS gilt eben die Beziehung $ah = az$ für den Fall, daß bh eine Tangente ist.

Demnach ist $ea = ah$.

4. Nach der Methode der Synthese. Wir zeichnen die Figur wie
er.

Beweis. Da bh eine Tangente an die Parabel ist und $be \perp hd$, so ist $ae = ah$; es ist aber $ea = \frac{1}{4}L$, daher ist

$$eh = \frac{1}{9}L,$$

$$eh^2 = \frac{1}{4} L^2.$$

Daher ist $ea \cdot L = eh^2$.

Daher ist $eb^2 = eh^2$

und $eb = eh$.

Daher ist $\sphericalangle ebh = \sphericalangle ehb$.

Und da $tb // de$, so ist $\nexists tbk = \nexists ehb$.

Also auch $\nless tbk = \nless ebh,$

und das wollten wir beweisen.

5. Wir zeichnen eine entsprechende Figur. Es sei der $\angle beh$ ein stumpfer [Fig. 3].

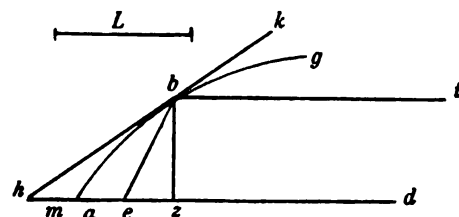


Fig. 3.

Ich sage nun, daß $\nless tbk = \nless ebh$.

Nach der Methode der Analyse

setze ich voraus, daß dies der Fall ist.
Da $tb // dh$ ist, so ist

$$\nabla tbk = \nabla ehb.$$

Nach der Voraussetzung ist aber

$$\nless tbk = \nless ebh.$$

Also ist $\sphericalangle ebh = \sphericalangle ehb$.

Also ist $eb = eh$ und $eb^2 = eh^2$.

Ich ziehe $bz \perp hd$.

dann ist $bz^2 + ez^2 = eh^2$ (zunächst $= eb^2$).

Es ist aber $bz^3 = az \cdot L$.

Also ist $az \cdot L + ez^2 = eh^2$.

Nun ist $ae = \frac{1}{4}L$.

Also ist $4az \cdot ae + ez^2 = eh^2$.

Ich mache nun. $am = ae$.

Dann ist $4az \cdot ae + ez^2 = zm^2 = eh^2$.¹⁾

Also $zm = eh$.

Ziehen wir das gemeinsame em ab, so bleibt

$$ez = mh.$$

Nun ist $ea = am$.

Also ist $az = ah$.

Dies ist aber der Fall, weil bh eine Tangente ist und $bz \perp hd$.

6. Nach der Methode der Synthese. Wir verwenden dieselbe Figur.

Ich sage, daß $\sphericalangle tbk = \sphericalangle ebh$.

Beweis. Ich ziehe $bz \perp hd$. Da bh eine Tangente an die Parabel ist und $bz \perp hd$, ist $az = ah$. Ich setze $am = ae$; es bleibt $ze = mh$.

Also ist $zm = eh$.

Daher ist $zm^2 = eh^2$.

Nun ist $4az \cdot ea + ez^2 = zm^2$.

Also $4az \cdot ae = az \cdot L$, da $ea = \frac{1}{4}L$.

Also ist $az \cdot L + ez^2 = eh^2$.

Nun ist $az \cdot L = bz^2$ (da bz senkrecht steht).

Also ist $bz^2 + ez^2 = eh^2$.

Es ist aber $bz^2 + ez^2 = eb^2$,

also ist $eh^2 = eb^2$ oder $eh = eb$.

Also ist $\sphericalangle ebh = \sphericalangle ehb$.

Nun ist $\sphericalangle ehb = \sphericalangle tbk$, da $tb \parallel dh$,

also ist $\sphericalangle ebh = \sphericalangle tbk$.

Dasselbe gilt für jede in dem Kegelschnitt gezogene Linie, die auf der Linie eh mit dem dem Scheitel folgenden Teil einen stumpfen Winkel bildet.

Jede Linie, die in dem Schnitt parallel zu deren Achse gezogen und zu dem Punkte e reflektiert wird, bildet mit der Tangente zwei gleiche Winkel, und das wollten wir beweisen.

7. Läßt man ein Stück einer Parabel, deren Achse festgehalten wird, sich drehen, bis sie wieder zu der Ausgangsstelle ihrer Bewegung angelangt ist, so entsteht ein runder (Rotations-) Körper, der in dem von ihm umgebenen Körper, was es für einer auch sein mag, eine konkave Fläche²⁾ erzeugt. Jede Ebene, die durch die Achse gelegt ist, schneidet die kon-

1) Nach EUKLID *Elem.* II, 8.

2) Gemeint ist die Fläche eines Hohlraumes.

kave Fläche in einer Parabel, deren Achse mit der der ersten Parabel zusammenfällt.

Beispielsweise sei [Fig. 4] abg das Parabelstück, seine Achse sei ad und die Linie gd stehe senkrecht auf ihr. ad wird festgehalten und das Stück abg so lange gedreht, bis es zur Ausgangsstelle zurückgekehrt ist; dann erzeugt seine äußere Fläche eine konkave Fläche, deren Basis der Kreis ez ist, der durch die Umdrehung des Punktes g erzeugt ist. Der Scheitel der Parabel ist a ; durch die Achse ad legen wir eine beliebige Ebene; sie schneide die

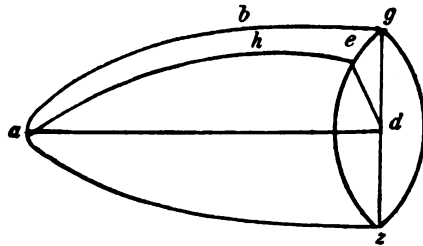


Fig. 4.

konkave Fläche in der Linie ahc . Ich behaupte, daß die Linie ahc eine Parabel ist gleich der Parabel $abgd$.

Dies wird folgendermaßen bewiesen. Wir verbinden e und d und denken uns zunächst das Stück $abgd$ um die Achse ad bewegt. Ist dann der Punkt g zu dem Punkte e gelangt, so fällt die Linie dg auf die Linie de und die ganze Oberfläche $abgd$ auf die ganze Oberfläche $ahed$, sie werden zu einer Oberfläche, da sie zwei gleiche Flächen sind. Da aber der Schnitt abg die konkave Fläche erzeugt, so ist die Linie $abgd$ stets, wohin man auch das Stück dreht, die gemeinsame Schnittlinie zwischen der konkaven Oberfläche und der Parabel. Legt man daher die Parabel $abgd$ auf $ahed$, so ist die Schnittlinie zwischen ihr und der konkaven Oberfläche die Linie abg . Sie war schon die Schnittlinie zwischen der Oberfläche, die ihr übergelagert ist und mit ihr eine Fläche bildet, und mit der konkaven Oberfläche war es die Linie ahc .¹⁾ Daher lagert sich die Linie abg auf die Linie ahc , sie bilden eine Linie. Und die ganze eine Oberfläche wird gleich der anderen Oberfläche. Daher ist die Linie ahc eine Parabel gleich der Parabel abg , und ihre Achse ist ad ; das ist, was wir beweisen wollten.

8. Trägt man in irgendeinem konkaven Paraboloid von dem Ende der Achse ein Viertel des Parameters der Parabel, die es erzeugt, ab, zieht man ferner eine Linie parallel zur Achse, die die konkave Oberfläche trifft, und wird diese zu jenem Punkte (dem Ende von $\frac{1}{4}L$) reflektiert, so entstehen zwischen der einfallenden und reflektierten Linie und der Tangente zwei gleiche Winkel.

Die erwähnte konkave paraboloidische Oberfläche [Fig. 5] habe als Scheitel a , als Basis den Kreis gez und als Achse ad , auf ihrer Achse

¹⁾ Nach dem arabischen Text übersetzt; es ist das Ganze sehr umständlich ausgedrückt.

werde eine Linie ah abgetragen, die gleich $\frac{1}{4}$ des Parameters der erzeugenden Parabel ist. Man zieht eine Linie tb parallel zur Achse; sie werde zum Punkt h reflektiert. Ich sage, daß die beiden Linien tb und bh mit der Tangente kl gleiche Winkel bilden.

Beweis. Da tb und da parallel sind, so liegen sie in einer Ebene. Die Linien bh und ad schneiden sich, daher liegen auch sie in einer Ebene, und zwar in der Ebene der beiden parallelen Linien. Ich ziehe nun die Oberfläche $btda$, bis sie die konkave Oberfläche sowie die diese berührende Ebene im Punkte b schneidet. Auf ihr entsteht eine Parabel, die gleich

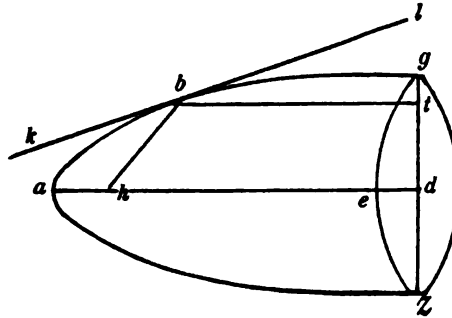


Fig. 5.

ist der Parabel, die sie erzeugt hat und die mit ihr dieselbe Achse hat, wie in der vorigen Proposition bewiesen wurde. Es sei der Schnitt $abgz$; weiter entsteht in der Tangentialebene eine gerade Linie, nämlich die Tangente kbl ; sie ist eine Tangente an die konkave Oberfläche, da sie sie nur in einem Punkte berührt. Ebenso berührt sie die Parabel, da sie sie nur in einem Punkte trifft. Da nun kbl die Parabel berührt und $ah = \frac{1}{4}L$ ist und tb parallel ad ist und nach h abgelenkt wird, so bilden die beiden Linien tb und bh mit der Linie kbl zwei gleiche Winkel, wie früher gezeigt ist. Daher bilden die beiden Linien tb und bh mit der die konkave Fläche berührenden Linie, d. h. der gemeinsamen Schnittlinie der Tangentialebene an die konkave Fläche und der Ebene der beiden Linien tb und bh , zwei gleiche Winkel. Ebenso ist klar, daß sich in derselben Weise verhält jede parallel der Achse verlaufende, auf die konkave Fläche treffende und zu dem Punkte h reflektierte Linie.

9. Stellt man dem Sonnenkörper irgendeine parabolische Hohlfläche gegenüber auf, so daß ihre Axe dem Sonnenkörper zugewandt ist, so gehen von dem Sonnenkörper zu ihrer ganzen Fläche Strahlen aus, die alle zu einem Punkt auf deren Achse reflektiert werden, dessen Abstand von dem Scheitel $\frac{1}{4}L$ der erzeugenden Fläche beträgt.

Zum Beispiel sei [Fig. 6 u. 7¹⁾] die paraboloidische konkave Spiegelfläche diejenige, deren Scheitel der Punkt a ist, deren Basis der Kreis gez ist, deren Achse ad ist, und bei der der Abstand des Punktes h vom Punkt a gleich $\frac{1}{4}L$ der erzeugenden Parabel ist. Man stellt sie der Sonne gegenüber, so daß die geradlinigt verlängerte Achse ad zum Punkte t ge-

1) Fig. 6 stammt aus dem Lateinischen, Fig. 7 aus dem Arabischen.

langt, der innerhalb des Sonnenkörpers gelegen ist. Ich sage nun, daß von dem ganzen Sonnenkörper zu der ganzen Fläche dieser Oberfläche Strahlen ausgehen, die zu dem Punkt h reflektiert werden.

Beweis: Da die Strahlen vom Sonnenkörper auf geraden Linien ausgehen, so geht der Strahl, der von t nach a geht, auf der Linie ta . Ich

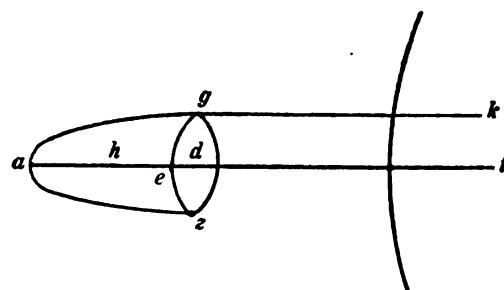


Fig. 6.

nehme nun auf der Oberfläche des Spiegels auf dem Umfang seiner Basis irgendeinen Punkt g und denke mir die von g ausgehende parallel zu at verlaufende Linie gezogen, nämlich gk ; verlängert man aber gk geradlinigt, so trifft sie auf den Sonnenkörper, da die Strecke, die zwischen ihr und at

liegt, eine kleine, im Verhältnis zu dem Sonnenkörper verschwindende Größe ist; sie fällt daher stets nahe an den Punkt t , der innerhalb des Sonnenkörpers

gelegen ist, etwa auf den Punkt k . Der Strahl, der von k zum Punkte g geht, geht längs der Linie

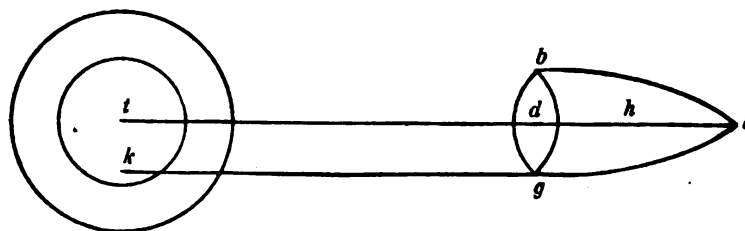


Fig. 7.

kg ; ebenso ist es mit jedem parallel der Achse verlaufenden Strahl.

Es ist gezeigt, daß von dem Sonnenkörper zu der ganzen Spiegelfläche parallel zur Achse verlaufende Strahlen gehen. Ich sage daher, daß alle diese Strahlen zu einem Punkte h reflektiert werden. Da $ages$ [Fig. 6] eine parabolische konkave Fläche ist, so bilden alle der Achse parallelen Strahlen, die an der Fläche nach dem Punkt h reflektiert werden, mit den Tangenten an der konkaven Fläche gleiche Winkel.¹⁾ Die Strahlen, welche von dem Sonnenkörper auf den der Achse parallelen Linien zu der ganzen konkaven spiegelnden Fläche gehen, werden auf jenen Linien abgelenkt, die dem Punkte h zustreben. Es ist derjenige, dessen Abstand vom Scheitel der Fläche gleich $\frac{1}{4}L$ ist. Das ist was wir beweisen wollten.

10. Nachdem dies gezeigt ist, will ich zeigen, wie wir einen Spiegel herstellen, der dieser Proposition (Figur) entspricht.

Wir nehmen eine Platte aus gutem Stahl von beliebiger Größe, wie die Platte $abgd$ [Fig. 8²⁾], ziehen auf ihr irgendeine Parabel aeg und schneiden die Platte längs der Linie aeg ab.

1) Das Folgende ist gekürzt. 2) In Fig. 8 steht im Arabischen Die viereckige Platte.

Wie man aber die Parabel und andere [Kegel]schnitte mittels des Instrumentes findet, hat eine große Zahl von Geometern angegeben; sie haben sie (die Kegelschnitte) nicht der Wahrheit (Richtigkeit) gemäß herausgebracht; wir haben aber in einer Maqâla (Abhandlung)¹⁾, in der wir die Konstruktion aller Kegelschnitte mit Hilfe des Instrumentes behandeln, gezeigt, wie wir einen beliebigen Kegelschnitt entsprechend seiner Wahrheit (Richtigkeit) konstruieren, so daß man in der Materie²⁾ keinen richtigeren finden kann, wie dies bei der Konstruktion des Kreises (Dâira) mit dem Zirkel (Birkâr) der Fall ist; und wenn dies so ist, übertrifft er seine Vorlage (Maschq), dabei kann er einen beliebigen Durchmesser (Quṭr) haben, ferner der Winkel der Ordinate³⁾ irgendein beliebiger, der Parameter irgendeine Linie und das abgeschnittene Stück irgendein beliebiges sein; sei es, daß wir das Stück haben wollen, das am Scheitel liegt, sei es, daß wir ein Stück aus der Mitte der Parabel wollen, dessen Abstand von dem Scheitel ein beliebiger ist.

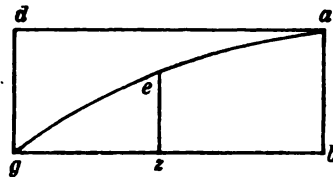


Fig. 8.

Aus jener Abhandlung ergibt sich, wie wir auf der Platte die Parabel konstruieren; würde ich mich nicht davor scheuen, dieses Buch gar zu lang zu machen und etwas in es einzufügen, das nicht zu ihm gehört, so würde ich es an diesem Orte mitteilen. Ich habe es aber an seinem Orte gesagt; wenn Gott will.

Wir zeichnen daher auf der Platte $abgd$ [Fig. 9⁴⁾] ein Stück der Parabel, nämlich aeg und schneiden längs derselben die Platte ab. Dann schärfen wir ihren Rand zu, so daß sie alles abschabt, über das sie sich hinbewegt. Wir nehmen ferner eine andere Platte aus Stahl von geringer Dicke und schneiden sie entsprechend derselben Parabel aus; dann wird

1) Unter den Schriften von IBN AL HAITAM wird folgendes Werk aufgeführt: Werk über den Zirkel der Kegelschnitte, zwei Abhandlungen (siehe E. WIEDEMANN, Festschrift für J. ROSENTHAL, S. 172); beschäftigt hat er sich mit ihm wohl auch in der Abhandlung über die gute Ausführung des Grabens und Bauens, in der er auch die Anwendung der Kegelschnitte bespricht. Über einige solcher Kegelschnittzirkel haben F. WÖPCKE und der eine von uns (siehe E. WIEDEMANN, Zeitschrift für Vermessungswesen 39, 1910) gehandelt, wo sich auch die genaue Beschreibung der von IBN AL HAITAM zur Konstruktion großer Kreise verwandten Zirkel findet.

2) „Mâdda“ „Materie“ ist hier wohl im Gegensatz zu der Idee gesetzt, IBN AL HAITAM meint, daß sich der wirklich konstruierte Kreis usw. dem mathematischen Ideal so vollständig wie möglich nähert.

3) Bei der Parabel unterscheidet man zwei Linien, 1. die Achse („Quṭr“), 2. die Linien, welche die Achse und die Parabel in zwei Punkten schneiden „Ḥaṭṭ Tartīb li Quṭr“ (vgl. dazu E. WIEDEMANN, Sitzungsber. der phys.-mediz. Sozietät in Erlangen 40, 1908, S. 11).

4) Die Figur ist eigentlich überflüssig.

ihre hohe Kante zu einer Feile ziseliert (graviert), so daß sie Eisen feilt. Hierauf nehmen wir einen konkaven Spiegel aus Stahl von beliebiger

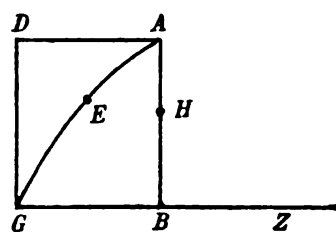


Fig. 9.

Höhlung, nur muß diese nahezu gleich derjenigen sein, die wir haben wollen. Ist das gezeichnete Stück [Fig. 10] ein solches, das dem Scheitel nahe wie *aegb* [Fig. 8 bzw. 9] liegt, so erhalten wir einen Spiegel von der Gestalt eines halben Eies [Fig. 11 u. 12]. Ist das gezeichnete Stück aus dessen Mitte wie *aezb* [Fig. 8 u. 13], so fertigen

wir alle Bleche nach der Figur des Stückes *aezb* an und machen das eine scharf und das andere zu einer Feile, dann erhalten wir einen Spiegel von der Gestalt eines Ringes¹⁾ [Fig. 14 u. 15]. Dann verwenden wir jene Feile



Fig. 10.

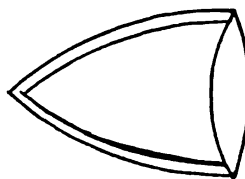


Fig. 11.

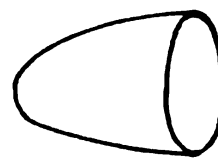


Fig. 12.

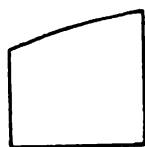


Fig. 13.

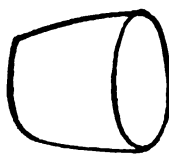


Fig. 14.

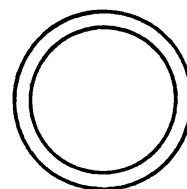


Fig. 15.

zum Aushöhlen des Spiegels, bis die Feile der ganzen Oberfläche des Spiegels sich anschließt. Haben wir das vollendet, so befestigen wir den Spiegel auf der Drehbank²⁾ (al Schohr) mit Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises, der seine Basis bildet und seinen [des Spiegels] Scheitel, wenn er eiförmig ist, und den Mittelpunkt des anderen Kreises, wenn er ringförmig ist,³⁾ und wir drehen (drechseln charat), wie man die [astro-

1) Im Arabischen steht in Fig. 10: „Platte von dem Scheitel des Schnittes“; in Fig. 13: „Platte aus der Mitte des Schnittes“; in Fig. 11: „Spiegel, der von der Gestalt eines halben Eies ist“. Fig. 12 gibt die lateinische Figur wieder, in ihr steht: „speculum quod est secundum figuram oui“. In Fig. 14 steht im Lateinischen: „sp. q. e. sec. fig. anuli“. In Fig. 15, die im Lateinischen fehlt, steht: „der Spiegel, welcher die Gestalt des Ringes hat“.

2) Im Lateinischen steht *assor*; es ist offenbar das arabische „al Schohr“. Dies Wort kommt bei der Herstellung des Instrumentes zur Bestimmung des Brechungsindex in der Optik von IBN AL HAITAM vor. Aus der Transskription ergibt sich auch die Vokalisierung des Wortes im Lateinischen.

3) Diese nicht ganz klare Stelle soll wohl aussagen, daß die Achse der Drehbank durch Scheitel und Mittelpunkt bzw. durch die Mittelpunkte der beiden Basen geht.

nomischen] Instrumente dreht, bis der Rand [der Feile] sich dem ganzen Spiegel anschließt, und alles, was sich in ihm an Rauigkeit befindet, entfernt ist und er so glatt wie möglich wird. Geschieht dies, so wird seine Oberfläche die des Paraboloides; es ist die Gestalt, die wir haben wollen. Dann wird er poliert und benützt, und das ist seine Gestalt.

Das ist die Gesamtheit der Rede über den Hohlspiegel, der die Gestalt des Paraboloides hat.

11. Wollen wir aber einen konkaven Brennspiegel haben, der in einem beliebigen Abstand brennt, wobei aber der Abstand nur längs der Achse genommen werden soll, und wollen wir, daß der Spiegel die Gestalt eines Eies habe, so nehmen wir eine Stahlplatte [Fig. 16] wie abg , zeichnen eine gerade Linie wie bg und denken uns, der gesuchte Abstand sei zg ; wir zeichnen auf der Platte das Parabelstück, das sich an den Scheitel anschließt, wie ae , wobei g der Scheitel und gb die Achse und der Parameter gleich $4gz$ ist. Wir haben schon vorausgeschickt, daß wir gesagt haben, wie man jene Parabel findet, da, wo von der Anwendung der Kegelschnitte gehandelt ist [s. oben]. Haben wir in dieser Weise auf

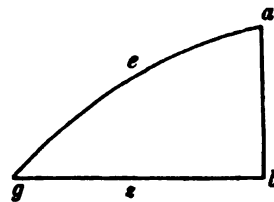


Fig. 16.

der Platte das Stück ae gefunden, so ist zg gleich $\frac{1}{4} L$. Es ist aber bereits gezeigt worden, daß alle Strahlen, die auf einen Spiegel fallen, der aus dem Schnitt ae hergestellt wird, nach dem Punkt z reflektiert werden. Der Abstand des Punktes z ist aber der gegebene Abstand. Das Brennen des eiförmigen Spiegels, der aus dem Schnitt ae hergestellt ist, findet aber im Punkt z statt, dessen Abstand vom Spiegel der gegebene Abstand ist. Wir konstruieren daher aus dem Stück ae den Spiegel von der Gestalt des Eies nach der vorher erwähnten Methode, und sein Brennen findet in dem gegebenen Abstand statt.

12. Soll der Spiegel die Gestalt eines Ringes haben, so nehmen wir eine entsprechende Platte [Fig. 17] und ziehen auf ihr eine gerade Linie wie bg und machen die gerade Linie, wie es sich gerade trifft, gleich der Linie h und fügen sie zu dem Abstand (α) hinzu, in dem wir wollen, daß in ihm das Brennen stattfindet.

Wir ziehen auf der Platte ein Stück aus der Mitte der Parabel, deren Achse bg ist, und deren Vierfaches der Parameter $L = 4h$ ist. Der Abstand der Parabel von dem Scheitel aus sei gleich $h + \alpha$. Wir haben

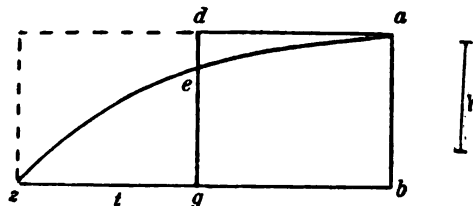


Fig. 17.

die Konstruktion dargelegt in unserem Werke über die Konstruktion der Kegelschnitte; zeichnen wir in dieser Art aus einer Parabel das Stück ae ,

denken wir uns die Linie bg geradlinigt verlängert und ebenso das Stück ae , so trifft es die Achse auf dem Punkt z ; wir nehmen ferner $tz = h$. Da aber aez eine Parabel ist mit der Achse bz und dem Parameter $L = 4tz = 4h$, so ist $tz = \frac{1}{4}L$, dann werden alle Strahlen, die auf einen Spiegel fallen, der aus irgendeinem Stück des Schnittes aez genommen wird, nach dem Punkt t reflektiert. Da aber der Abstand von ae von dem Scheitel gleich dem gegebenen Abstand $\alpha + h$ und $tz = h$ ist, so bleibt $gt = \alpha$. Daher erfolgt das Brennen eines ringförmigen Spiegels, der aus dem Schnitt ae hergestellt ist, bei dem Punkt t , dessen Abstand von dem Spiegel der gegebene α ist.

Stellen wir daher aus dem Schnitt einen Spiegel in der früher geschilderten Weise her, so findet sein Brennen in dem gewünschten Abstand statt.

Diese Rede umfaßt alle Verfahren, die sich auf die Brennspiegel beziehen, die nach dieser Gestalt hergestellt sind; sie brennen kräftiger als alle anderen Spiegel, weil die Strahlen von der ganzen Oberfläche zu einem Punkte reflektiert werden.

Und das ist, was wir uns in diesem Buch vorgenommen haben.

Vollendet ist die Rede über die Brennspiegel und Lob sei Allah. Es betet Allah über Muhammed und seine Familie und spendet seinen vielfachen Gruß.

III. Text der lateinischen Übersetzung nebst Bemerkungen.

Liber de speculis comburentibus.

De subtiliori, quod geometre inuenerunt, et in quo antiqui solliciti fuerunt, et in quo bonitas proprietatum figurarum geometricarum apparet, et quod ab eis accidit ex rebus naturalibus, est fabricatio speculorum
 5 comburentium per conuersionem radii solaris. inceserunt ergo in inueniendo ea modis diuersis, et illud est, quoniam ipsi inuenerunt, radium conuerti ex superficiebus speculorum planorum, et inuenerunt ipsum iterum conuerti ex superficiebus speculorum spericorum, et diuersificauerunt
 10 loca, ad que conuertitur radius, secundum quantitatem diuersitatis quantatum eorum. uerumptamen declaratum est eis, quod radius, qui con-

2. *subtiliori*] OA, *sublimiori* BDPdp. 10. *uerumptamen*] AdP, m. 1 O; *uerumtamen* BD, e corr. O.

Arab. 1. Nach *comburentibus* hinzugefügt: nach Kegelschnitten. Der Titel heißt im Arabischen *مقالة للحسن بن الحسن بن الهيثم في المرايا المحركة بالقطع*
 5. *conuersionem*] Reflexion (entsprechend immer). 7. *specula plana*.

uertitur a speculo plano, ad punctum unum non conuertitur nisi ex uno puncto tantum, et ille, qui conuertitur ex speculo sperico, non conuertitur nisi ex circumferentia unius circularum, qui cadunt in illa spera. et demonstrationes super illud manifeste sunt in libris eorum. intentio ergo quorundam eorum fuit ad inueniendā specula plana pluris numeri adinuicem 5 adiuncta, ex quibus omnibus conuertetur radius ad punctum unum, et intenderunt quidam ad sumendum specula sperica concaua, et ex eis fuerunt quidam, qui assumpserunt specula plurima sperica, quorum radii conuerterentur ad punctum unum, ut combustio fortior esset, et illi, qui inuenerunt specula ista, famosi fuerunt, sicut ARCHIMENIDES et ANTHIMUS 10 et alii ab istis duobus. deinde accidit eis cogitatio in proprietatibus figurarum, ex quibus conuertitur radius. aspexerunt ergo in proprietatibus sectionum pyramidum et inuenerunt, radios, qui cadunt super omnem planitiem superficiei concaue corporis mukefi conuerti ad punctum unum eundem. manifestum est igitur, quod combustio, que fit ex speculo, quod 15 est secundum hanc figuram, fortior est combustionē omnium speculorum, que sunt secundum figuram aliam ab hac. uerumptamen ipsi non exposuerunt demonstrationem super hanc intentionem neque uiam, qua inuenerunt, expositione sufficiente. sed propter illud, quod est in hoc de commoditatibus magnis et utilitatibus communibus, uidi, ut exponerem 20 illud et explanarem, quatinus contineret scientiam eius, cuius uoluntas est in cognitione ueritatum, et sciret illud, cuius sollicitudo est in uelocitatibus rerum. declarauī ergo in hoc tractatu et abbreviaui demonstrationem super scientia ueritatis eius et dixi uiam operationis in assumptione eius et ordinem instrumenti ipsius et premisi radices, quibus usi sunt geometre 25 in omnibus speciebus speculorum, ut perueniat ad illud, qui ipsum querit, et comprehendat illud, qui conatur ipsum.

3. et] BDdP, e corr. O; om. A, m. 1 O. 5. pluris numeri] Ad, m. 1 O; plurima e corr. O, seq. ras. 4 litt. D; pluris uni BP. 9. conuerterentur] DdP, e corr. O; conuertentur A, conuertuntur B. 10. Archimēnides] ABD, anchimēnides d; Archimedes P, e corr. O. Anthimus] ABD, Anchinus d, Archinius P, Anthemus e corr. O. 15. quod est secundum] D, e corr. O; que est secundum P; qui secundum B; super Ad, m. 1 O. 17. uerumptamen] AdP, m. 1 O; ueruntamen BD, e corr. O. 20. comoditatibus ODD. 24. super] in ras. O. 26. qui ipsum querit] BDP, mg. O; quod ipsi querunt Ad, m. 1 O.

Arab. 3. et] und. 5. pluris numeri] zahlreich. 7. specula sperica concaua] المرايا الكرية المقعرة 10. Archimedes und Anthemius. 14. mukefi] mukâfi (= Parabel), corpus mukefi = المجسر المكافى 15. quod est secundum] so! 22. uelocitatibus rerum] الفصل المشترك بين... وبين 25. radices] Prinzipien. 26. qui ipsum querit] wer es dringend erstrebt.

Radices, super quas est conuenientia.

- 1 Radius solaris egreditur ex corpore solis ad superficies omnium specierum speculorum secundum lineas rectas;
- 2 et omnes radii cadentes super specula plana conuertuntur secundum
5 angulos equales ex superficiebus angulorum;
- 3 et omnes radii, qui cadunt super specula concaua et gibbosa, conuertuntur secundum angulos equales ex superficiebus ad superficies planas tangentes illas superficies super puncta, super que cadunt radii.
- 4 et significo per radium conuersum secundum angulos rectos, quod radius
10 conuersus continet cum linea recta, que est differentia communis inter superficiem duarum linearum rectarum, que sunt radius incidens et radius conuersus, et inter superficiem planam, que est superficies speculi aut superficies contingens specula concaua et gibbosa, duos angulos equales.
- 5 et radii, qui egrediuntur super lineas rectas, que perueniunt ad superficies
15 omnium speculorum et conuertuntur secundum angulos equales aut ex superficiebus speculorum planorum aut ex superficiebus contingentibus superficies speculorum concauorum et gibbosorum, scilicet linee, que conuertuntur secundum figuram radii conuersi, conuertuntur iterum super illas lineas.
- 6 et significo superficiem planam contingentem superficiem concauam
20 superficiem, inter quam et inter superficiem concauam est unum punctum tantum.
- 7 et significo superficiem lineae conuerse aut radii conuersi superficiem, in qua sunt ille due linee, que sunt ipsa linea et linea, cuius conuersio est, que cum illa continet angulum.

1. *Radices . . . conuenientia*] p, om. ABDOPd. 5. *angulorum* — 7. *superficiebus*] om. Ad. 7. *Ante ad* del. *angulorum* O. 10. *recta*] BDP, supra scr. O, om. Ad. 11. *incidens et radius*] om. BDdP, mg. m. 1 O. 13. *contingens*] DP, *continens* B, *contingentes* OAd. 16. *planorum*] bis O, sed corr. 19. *superficiem*] OAd, *per superficiem* BDp. 22. *superficiem*] OA, *per superficiem* BDPdp. 23. *linea* (pr.)] *linea id est radius* D, *linea id radius* BP, *linea* supra scr. *id est radius* m. 1 O. 24. Mg. D: *nouimus, quod sectio mukesi est figura, que terminatur (?) ex circumductione medietatis lineae curue terminantis superficiem secantem pyramidem iacentem super superficiem planam, cui superficies secans est equedistans, et cum hoc ex linea recta tamquam esset axis circumductionis illius curue lineae. et est talis figura, quod radius incidens super quodlibet punctum superficiei eius reflectitur ad unum punctum-uel ad lineam rectam.*

Arab. 1. Prämissen, worüber Übereinstimmung herrscht. 5. *angulorum*] fehlt. 6. *et gibbosa*] fehlt. 9. *rectos*] (falsch) gleiche. 10. *recta*] so! *differentia communis*] die gemeinsame Schnitlinie. 11. *que — conuersus*] welche sind die beiden geraden Linien der Strahlen. 13. *contingens*] so! *et gibbosa*] fehlt. 14. *et — rectas*] und die geraden Linien. 15. *omnium speculorum*] aller Arten Spiegel. 17. *et gibbosa*] fehlt. 18. Nach *conuersi* hinzugefügt: und die Strahlen, welche längs dieser Linien fortschreiten, und. 21. Nach *tantum*: gemeinsam. 23. *cuius conuersio est*] fehlt.

In omni sectione mukefi, cuius protrahitur sagitta, et separatur ab 1
extremitate sagitte, quantum est quarta lateris eius erecti, omnis linea
protracta equidistans sagitte et perueniens ad sectionem et alia conuersa
ad punctum, quod separat quartam, cum linea contingente sectionem
super illud punctum facit duos angulos equales. 5

[Fig. 1.] uerbi gratia sit sectio ABG sectio mukefi, et sit eius sagitta
 AD et latus eius rectum L . et secabo ex AD lineam AE equalem
quarte lineae L , et producam lineam TB equidistantem lineae DA et con-
tinuabo BE et protraham KBH contingentem. dico ergo, quod angulus
 TBK est equalis angulo EBH . 10

sit itaque in primis angulus BEH acutus. ergo secundum semitam
resolutionis ponam, ut angulus TBK sit equalis angulo EBH . et quoniam
linea TB est equidistans lineae DA , erit angulus TBK equalis angulo
 BHE . sed angulus TBK est equalis angulo HBE per positionem; ergo
angulus EBH est equalis angulo BHE . ergo linea BE est equalis 15
lineae EH ; ergo quadratum BE est equale quadrato EH . et protraham
 BZ perpendicularem super sagittam. ergo duo quadrata EZ , ZB sunt
equalia quadrato EH . sed quadratum BZ est equale multiplicationi AZ
in L , que est linea recta, sicut ostendit APOLLONIUS bonus in libro de
pyramidibus; ergo quadratum EZ et multiplicatio ZA in L sunt equalia 20
quadrato EH . sed EA est quarta L ; ergo multiplicatio ZA in AE
quater est multiplicatio ZA in L . ergo multiplicatio ZA in AE quater
et quadratum EZ sunt equalia quadrato EH . ergo AH est equalis ZA .
sed est ita, quoniam BH est contingens, et BZ est secundum ordinem.

Et secundum semitam compositionis ponam res omnes secundum 25
suam dispositionem, et dico, quod angulus TBK est equalis angulo EBH ;
cuius demonstratio est. quare protraham BZ secundum ordinem. et
quoniam BH est contingens sectionem et BZ secundum ordinem, erit
 AZ equalis lineae AH ; ergo multiplicatio EA in AZ quater cum qua-
drato EZ est equalis quadrato EH . sed EA est quarta L ; ergo multi- 30

1. Supra sagitta scr. id est axis D. 2. Supra linea scr. recta O. 4. cum] continent cum B; continet cum DP, e corr. O add. $\gamma\epsilon$. 5. Supra punctum add. id est contactus m. 1 O. facit duos] del. O, duos BDdP. 10. est] in hoc uocab. desin. d. 14. Post BHE add. per 2am partem 29 primi BP. 16. ergo — 19. est] magna ex parte renou. m. 2 O. 18. EH] EH per penultimam primi. ergo et EH BP. 19. linea recta] ABDP, m. 1 O; latus rectum e corr. O. bonus] ABDP, pergeus in ras. O. 23. ZA] ZA per conuersam 8, II BP. 29. AZ (pr.) in ras. O. 30. Ante EZ ras. 3—4 litt. O. equalis quadrato] -lis et -rato in ras. O. EH] EH per 8, II BP.

Arab. 1. Hier fängt prop. 1 an. 2. Hier Fig. 1, der aus O gegebenen genau entsprechend. 3. Nach sagitte: innerhalb des Schnittes. 4. cum — 5. facit] so! 14. BHE] BHD. per positionem] fehlt. 19. linea recta] latus rectum. bonus] so! 21. ergo — 22. L] fehlt.

plicatio EA in ZA quater est multiplicatio L in ZA . ergo multiplicatio L in ZA cum quadrato EZ est equalis quadrato EH . uerum multiplicatio L in ZA est quadratum BZ , quoniam BZ est secundum ordinem; ergo quadratum BZ et quadratum EZ sunt equalia quadrato EH . sed
 5 duo quadrata BZ , EZ sunt quadratum EB ; ergo quadratum EB est equale quadrato EH . ergo EB est equale EH ; ergo angulus EBH est equalis angulo EHB . et rursus TB equidistat DA ; ergo angulus TBK est equalis angulo EHB . ergo angulus EBH est equalis angulo TBK . et similiter omnis linea, que protrahitur equidistans diametro, et
 10 conuertitur alia ad punctum E , et continet cum EA angulum acutum. et illud est, quod declarare uolumus.

[Fig. 2.] Et firmemus, quod diximus, secundum dispositionem suam, et sit linea BE continens cum linea EA angulum rectum. dico ergo, quod angulus TBK est equalis angulo EBH . per resolutionem ergo
 15 ponam duos angulos equales. et quoniam linea TB equidistat lineae AD , erit angulus TBK equalis angulo EHB . sed angulus TBK per positionem est equalis angulo EBH ; ergo angulus EBH est equalis angulo EHB . ergo linea EB est equalis lineae EH ; ergo quadratum EB equale est quadrato EH . sed quadratum EB equale est multiplicationi EA in
 20 L , quod est latus rectum, quoniam BE est secundum angulos rectos. ergo multiplicatio EA in L est equalis quadrato EH . sed multiplicatio EA in L est quarta quadrati L , quoniam EA est quarta L ; ergo quadratum EH est quarta quadrati L . ergo linea EH est medietas lineae L . at linea EA est quarta L ; ergo AH est quarta L . ergo linea EA est
 25 equalis lineae AH . sed est ita, quoniam BH est contingens, et BE est secundum ordinem.

Et per compositionem ponam omnes res secundum dispositionem suam. dico ergo, quod angulus TBK est equalis angulo EBH ; cuius demonstratio hec est. quoniam linea BH est contingens sectionem, et BE
 30 est secundum ordinem, tunc linea AE est equalis lineae AH . sed EA est quarta L ; ergo EH est medietas L . ergo quadratum EH est quarta quadrati L . sed multiplicatio EA in L est quarta quadrati L , quoniam EA est quarta L ; ergo multiplicatio EA in L est equalis quadrato EH . sed multiplicatio AE in L est equalis quadrato EB , quoniam EB est

8. EHB] P , e corr. O ; EBH ABD . 9. *omnis*] *om.* A , e corr. O . 12. *finiemus* AD ; *funiemus* B , sed corr.; *sumemus* P . 15. *duos*] *duos* TBK et EBH BP .
 19. EA] *per Appollonium* EA BP . 22. *quoniam* — 23. *quadrati* L] *mg.* *m.* 1 O .
 22. *ergo* — 24. *quarta* L (*pr.*)] AO , *om.* BDP . 25. AH] AH *per conuersam 4 secundi* BP .

Arab. 9. *omnis*] *so!* *diametro*] der Achse, sagittae. 10. *alia*] fehlt. 12. Hier fängt prop. 3 an. 12. Fig. 2 wie die aus O gegebene. 20. *angulos rectos*] rechten Winkel. 23. EH (*alt.*)] BH . 27. Hier fängt prop. 4 an.

secundum ordinem. ergo quadratum EB est equale quadrato EH . ergo linea BE est equalis lineae EH . ergo angulus EBH est equalis angulo EHB . et quoniam linea TB equidistat lineae DH , erit angulus TBK equalis angulo EHB . et iam fuit angulus EBH equalis angulo EHB ; ergo angulus TBK est equalis angulo EBH . et illud est, quod uolumus. 5

[Fig. 3.] Et figamus res, quas diximus, secundum dispositionem suam, et sit angulus BEH expansus. dico ergo, quod angulus TBK est equalis angulo EBH . secundum partem ergo resolutionis ponam, ut illud sit ita. et quoniam linea TB equidistat lineae DH , erit angulus TBK equalis angulo EHB . sed angulus TBK per positionem est equalis angulo EBH ; 10 ergo angulus EBH est equalis angulo EHB . ergo linea EB est equalis lineae EH ; ergo quadratum BE est equale quadrato EH . et protraham BZ secundum ordinem; ergo quadratum BZ et quadratum EZ sunt equalia quadrato EH . sed quadratum BZ est equale multiplicationi AZ in L ; ergo multiplicatio AZ in L cum quadrato ZE est equalis quadrato 15 EH . sed EA est equalis quarte L ; ergo multiplicatio ZA in AE est equalis quarte multiplicationis ZA in L . ergo multiplicatio ZA in AE quater cum quadrato ZE est equalis quadrato EH . et ponam AM equalem AE ; ergo multiplicatio ZA in AE quater cum quadrato EZ est equalis quadrato ZM . ergo quadratum ZM est equale quadrato EH ; 20 ergo ZM est equalis EH . proiciamus ergo EM communem; remanebit ergo EZ equalis MH . sed EA est equalis AM ; ergo ZA est equalis AH . sed est ita, quoniam BH est contingens sectionem et, BZ est secundum ordinem.

Et secundum partem compositionis ponam res omnes secundum suam 25 dispositionem. dico ergo, quod angulus TBK est equalis angulo EBH ; cuius demonstratio est ista. protraham BZ secundum ordinem. et quoniam BH contingit sectionem, et BZ est secundum ordinem, erit linea ZA equalis lineae AH . et ponam AM equalem AE . remanet ergo ZE equalis MH . ergo ZM est equalis EH ; ergo quadratum ZM est equale 30 quadrato EH . sed multiplicatio ZA in AE quater cum quadrato ZE est equalis quadrato ZM ; ergo multiplicatio ZA in AE quater cum quadrato ZE est equalis quadrato EH . sed multiplicatio ZA in AE quater est multiplicatio ZA in L , quoniam EA est quarta L ; ergo

9. DH] BDP , EH AO . 10. *angulo* — *angulus*] in ras. O. 14. EH] EH per penultimam primi P. 15. L (pr.)] L per Appollonium BP. *equalis*] -is in ras. O, *equale* BP. 20: ZM (pr.)] ZH per conuersam 8, II BP. EH] E - in ras. O. 21. EM] A , - M in ras. O, EA BP, EL D. 32. ZM] e corr. O, ZE H A, om. BDP. ergo — 33. *equalis quadrato*] om. BDP.

Arab. 6. prop. 5. Fig. 3 wie in O. 7. BEH] HBE . 9. DH] so! 16. *ergo* — 17. L] fehlt. 21. *proiciamus*] abtragen, fortnehmen. 25. prop. 6.

multiplicatio ZA in L cum quadrato ZE est equalis quadrato EH . sed multiplicatio ZA in L est quadratum BZ , quoniam BZ est secundum ordinem; ergo quadratum BZ et quadratum ZE sunt equalia quadrato EH . sed quadratum BZ et quadratum EZ sunt quadratum BE ; ergo
 5 quadratum BE est equale quadrato EH . ergo BE est equalis EH . ergo angulus EBH est equalis angulo EHB . sed angulus EHB est equalis angulo TBK , quoniam linea TB equidistat lineae DH ; ergo angulus EBH est equalis angulo TBK . et similiter contingit in omni linea, que produ-
 10 citur in sectione et continet cum linea EH ab eo, quod sequitur capud eius, angulum expansum.

Itaque omnis linea, que protrahitur in sectione equidistans sagitte eius et conuertitur ad punctum E , continet cum linea contingente super illud punctum duos angulos equales. et illud est, quod demonstrare uoluimus.

2 Omnis sectionis mukefi, cuius axis figitur, et reuoluitur sectio, donec
 16 redeat ad locum, a quo incepit per motum, et prouenit corpus rotundum, et euenit in corpore contento ab ea, quodcunque corpus fuerit, superficies concaua, et omnis superficiei plane, que egreditur super eius axem et secatur illam superficiem, differentia communis est sectio mukefi equalis
 20 sectioni prime, et axis eius est ille axis.

[Fig. 4.] Uerbi gratia sit sectio ABG mukefi et axis eius AD , et linea GD sit perpendicularis super eam. et figatur AD , et reuoluatur sectio, donec peruenerit ad locum, a quo incepit per motum, et proueniat ex eius exteriori superficie concaua, cuius basis sit circulus GEZ , qui
 25 est ex reuolutione puncti G , et sit capud eius punctum A , et egrediatur ex axe AD superficies plana, quocunque modo contingit, et secet superficiem, et sit differentia communis linea AHE . dico ergo, quod linea AHE est sectio mukefi equalis sectioni $ABGD$; cuius demonstratio hec est. continuabo ED , et ymaginabor sectionem $ABGD$ in primis motam
 30 in circuitu axis AD . ergo, cum punctum G peruenerit ad punctum E , cooperit tota superficies $ABGD$ superficiem $AHED$, et fiunt superficies

4. quadratum (sec.)] in ras. O. 8. TBK] BDP , T - e corr. O, EBK A.
 11. Itaque] mg. O, nam m. 1 O, si $\bar{u}r$ A, nam BDP . 15. mukefi] e corr. O; mukesi
 ABD, m. 1 O; mutekefi P. 16. prouenit] ADP , puenit O, peruenerit B. 23. proueniat]
 BDP , pueniat O, peruenerit A. 24. Post eius add. rectione mg. O adscr. $\gamma\epsilon$. GEZ
 G - e corr. O, DEZ $ABDP$. 26. plana] BDP , e corr. O; concaua A. 28. $ABGD$]
 $-D$ e corr. O. 29. ymaginabor] y - mut. in i O. 31. superficies (alt.)] $-es$ e corr. O.

Arab. 12. E] fehlt. super illud punctum] fehlt. 15. prop. 7. 18. super-
 ficiei plane] der Nominativ. 19. superficiem] Hohlfläche. 20. Nach prime: welche
 die Hohlfläche erzeugt hat. 24. exteriori] inneres? 26. superficiem] Hohlfläche.
 30. Nach E : fällt die Linie DG auf (cooperit) die Linie DE und.

una. et quoniam sectio ABG facit euenire superficiem concauam, est linea $ABGD$ semper, ubicunque reuoluatur sectio, differentia communis inter superficiem concauam et inter sectionem. cum ergo superponitur sectio $ABGD$ sectioni $AHED$, est differentia inter ipsam et inter superficiem concauam ipsa superficies ABG . et iam fuit differentia communis inter 5 superficiem, que ei superponitur, et fit cum ea una superficies, et est superficies concaua ipsa linea AHE . ergo linea ABG superponitur lineae AHE , et fiunt linea una, et fit superficies tota equalis superficiei. ergo linea AHE est sectio mukefi equalis sectioni ABG , et eius axis est AD . et illud est, quod uolumus declarare. 10

In omni superficie concaua concauitatis corporis mukefi si de extremitate axis eius separetur simile quarte lateris erecti sectionis, quam facit accidere, tunc omnis linea producta equidistans eius axi et perueniens ad superficiem concauam et conuertitur ad illud punctum, continet cum linea contingente superficiem concauam, que est differentia communis 15 inter superficiem lineae conuerse et inter superficiem contingentem superficiem concauam, duos angulos equales.

[Fig. 5.] Uerbi gratia sit superficies concaua concauitatis corporis mukefi, cuius caput est punctum A et basis eius circulus GEZ et eius axis AD , et separetur ex axe eius linea AH equalis quarte lateris erecti 20 sectionis, quam facit euenire, et protrahatur linea TB equidistans axi et conuertatur ad punctum H . dico ergo, quod due lineae TB , BH continent cum linea contingente superficiem concauam, que egreditur in eius axe, duos angulos equales; quod sic demonstratur. quoniam due TB , HA sunt equidistantes, tunc ambe sunt in superficie una. sed linea BH con- 25

1. ABG] $ABGD$ $ABDP$ et deletio D O. 2. $ABGD$] $-D$ del. O. 3. concauam] BDP , e corr. O; continuam A. 5. superficies] $OABDP$, linea supra scr. O. 6. Post est add. in mg. O. 7. superficies] $-es$ e corr. O. concaua] BDP , e corr. O; continua A. linea] $-ea$ e corr. O. 12. simile] $ABDP$, aequale e corr. O. Supra quam add. que eam O. 13. perueniens] D , e corr. O; proueniens BP ; ueniens A, m. 1 O. 14. concauam] $conc-$ renouat. O. 15. contingente] in hoc uocab. rursus inc. d. 17. duos] $-os$ e corr. O. 19. Post basis ras. 6 litt. O. 21. protrahatur] $ABDdP$, protrahitur O. 23. que e-] des. fol. 275^a d, deinde repet. 15. est differentia — 23. que. 24. due] due lineae $BDdP$. HA] OP , et HA $ABDd$. 25. sed — p. 226, 2. una] om. BD .

Arab. 1. Nach una: da sie zwei gleiche Flächen sind. ABG] so! 2. $ABGD$] so! 5. ipsa] fehlt. superficies] linea. et — 7. AHE] und mit der konkaven Oberfläche war es die Linie AHE . 8. Fig. 4, wesentlich wie in O; nur sind die Kegelschnitte hier wie überall durch sich schneidende Kreisbogen gegeben. 9. ABG] ABD . 11. prop. 8. 12. quam facit accidere] welche sie erzeugt. 16. superficiem lineae conuerse] die reflektierte Linie. 18. Fig. 5 nach dem Arab., O hat d statt k , k statt l ; vgl. das über Fig. 4 Gesagte. 19. GEZ] GZE . 23. eius axe] ihrer Ebene. 24. HA] DA . 25. linea BH — p. 226, 2. una] die Linien BH und AD schneiden sich; daher liegen sie in einer Ebene, und zwar der Ebene der beiden parallelen Linien.

tinuat inter eas; ergo est in superficie ambarum. ergo lineae TB, BH, AD sunt in superficie una. protraheam ergo superficiem $BTDA$, donec cadat superficies concaua et superficies plana contingens eam super punctum B . ergo eueniet ea sectio mukefi equalis sectioni, quam fecit accidere, et
 5 cuius axis est ille axis, sicut ostendimus in figura, que est ante istam. sit ergo illa sectio ABG , et proueniat iterum in superficie plana contingente eam linea recta. sit itaque linea KBL linea contingens. ergo linea KBL contingit superficiem concauam, quoniam obuiau ei super punctum tantum, et similiter iterum ipsa contingit sectionem, quoniam
 10 occurrit ei super punctum unum. et quoniam linea KBL contingit sectionem, et linea AH est quarta lateris recti, et linea TB equidistat lineae AD et iam conuertitur ad punctum H , due lineae TB, BH continent cum linea KBL duos angulos equales, sicut ostensum est in eo, quod antecedit. ergo due lineae TB, BH continent cum linea contingente super-
 15 ficiem concauam, que est differentia communis inter superficiem duarum linearum TB, BH , et inter id, quod est superficies contingens superficiem concauam, duos angulos equales. et similiter declaratum est, quod omnis lineae egredientis equidistantis axi et peruenientis ad superficiem concauam, et que conuertitur ad punctum H , est hec dispositio. et illud est, quod
 20 uolumus declarare.

4 Cum opponitur corpori solis omnis superficies specularis concaua concauitate corporis mukefi, ita ut sit axis eius in directo corporis ipsius, tunc egrediuntur ex corpore solis ad totam planitiem eius radii, qui omnes conuertuntur ad punctum super eius axem, cuius elongatio a capite super-
 25 ficiei per quantitatem quarte lateris erecti sectionis, quam efficit superficies.

[Fig. 6.] Uerbi gratia sit superficies specularis concaua concauitate corporis mukefi, cuius capud sit punctum A et ipsius basis circulus GEZ et eius axis AD et longitudo puncti H a puncto A sit equalis quarte lateris erecti sectionis, que facit euenire superficiem, et opponatur per
 30 eam corpori solis, quod sit sicut circulus T , ita ut axis AD , cum producit secundum rectitudinem, perueniat ad punctum T , quod est intra corpus solis. dico ergo, quod egrediuntur ex toto corpore solis radii ad

2. cadat] BDP, cadant OA, tardant d. 4. fecit] DdP, facit OBA. 6. sit] BDP, sint d, facit A, fiat e corr. O. ABG] uel $ABGZ$ e corr. O; AB ABDdP, m. 1 O. 16. et inter id] mg. O, om. ABDdP. quod] O, que ABDdP. 18. egredientis] ADdP, egredientes et B, ras. O. 22. concauitate] O, concauitatis ABDdP. 26. -ate — 27. cuius] renou. O. 27. ipsius] renou. O. 29. fecit BDP. superficiem] -ficiem renou. O. 32. solis] solis quod sit sicut circulus T BDP.

Arab. 2. cadat] schneidet. 4. quam fecit accidere] welche ihn erzeugt hat. 6. ABG] $ABGZ$. 16. et — 17. concauam] und zwischen der Fläche, welche die Hohlfläche berührt. 21. prop. 9. 24. punctum] einen Punkt. 27. GEZ] GEB .

totam planitiem huius superficiei, et conuertuntur omnes ad punctum H ; quod sic demonstratur. quoniam radius, qui egreditur ex corpore solis ad superficies speculares, egreditur super lineas rectas, tunc radius, qui egreditur ex puncto T ad punctum A , egreditur super lineam AT . ponam autem super superficiem specularem punctum super circumferentiam 5 basis eius, quocunque modo contingat, sitque punctum G ; et ymaginabor lineam egredientem ex puncto G equidistantem lineae AT , que sit sicut linea GK . linea ergo GK , cum producetur secundum rectitudinem, cadet super corpus solis, quoniam latitudo, que est inter ipsam et inter lineam AT , est quantitatis parue, cui non est quantitas apud corpus solis. ipsa 10 ergo cadet semper prope punctum T . punctum uero T est intra corpus solis; ergo ipsa cadit super solem. cadat ergo super punctum K . ergo radius, qui egreditur ex puncto K ad punctum G , egreditur super lineam KG , et similiter linea producta in omni puncto super planitiem superficiei specularis equidistans axi si perueniat ad corpus solis, radius, qui 15 egreditur ex illo puncto ad punctum, qui est super superficiem specularem, egreditur super illam lineam. iam ergo declaratum est, quod ex corpore solis egrediuntur radii ad totam planitiem superficiei corporis specularis super lineas equidistantes axi. dico ergo, quod omnes ipsi conuertuntur ad punctum unum. et quoniam superficies $AGEZ$ est superficies concaua 20 concauitate corporis mukefi, tunc lineae equidistantes axi, cum perueniunt ad illam et conuertuntur ad punctum H , continent cum lineis rectis, que producantur in superficiebus earum contingentes superficiem concauam angulos equales, sicut ostensum est in figura, que est ante istam, et radii, qui egrediuntur super lineas rectas, que protrahuntur ad superficies spe- 25 culares, conuertuntur secundum angulos equales ex lineis contingentibus superficies speculares, que sunt in superficiebus linearum conuersarum. ergo radii, qui egrediuntur super lineas equidistantes axi, ad totam

5. *super* (pr.)] BP, mg. O, om. ADd. 6. *sitque punctum G*] OAd, om. BDP. *ymaginabor*] BDdP, *ymaginabo e A*, *imaginabor e* corr. O. 11. *cadet*] *cadit* uel *cadat* O. 12. *cadat*] DdP, e corr. O; *cadit* A, m. 1 O; *cadet* B. 20. $AGEZ$] e corr. O, $ADEZ$ ABDdP. 24. *sicut ostensum est in figura, que est ante istam*] mg. O, om. ABDdP. 25. *speculares*] *speculares et* OABDdP, et del. O. 28. *ergo—axi*] mg. O, *conuertuntur iterum super illas lineas, sicut ostensum est in figura, que est ante istam* O, sed del., ADP et fere Bd.

Arab. 2. *radius, qui egreditur*] Strahlen, welche ausgehen. 3. *ad superficies speculares*] fehlt. *egreditur*] ausgehen. 4. AT] LT (falsch). 17. Fig. 7. 20. $AGEZ$] $ADEB$. 21. *linee*] alle Linien. 24. *sicut—istam*] so! *et—p. 228, 2. quod*] und die geraden Linien, welche nach den Spiegelflächen gezogen werden, werden unter gleichen Winkeln von den Tangenten an die Spiegelflächen, welche in der Ebene der reflektierten Strahlen liegen, reflektiert. Die Strahlen, welche längs dieser Linien fortschreiten, werden auch längs dieser Linien reflektiert. Und die Strahlen, welche.

planitiem superficiei concaue conuertuntur super illas lineas, que perueniunt ad punctum. et iam ostensum est, quod egrediuntur ex corpore solis ad totam planitiem superficiei specularis radii super lineas equidistantes axi; ergo radii, qui protrahuntur ad totam planitiem superficiei specularis concaue concauitate corporis mukefi, qui sunt equidistantes axi, omnes conuertuntur ad punctum *H*. et est ille, cuius elongatio a capite superficiei est equalis quarte lateris erecti. et illud est, quod demonstrare uoluimus.

5 Et quia iam ostensum est, quod radii, qui egrediuntur ex corpore
10 solis ad omnem superficiem speculi concaui concauitate corporis mukefi, qui sunt equidistantes axi, conuertuntur omnes ad punctum unum, tunc ostendam nunc, qualiter assumamus speculum, quod fit secundum hanc figuram. assumemus ergo laminam calibis boni, secundum quam mensuram uoluerimus. [Fig. 8.] tunc fit sicut lamina *ABGD*. et protrahamus
15 in ea sectionem ex sectione mukefi, quaecunque sectio sit, et sit sectio *AEG*, et abscindamus laminam super lineam *AEG*. qualiter uero inueniamus sectionem mukefi et alias sectiones per uiam instrumenti, multitudo geometrarum uariauit, quamuis non inuenerunt eam secundum ueritatem sui, et ostendam in tractatu, in quo narrabo inuentionem omnium
20 sectionum per uiam instrumenti, qualiter protrahamus, quamcunque sectionem uolumus, secundum ueritatem instrumenti, qua ueriores non sit possibile inuenire in materia, sicut est inuentio circuli per circulum, quamuis sit illud ualde laboriosum, et super quamcunque superficiem planam uoluerimus, et sit angulus ordinis eius, quemcunque angulum
25 uoluerimus, et latus eius erectum, quamcunque lineam uolumus, et quamcunque sectionem uoluerimus ex sectione, scilicet si uoluerimus ab eo, quod sequitur capud eius, aut uoluerimus ex medio ipsius, et erit elongatio eius ex capite ipsius, quamcunque elongationem uoluerimus. apparebit ergo per illud, qualiter inueniamus in lamina sectionem mukefi, et nisi
30 abhorrerem prolongare librum et permiscere cum eo, quod non est eius.

2. Ante et ins. *h* mg. O. 4. Ante ergo ras. 2—3 litt. O. 6. *ille*] *illud* e corr. O.
11. *axi*—*omnes*] renouat. O. *tunc*] *tūc* O, ut AP, sicut D, om. Bd. 12. *nunc*] OA, om. BDdP. *qualiter*—*hanc*] renouat. O. *assumamus*] ADP, *assumemus* Bd, *oporteat fabricare* e corr. O. *quod fit*] A, *quod sit* BDdP, om. in renouat. O. 13. *boni*—*mensuram*] ABDdP, *forme cuiuscunque* e corr. O. 14. *lamina*] renouat. O. —*us in*—15. *sectione*] renouat. O. 15. *sectio* (pr.)] om. d, *talīs* e corr. O. 16. *AEG*] e corr. OP, *AED* ABDd. *et*—*lineam*] renouat. O. *AEG*] corr. ex *AED* OP, *AED* ABDd. 26. *scilicet*] BDP, *sed* Ad, *et* e corr. O (uestigia f. .).

Arab. 6. Nach *conuertuntur*: auf diesen Linien. 18. *uariauit*] hat angegeben. 21. *instrumenti*] fehlt. 22. *per circulum*] durch den Zirkel. 23. *superficiem planam*] Durchmesser.

dicerem in hoc loco. uerum ergo referam illud in suo loco, si deus uoluerit. protrahamus ergo in lamina $ABGD$ sectionem ex sectione mukefi, sitque sectio $AE G$, et secemus laminam super eam. deinde acuamus marginem eius, donec sit taliter, ut radat totum, super quod transit, et assumamus iterum laminam de calibe, cui sit altitudo parua, et incidamus eam super illam eandem sectionem et punctemus super eius altitudinem cum lima taliter, ut limetur ferrum. deinde assumamus speculum de calibe concauum, quecunque concauitas fuerit, postquam fuerit proximum ei, quod uolumus. quodsi fuerit sectio, quam protrahimus ex sectione, ab eo, quod sequitur capud sectionis, sicut sectio $AEGB$, ponemus illud speculum super figuram oui (Fig. 12). et si fuerit sectio, quam protrahimus ex sectione, ex medio eius, sicut sectio $A EZB$, ponemus speculum secundum figuram anuli (Fig. 14). deinde intendemus cum illa lima ad cauandum speculum. limabimus ergo ipsum ad hoc, ut occurrat illa limatura toti superficiei speculi. cum ergo expediti fuerimus ab illo, componemus speculum in instrumento nominato assor super centrum circuli basis eius et super capud eius, si fuerit ouum, aut centrum circuli alterius, si fuerit anulus. et intendemus cum illa lamina acute marginis ad concauandum speculum et tornabimus, sicut tornantur instrumenta, ad hoc, ut obuiet illud instrumentum toti speculo, et egrediatur totum, quod est in ipso de asperitate, et fiat leuior, quantum possibile est. cum ergo fit illud, tunc fit superficies eius superficies corporis mukefi, et est figura, quam nos intendimus. deinde tergatur et utatur. et hec est forma eius.

Hec summa sermonis in opere speculi concaui, quod est secundum figuram corporis mukefi. qualiter autem habeam speculum concauum comburentem, cuius combustio sit secundum longitudinem notam, quamcunque longitudinem uoluerimus, et longitudo non assumitur nisi ex axe, tunc cum uoluerimus, ut sit speculum secundum figuram oui. ponemus laminam de calibe similem ABG et lineabimus in ea lineam (Fig. 16) rectam sicut BG et ymaginabimur longitudinem quesitam sicut GZ et protrahemus

1. ergo] compendio O, corr. in ego. 12. $A EZB$] e corr. O, $A EGZB$ ABDdP, m. 1 O. 20. illud instrumentum] om. BP. 21. fiat] renouat. O. leuior] BDP, lenior Ad, lenior corr. in lenius O. 23. hec] BD, h' O, hoc AdP. 24. hec] d, hec est BD, h' O, hoc A, hoc est P. 25. comburentem] comburens D et e corr. O. 30. ymaginabimur] ADd, ymaginabimus BP, imaginabimur e corr. O. GZ] AP, e corr. O; G B, DZ Dd.

Arab. 5. iterum] wiederum eine andere. 11. oui] eines halben Eies. 12. $A EZB$] $A EHB$. Darauf: so schneiden wir die Bleche alle nach dieser Figur und machen das eine scharf und das andere zu einer Feile und. 16. assor] Al Schoher oder Assohr (الشحر), Drehbank. 20. illud instrumentum] der Rand dieser Platte. 23. Fig. 9. 24. prop. 11. 29. ABG] $ABGD$. 30. GZ] ZG .

in ea sectionem ex sectione mukafi ex eo, quod sequitur capud eius, sicut sectio $AE G$, ita ut sit capud eius punctum G et eius axis $B G$ et latus eius erectum quadruplum $G Z$. et iam diximus, quod narrabimus, qualiter sit inuentio illius, in loco suo ex operatione sectionum. et quando inuenerimus in lamina sectionem $AE G$ secundum hunc modum, tunc linea $Z G$ erit quarta lateris erecti. et iam ostensum est, quod omnes radii, qui cadunt super speculum, quod sumitur ex sectione $AE G$, conuertuntur ad punctum Z , et longitudo puncti Z a speculo est longitudo posita, et combustio speculi oui facti ex sectione $AE G$ est super punctum Z , cuius longitudo a speculo est longitudo posita. terminabimus ergo sectionem $AE G$ secundum figuram oui per operationem, cuius precessit narratio.

[Fig. 17.] Et si uoluerimus, ut sit speculum secundum figuram anuli, ponemus laminam similem $ABGD$ et lineabimus in ea lineam rectam sicut linea $B G$ et ponemus lineam, qualitercunque contingat, sicut linea H , et adiungemus eam ad longitudinem, super quam uolumus ut sit combustio, et protrahemus in lamina sectionem ex sectione mukafi ex medio eius, cuius axis sit $B G$, et latus eius erectum quadruplum lineae H , et sit longitudo sectionis a capite sicut linea aggregata ex longitudine data et linea H . et ostendam, qualiter sit inuentio illius iterum. cum ergo protraxerimus in lamina sectionem ex sectione secundum hunc modum sicut sectio AE , ymaginabimur superficiem AD exeuntem secundum rectitudinem ab eo, quod sequitur GE , et ymaginabimur lineam $B G$ egredientem secundum rectitudinem in superficie et sectionem iterum AE egredientem. cadet ergo axis eius super punctum Z . et ymaginabimur $Z T$ similem H . et quoniam $AE Z$ est sectio mukafi, et axis eius est $B Z$, et latus eius erectum est quadruplum $T Z$, que est equalis H , est $Z T$ quarta lateris erecti. ergo omnes radii, qui cadunt super speculum, quod sumitur, ex quacunque sectione fuerit ex sectione $AE Z$, conuertuntur ad punctum T . et quoniam elongatio sectionis AE ex capite sectionis posita

1. ea] BDP, laminem A; lamina d, e corr. O. 9. est] BDdP, et A, ē e corr. O.
20. protraxerimus] BDd, e corr. O; protraximus AP, m. 1 O. 21. ymaginabimur] mut. in imaginabimur O. 23. superficie] su- renouat. O. 24. ymaginabimur] mut. in imaginabimur O. 25. ZT] corr. ex $\bar{a}r$ O, AT ABDdP. BZ] e corr. O, BD ABDP, AD d.

Arab. 9. est] so! 10. terminabimus] konstruieren. Nach ergo: von Z. 11. Nach $AE G$: Spiegel. Nach narratio: und sein Brennen findet in der gesuchten Entfernung statt. 12. prop. 12. 14. lineam] eine gerade Linie. 19. et ostendam—iterum] wir haben wahrlich dieses Problem bewiesen in unserem Buch über die Konstruktion der Kegelschnitte. 20. sectione] dem Schnitt mukafi. 21. ymaginabimur—22. GE] fehlt. 25. ZT] so! BZ] so! 29. et—p. 231, 2 posite] und da der Abstand (elongatio) des Schnittes AE von dem Schnittpunkte der Achse (sc. z)

est equalis longitudini posite et lineae H , et TZ est equalis H , tunc remanet BT equalis longitudini posite. ergo speculi facti ex sectione AE , quod est secundum figuram anuli, combustio est super punctum T , cuius longitudo a speculo est longitudo posita. assumemus ergo ex sectione AE speculum secundum figuram anuli per operationem, cuius narratio precessit. ergo eius combustio erit super longitudinem quesitam.

Sermo ergo iste comprehendit omnem operationem speculorum comburentium, que sunt secundum hanc figuram; et sunt fortioris combustionis omnibus speculis, quia radii conuertuntur ex tota superficie eorum ad punctum unum.

10

Explicit.

Dieses Werkchen, worauf schon HASE (*De militar. script. gr. et lat. editione instituenda* p. 24) hinwies, ist so gut wie unedierte. Denn das Buch von A. GOGAVA: *CL. PTOLEMAEI Operis quadripartiti in latinum sermonem traductio. Item De sectione conica orthogona Deque speculo ustorio* (Louvain 1548) bringt nur die erste Hälfte der Schrift (bis prop. 5), und zwar in willkürlich geänderter Gestalt, so daß es wenigstens in der Form eine ganz andere Schrift ist.¹⁾ Veranlaßt, mich mit der nicht uninteressanten Schrift zu beschäftigen, wurde ich dadurch, daß Herr E. CHÂTELAIN, Professor an der „Ecole des hautes études“ in Paris, vor vielen Jahren die Freundlichkeit hatte, mir eine von seinen Schülern in der lateinischen Paläographie gemachte Abschrift der Pariser Handschrift zu schicken, deren Veröffentlichung er bereitwilligst gestattete. Diese Abschrift verglich ich dann mit den beiden Dresdensens und dem Amplonianus, während ich von dem Basileensis, der nicht nach Kopenhagen verschickt werden konnte, durch die Zuvorkommenheit des Herrn Bibliothekars SIEBER eine Photographie

2. BT] AB DP, VT Od. 3. T] B DP, e corr. O; Z Ad. 9. *quia*] e corr. O, *qui* m. 1 O, $\dot{q}$ A, q^m B, *quoniam* DdP. 11. *explicit*] O, om. d, *explicit liber Archimenidis de speculis comburentibus* A, *explicit de speculis comburentibus uel de sectione mukefi* B, *explicit liber de speculis comburentibus* D, *explicit de speculis comburentibus* P.

gleich ist dem gegebenen Abstand plus der Linie H , so ist die Linie BZ gleich dem gegebenen Abstand plus der Linie H , und da TZ gleich H ist, so bleibt BT gleich dem gegebenen Abstand. 6. Figur gleich unserer Fig. 17, nur daß die punktierten Linien hinzukommen. 11. *Explicit*] und das ist, was wir uns in diesem Buche vorgenommen haben usw.

1) Aus dem Anfang: „Ex sublimioribus, quae geometrae invenerunt“ geht hervor, daß GOGAVA eine Handschrift der schlechteren Klasse benutzte; s. den Apparat zu S. 218, 2 Der Titel lautet bei ihm: „Sequitur antiqui scriptoris libellus de Speculo comburenti concauitatis parabolae“ (S. 21—28).

erhielt. Mit diesem Material ausgerüstet, wollte ich eben das Werkchen veröffentlichen, als ich zufällig von Herrn E. WIEDEMANN erfuhr, daß er den Verfasser (IBN AL HAITAM) und das arabische Original der Abhandlung kannte. Zugleich wurde für den lateinischen Text eine bessere Quelle erschlossen durch VAL. ROSES Entdeckung des merkwürdigen cod. Ottonianus lat. 1850¹⁾, den ich im Herbst 1887 in Rom vergleichen konnte.

Für die Textgestaltung sind folgende Handschriften benutzt:

- O — cod. Ottonianus lat. 1850, saec. XIII; s. VAL. ROSE a. St. und meine ausführliche Beschreibung Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 5, 1890, S. 3 ff.
- A — cod. Amplonianus Q 387, saec. XIV; vgl. ROSE, *Anecdota* II, S. 291 ff. Unsere Abhandlung steht f. 57^r—59^v.
- B — cod. Basileensis F. II. 33, saec. XIV; f. 105^r—106^v.
- D — cod. Dresdensis Db 85, scr. a. 1410—11; f. 11^v—16^v.
- d — cod. Dresd. Db 86, saec. XIV; f. 275^r—277^v. Vgl. CURTZE, *Zeitschrift f. Mathem.* 28, 1883, Hist. Abt. S. 1—14; seine Angabe unter Nr. 39, daß die Handschrift unvollständig sei, ist dahin zu berichtigen, daß sie in unserer Schrift eine große Lücke in der Mitte hat (von S. 221, 10 equalis bis S. 225, 15 linea); darauf folgt, nur mit einem roten Paragraphenzeichen bezeichnet, das Bruchstück aus den *Conica* des APOLLONIOS, das ich APOLLONII *Quae graece extant* II, S. LXXV ff. herausgegeben habe.
- P — cod. Parisin. 8680 A, saec. XIV, f. 61—64. Vgl. *Catal. cod. Bibl. Reg. Paris.* IV, S. 534. Auch hier folgt unmittelbar dasselbe Bruchstück des APOLLONIOS, mit der Randbemerkung: *ista sunt, que sequuntur, in principio libri APOLLONII de pyramidibus*.
- p — cod. Parisin. 9335, saec. XIV; f. 86^r—88^v. Hier geht das Stück aus APOLLONIOS voran f. 85^v (*ista, que sequuntur, sunt in principio libri APOLLONII de pyramidibus, et sunt axiomata, que premitit in libro illo*), und das ganze tritt auf als Fortsetzung von TIDEUS, de speculis.²⁾ S. die ausführliche Beschreibung von BJÖRNBO, *Biblioth. Mathem.* 3, 1902, S. 67 ff. Es lag mir von dieser Handschrift nur eine Abschrift von S. 218, 2—220, 24 vor.

1) Deutsche Litteraturzeit. 1884, S. 210 ff.

2) Hierauf beruht die Angabe von TIDEUS als Verfasser unserer Schrift. Im Index von A (saec. XV; ROSE, *Anecdota* II, S. 292) wird sie aufgeführt als „*liber ARCHIMENIDIS de speculis comburentibus*“ mit der späteren Randbemerkung: *sed verius pars est de libro TYDEI de aspectibus et speculis et habetur in 96 librerie collegii huius* (d. h. das von AMPLONIUS gestiftete Collegium Porta caeli zu Erfurt; A hat die Signatur: *liber librerie Porte caeli in Erfordia*). Dieselbe, wie es scheint, verschollene, Handschrift Porta caeli 96 ist offenbar in einer vorn in D befindlichen

Außerdem findet sich die Abhandlung nach einer Mitteilung BJÖRNBO in folgenden Handschriften:

Reginensis lat. 1253, saec. XIV; f. 63^r — 69^v.

Regin. lat. 1261, saec. XIV; f. 262^r — 265^r (vgl. BJÖRNBO, *Studien über MENELAOS*, Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 14, 1902, S. 149).

Urb. lat. 296, saec. XIV; f. 226^v — 230^r.

Palatin. lat. 1377, saec. XIV; f. 14^r — 18^v.

Marcian. lat. VIII 32, saec. XIV; f. 90^r — 94^v (vgl. BJÖRNBO, a. St. S. 151).

Ambrosian. T 100 sup., saec. XIV; f. 28^v — 35^r.

Amplonian. Q 376, scr. a. 1349; f. 122^r — 136^r.

British Mus. Vespasian. A II, saec. XIV; f. 140^r — 147^r.

Die Übersetzung rührt nach BJÖRNBO wahrscheinlich von GERHARD von Cremona oder seiner Schule her; namentlich ist der Ausdruck „differentia communis“ für Schnittlinie (S. 220, 10; 224, 19, 27; 225, 2, 4, 5, 15; 226, 15) ihm eigentümlich. Die Übersetzung ist bis auf einige wenige Stellen treffend und mit vollem Verständnis gemacht; die wesentlicheren Abweichungen des arabischen Grundtextes sind unten in einer besonderen Abteilung des Apparats angegeben nach WIEDEMANN'S Übersetzung. Der lateinische Ausdruck ist durch die wörtliche Wiedergabe des Arabischen schwerfällig, wie immer in den GERHARD'Schen Übersetzungen.

Daß die Übersetzungen nach dem Griechischen in O von WILHELM von MOERBEK herrühren, hat ROSE nachgewiesen; und zwar besitzen wir in jenem codex ohne Zweifel sein Autograph.¹⁾ Die Annahme läge also nahe, daß auch unser Schriftchen von ihm übersetzt sei. Doch habe ich a. O. S. 8 hervorgehoben, daß diese Übersetzung jedenfalls älter sein mußte als die übrigen in O enthaltenen, welche 1269 datiert sind; schon 1267 benutzt nämlich ROGER BACON unsere Übersetzung. Eine genauere Prüfung der Varianten sämtlicher Handschriften hat mich denn auch davon überzeugt, daß O zwar die beste, aber nicht die einzige Textesquelle ist. Richtige Lesarten, wie sie S. 220, 13; 223, 9; 224, 16, 23; 225, 21; 226, 2, 4; 227, 11, 12; 229, 21; 231, 2 von anderen Handschriften geboten werden, während

Notiz zitiert: In Porta caeli Erphordie perspectiva ALHACEN, perspectiva W[TELONIS], perspectiva PISANI, ARCHIMEDIS de speculis comburentibus, THIDEUS de aspectibus et spiralibus (aus dieser Notiz darf natürlich nicht geschlossen werden mit SCHNORR von CAROLSFELD, *Katalog der Handschriften zu Dresden I*, S. 304, daß D jenem Collegium gehört hat). In B steht am Anfang mit moderner Hand: „TIDEUS. Cfr. Zeitschr. f. Mathem. XIX S. 96“; die Handschrift selbst hat den Namen nicht. Dem ARCHIMEDES ist die Schrift wohl beigelegt worden wegen der Sage von seinen Brennsiegeln.

1) Vgl. Abhandl. z. Gesch. d. Mathem. 5, 1890, S. 8 ff.

O, allein oder mit anderen Handschriften, offenbare und nicht korrigierte Fehler hat, sind schwerlich durch Konjekturen gefunden. Dazu kommt noch eine Reihe von Stellen, wo eine unrichtige Lesart in O durch Korrektur mit der richtigen anderer Handschriften in Einklang gebracht worden ist, wie S. 219, 3, 9, 15; 220, 10; 224, 8, 26; 225, 3, 7, 13; 227, 5, 12; 230, 9, 20; 231, 3. Daß diese Korrekturen wirklich einer anderen Handschrift entnommen sind, nicht selbständig gefunden, wird dadurch wahrscheinlich, daß S. 221, 4 eine richtige Lesart durch die der übrigen Handschriften ersetzt worden ist, die um nichts besser ist, und zwar mit einem hinzugefügten $\gamma\phi(\acute{\alpha}\phi\epsilon\tau\alpha\iota)$, was doch gewöhnlich nur bei Varianten einer anderen Handschrift benutzt wird.¹⁾ Diese Korrekturen rühren sämtlich von einer jüngeren Hand (saec. XV) her, die überhaupt alle Korrekturen gemacht hat, von den einzelnen, wo im Apparat ausdrücklich m. 1 angegeben ist, abgesehen sowie von S. 219, 3, 5, welche von einer noch jüngeren herzurühren scheinen. Die korrigierende Hand hat außer den genannten Fehlern noch fast sämtliche Figuren nach Wegradierung der ursprünglichen neu gezeichnet (die Beischrift auf Fig. 12 ist alt), viele verblichene Stellen erneuert, zuweilen, was durch zu starke Rasur schadhafte geworden war, auf angeklebten Papierstreifen nachgebessert und endlich eine ziemliche Anzahl von Verbesserungen, die sich in keiner Handschrift wiederfinden, durch Konjekturen eingeführt; s. S. 219, 10; 221, 19; 223, 32; 224, 15, 24; 225, 1, 5, 12; 226, 6; 230, 25, wohl auch S. 223, 21; 224, 11. Daß dies alles auf Konjekturen beruht und nicht etwa auf Herbeiziehung des arabischen Originaltextes, geht daraus hervor, daß auch öfter unnötige und unrichtige Konjekturen vorkommen; s. S. 221, 19; 225, 2, 12; 226, 6; 228, 12, 13, 15, 26; 229, 1; auch S. 231, 9 ist das *quoniam* der anderen Handschriften vielleicht vorzuziehen; S. 226, 16; 227, 28 hat der Korrektor den Fehler richtig gesehen, aber mit seiner Emendation nicht genau das Richtige getroffen; S. 227, 20; 229, 12 scheinen die von ihm verbesserten Fehler schon im Arabischen vorzuliegen. Endlich zeigen auch seine sprachlichen und orthographischen Änderungen, daß er selbständig verfuhr; s. S. 218, 10; 219, 17; 224, 29; 227, 6; 229, 30; 230, 21, 24, auch S. 228, 6, wo er das mittelalterliche *punctus* wegemendierte (vgl. auch S. 229, 21, 25, wo *speculus* statt *speculum* ihm mißfiel; Z. 25 könnte übrigens die Emendation aus D stammen).

Wenn aber auch O nicht einzige Quelle ist, ist sie doch bei weitem die beste und reinste; ich habe deshalb im Apparat nur ihre Lesarten vollständig mitgeteilt²⁾, aus denen der übrigen Handschriften nur eine

1) Es kommt noch S. 224, 24 vor, wo wir allerdings die angeführte Lesart in unseren Handschriften nicht wiederfinden.

2) Von orthographischen Kleinigkeiten abgesehen.

knappe Auswahl, wo es mir nötig schien. Der O am nächsten steht A, die namentlich von den Korrekturen in O m. 2 nichts hat und somit öfter über die ursprüngliche Lesart von O Aufschluß gibt; dann d, wo sie da ist; eine mittlere Stellung nimmt D ein, mit ihr stimmen meist die Korrekturen in O m. 2, soweit sie nicht auf Konjektur beruhen. B und die sehr schlecht geschriebene P sind eng verwandt und bieten einen ziemlich stark geänderten bzw. interpolierten Text (von den Interpolationen einige Proben im Apparat).

p hat S. 220, 1 allein die im Arabischen vorhandene Überschrift erhalten, stimmt aber sonst mit den geringeren Handschriften, soweit sie mir bekannt ist.

Als Verfasser der Schrift gibt die arabische Überlieferung IBN AL HAITAM, und nach S. 219, 18 ff. haben wir darin eine relativ selbständige Arbeit von ihm zu sehen. Aber nach der ganzen Stellung der arabischen Geometrie ist es von vornherein gegeben, daß er formell und inhaltlich auf der griechischen Mathematik fußt; die „geometrae“ und „antiqui“ S. 218, 2 sind, wie gewöhnlich bei den Arabern, eben die Griechen. Die griechischen Quellen des rein mathematischen Teils sind noch nachweisbar.

Die Einleitung gibt, wie oben berührt, eine Übersicht der Entwicklung der griechischen Katoptrik. S. 218, 6—219, 4 enthalten die Grundlagen derselben, wie sie uns z. B. in der pseudoeuclidischen Katoptrik erhalten sind. S. 219, 4 ff. bezieht sich auf ANTHEMIUS (*περὶ παραδόξων μηχανημάτων* prop. 3)¹⁾, der ja auch S. 219, 10 ausdrücklich als Vorgänger erwähnt wird. Daß daselbst neben ihm auch ARCHIMEDES erscheint, hat kaum seinen Grund darin, daß er eine Katoptrik geschrieben hat; denn wir haben keine Andeutung von einer Bekanntschaft der Araber mit diesem noch im IV. Jahrhundert benutzten Werke; eher ist der Grund, daß ARCHIMEDES bei ANTHEMIUS genannt ist (eben um die Tradition von den Brennsiegeln des ARCHIMEDES zu retten, hatte ANTHEMIUS jene Kombination von specula plana pluris numeri erdacht). S. 219, 2—3 wird im neuen „fragmentum mathematicum Bobiense“ auf APOLLONIUS *περὶ πυρρός* zurückgeführt (s. Hermes XVI, S. 280 ff.; vgl. ebenda S. 637 ff. und meine Bemerkungen Zeitschr. f. Mathem. 28, 1883, Hist. Abt. S. 121 ff.). Auf dasselbe Fragment bezieht sich S. 219, 12—15. Daß unser Verfasser S. 219, 17 ff. bei seinen Vorgängern Beweise vermißt, während doch im fragmentum Bobiense solche da sind, wiegt nicht schwer, besonders da Z. 19 hinzugefügt wird: *expositione sufficiente*; vielleicht denkt er besonders (vgl. S. 219, 23 ff.) an die Beschreibung der mechanischen

1) In WESTERMANN'S *Paradoxographi Graeci*, S. 157 ff.

Herstellung parabolischer Spiegel, die wahrscheinlich ganz selbständig ist, oder jener Ausspruch ist gar nur ein Widerhall von ANTHEMIUS S. 157.

Von den Voraussetzungen (radices S. 220, 1 ff.) ist Nr. 1 allgemeine Voraussetzung der griechischen Optik (ausgeführt von THEON in seiner Einleitung zur Optik EUKLIDS, s. HEIBERG, *Studien über EUKLID* S. 139 ff.). Nr. 2—3 finden sich in der pseudoeuklidischen Katoptrik prop. 1; die übrigen sind nur Worterklärungen. Von den Sätzen ist Nr. 1, der Hauptsatz vom Brennpunkt der Parabel, innerhalb der Literatur erst im fragmentum Bobiense nachweisbar (Zeitschr. f. Mathem. 28, 1883, Hist. Abt. S. 122 ff.), aber ZEUTHEN, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* S. 367 ff., hat es sehr wahrscheinlich gemacht, daß die Kenntnis des Satzes viel höher hinaufreicht; beweisend hierfür ist u. a. der Umstand, daß ANTHEMIUS selbst erwähnt, daß seine Vorgänger konische Hohlspiegel konstruiert hatten (S. 157 ed. WESTERMANN). Die Brennpunkteigenschaften der Ellipse und Hyperbel sind von APOLLONIUS erwähnt (ZEUTHEN, a. a. O. S. 365 f.). Der Beweis des Satzes in unserer Schrift ist in der Form von demjenigen des fragmentum Bobiense ganz abweichend, benutzt aber nur Sätze aus EUKLID und APOLLONIUS.

Prop. 2 steht bei ARCHIMEDES, De conoid., prop. 11a (ohne Beweis).

Daß die Schrift später vielfach benutzt worden ist, geht schon aus den zahlreichen Abschriften hervor. Fast wörtlich ist sie von R. BACO bzw. dem Verfasser des „Tractatus de speculis“ in dieser Schrift benutzt worden. Auch in anderen Schriften hat sie ROGER BACO zitiert und verwendet.¹⁾ Auch WITelo hat aus ihr das Wesentliche übernommen, er war ein naher Freund von WILHELM VON MOERBEK, dem Besitzer der Hs. O.

Die hierher gehörigen Stellen finden sich bei WITelo (Opt. IX, 41—44, und zwar ist IX, 41 = prop. 1; 42 = 3; 43 = 4; 44 = 5). Zum Teil finden sich sogar Anklänge in den Worten (IX, 44 assumatur lamina ferri boni vel chalybis = S. 229, 5); auch die Buchstaben auf den Figuren von IX, 41, die wie unsere prop. 1 dreiteilig sind, stimmen genau überein. WITelo hat also unzweifelhaft die vorliegende Abhandlung benutzt und für seine Zwecke zusammengezogen. Das von ROSE, *Anecd.* II, p. 292 Anm. 1 angeführte Zitat von ANTHEMIUS bei WITelo V, 65 scheint dagegen auf die Abhandlung *περὶ παραδόξων μηχανημάτων* (mittelbar oder unmittelbar) zu gehen.

L. B. ALBERTI²⁾ erwähnt den Mangel der gewöhnlichen Spiegel, und daß dieser beim parabolischen gehoben ist: „di questo specchio parla il

1) Vgl. hierzu S. VOGL, *Die Physik ROGER BACOS*, Erlangen 1906, S. 71.

2) *Opere volgari*, ed. BONUCCI, Firenze 1843—49, IV, S. 138 ff.

maestro delli specchi (nach dem Herausgeber EUKLID!) molto prolisso e lungo e molti altri autori.“

Weiter erwähnt sie JOHANNES PECKHAM, Erzbischof von Canterbury, 1228—1291 (*Perspectiva communis* lib. II, prop. 54), der von Konkavspiegeln spricht, die nach der im Buch über Brennspiegel angegebenen Methode hergestellt sind, und die alle Strahlen in einen Punkt vereinen.

CARDANUS¹⁾ kennt die Spiegel auf Grund von Nachrichten, die ihm aus Schriften des MAUROLYCUS durch eine Notiz bei CONRADIN GESSNER bekannt geworden sind; weiter beschreibt dieselben sehr ausführlich J. B. PORTA in seiner *Magia naturalis*.

REGIOMONTANUS berichtet in seinem Schreiben an CHRISTIAN RÖDER vom 4. Juli 1471: „Habeo speculum ARCHIMEDIS annulare ex portione parabolica factum, cuius margo circularis maior quinque pedes continet, minor autem tres; profunditas vero speculi est bipedalis.“²⁾

Über weitere Verwendungen der parabolischen Hohlspiegel vgl. E. WIEDEMANN, *Annalen der Physik* (WIEDEMANN-Reihe) **39**, 1890, S. 110 und S. VOGL, *Die Physik ROGER BACOS*, Erlangen 1906; *Über die (Pseudo-) EUKLIDISCHE Schrift „De speculis“*, *Archiv für die Gesch. der Naturwiss.* **1**, 1909, S. 419—435.

Auf die teilweise Ausgabe der lateinischen Übersetzung der Schrift über den parabolischen Hohlspiegel durch GOGAVA soll später zurückgekommen werden; ebenso auf eine von ihm herausgegebene Schrift über die Parabel, die am Schluß eine Konstruktion des parabolischen Hohlspiegels schildert.

1) CARDANUS, *De subtilitate* lib. 4.

2) Siehe M. CURTZE, *Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss.* **12**, 1902, S. 335

Über das angebliche Dezimalbruchzeichen einiger der ältesten gedruckten Rechenbücher.

Von G. ENESTRÖM in Stockholm.

In neueren mathematisch-historischen Arbeiten wird nicht selten behauptet, daß einige Rechenbücher aus dem 15. Jahrhundert und dem Anfang des 16. Jahrhunderts ein besonderes Dezimalbruchzeichen bieten, und daß man also schon damals der Erfindung der Dezimalbrüche sehr nahe gewesen war.

Die Behauptung scheint auf C. I. GERHARDT zurückzugehen, der in seiner *Geschichte der Mathematik in Deutschland* einen Bericht über das Rechenbuch CHR. RUDOLFFS brachte und dabei bemerkte¹⁾: „In betreff der Division durch 10, 100, 1000 u. s. w. gibt RUDOLFF die Regel, so viel Ziffern als der Divisor Nullen enthält, im Dividendus „mit einer virgel“ abzuschneiden, also die erste Bezeichnung der Dezimalbrüche“. Diese Bemerkung wiederholte M. CANTOR in der ersten Auflage des zweiten Bandes der *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*²⁾, aber die sechs letzten Worte GERHARDTS erweiterte er zur folgenden Behauptung: „mit anderen Worten: der Erfindung der Dezimalbrüche ist RUDOLFF näher gewesen als irgend ein Zeitgenosse [gesperrt von CANTOR selbst!], aber daß es eine Erfindung war, erkannte die Zeit noch nicht“. Indessen bekam CANTOR später von G. WERTHEIM die briefliche Mitteilung, daß schon P. BORGI (1484) bei der Division durch $a \cdot 10^n$ n Stellen rechts abschnitt, und darum modifizierte er in der zweiten Auflage der *Vorlesungen* seinen Ausspruch auf folgende Weise³⁾: „mit anderen Worten: RUDOLFF ist ähnlich wie vor ihm PIERO BORGI (S. 305) der Erfindung der Dezimalbrüche recht nahe gewesen, aber daß es eine Erfindung war, erkannte die Zeit noch nicht“. Unter Bezugnahme auf diese Angabe von

1) GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, München 1877, S. 39.

2) CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2, Leipzig 1892, S. 366.

3) CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2², Leipzig 1900, S. 399.

CANTOR hat auch J. TROPFKE behauptet, daß BORGI und RUDOLFF der Erfindung der Dezimalbrüche sehr nahe gewesen sind.¹⁾

Die Quellen, aus denen GERHARDT, WERTHEIM und TROPFKE geschöpft haben, sind die Ausgabe 1540 des Rechenbuches von RUDOLFF, die Originalausgabe der *Opera de arithmetica* von BORGI und die Ausgabe 1550 des Rechenbuches von RUDOLFF. Indessen ist es eigentlich unnötig, auf dieses Rechenbuch Bezug zu nehmen, denn schon in seiner *Algebra*, die ein Jahr vor dem Erscheinen der ersten Auflage des Rechenbuches herausgegeben wurde, hat RUDOLFF genau das Verfahren, um das es sich hier handelt, gelehrt. Hier unten bringe ich die betreffende Stelle wörtlich zum Abdruck.²⁾

Merck das 1 weder multipliziert noch diuidiert / darumb wañ du wilt teilen durch 10. schneid ab die erst figur von der zal so geteylt sol werden. Ist alssdañ die ordnung der zalen gegen der linckē hant der quocient / vñ die erst abgeschnitten figur das übrig. zu exempel / ich teile 652 durch 10. stet also 65|2. ist 65 der quocient vnnd 2 das übrig. Kompt aber ein zal durch 100 zu teilen / schneid ab die ersten zwo figuren / durch 1000 die ersten drey / also weiter für yede 0 ein figur. Item wañ der teyler vorne ein / zwo oder drey nulla hat / setz die nulla vnder die ersten figuren / darnach teyl durch die bedeütlichen figuren wie du vnderricht bist / Als 1377678 durch 3400. Setz also.

11	11	112	
1377678	1377678	1377678	fa. 405.
344 00	344400	344400	
3	33	33	Rest. 678.

Im Rechenbuche wird diese Regel nebst den Beispielen mit unwesentlichen Änderungen wiederholt, und weiter bemerkt RUDOLFF³⁾:

Item wañ es sich begeben wird in der Regel de Tri / das mañ ein zal in die ander diuidirt / vñ sie beid vorna (!) nulla haben / so schneid ab von einer zal souil nulla als von der andern / vnd lass dich die selbigen nichts mer anfechten.

4567 0	45678 0	4560 00
36 0	24 0 0	16 00.

1) TROPFKE, *Geschichte der Elementarmathematik* 1, Leipzig 1902, S. 89.

2) RUDOLFF, *Behend vnnd Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre*, Straßburg 1525, Bl. B j^a.

3) RUDOLFF, *Künstliche rechnung mit der ziffer vnd mit den zal pfenningen*, Ausgabe Nürnberg 1540, Bl. B ij^b.

BORGI behandelt das nämliche Divisionsverfahren viel ausführlicher wie RUDOLFF, und zwar als die letzte der von ihm gelehrtten drei Methoden.¹⁾ Diese Methode erwähnt er vorläufig auf folgende Weise:

vn altro modo anchora e de partir, e questo si acade quando nel tuo partidor hauesti vna o piu nulle, nelle vltime figure cominciando da le vnita seguendo le desene, e centenara &c. pur che fra esse nulle non fusse posta alcuna altra figura, & in questo modo hai a lassar del numero de partir tante figure quante nulle hai nel partidor, & el resto dele figure del numero de partir: partir per el resto dele figure del partidor lassando le nulle como nel processo mio vederai apertamente in figura.

Nachdem BORGI die zwei ersten Methoden auseinandergesetzt hat, kommt er auf die dritte zurück und erläutert diese an einer sehr großen Zahl von Beispielen, von denen ich hier die folgenden zum Abdruck bringe:

E se volesti saper quanti centenara sono in .12345. farai cosi perche el centenar si formano con do nulle a dinotar che **123|45** non soprauanzi alcuna desena, ne alcuna vnita, e perho separa le vnita e le desene como vedi & el resto che sono .123. sono centenara: dunque .12345. sono .123. centenara. e .45. vnita.

Ma se volesti partir .123456. per .300. prima perche el partidor hanno .2. nulle, separerai .2. figure como festi di sopra, poi quelle che riman che sono .1234. parti per la figura **per 300** che riman del partidor che e .3. & insiranno .411. & **1234|156** avanza .1. elqual metti appresso le do figure che **411 —** separasti, e dira .156. elqual messo disopra dalla linea, **411 $\frac{156}{300}$** & el partidor disotto dira $\frac{156}{300}$ & harai che per ogni parte tocchera $\frac{156}{300}$ & similiter farai a partir per .400. e per .500. &c. per fina a .900. semper separando do figure, & quelle che resta partir per li centenara che e nel partidor.

Vergleicht man jetzt die vorangehenden Auszüge, so findet man leicht, daß RUDOLFF in betreff des angeblichen Dezimalbruchzeichens nichts Neues bringt. Im Gegenteil könnte man sagen, daß bei ihm die Anwendung dieses Zeichens beschränkter wie bei BORGI ist; wenn es sich um Divisoren von der Form $a \cdot 10^n$ handelt, bedient sich RUDOLFF nicht der

1) BORGI, *Opera de arithmetica*. Die Originalausgabe ist mir nicht zugänglich, und ich zitiere nach der Ausgabe Venedig 1660, wo die im Texte abgedruckten Stellen Bl. 16^a, Bl. 20^b—21^b stehen. Daß in der Originalausgabe der Wortlaut derselbe ist, habe ich keinen Anlaß zu bezweifeln, aber da ich weiter unten nachweise, daß das Verfahren schon vor BORGI bekannt war, so ist diese Frage für meine Untersuchung von untergeordneter Bedeutung.

„virgel“, sondern eines anderen Verfahrens, und weder in der Algebra noch in dem Rechenbuch kommt eine Bemerkung vor, die darauf hindeutet, daß die Beschränkung als ein bewußter Schritt gegen unsere Anwendung des Dezimalbruchzeichens betrachtet werden kann. Übrigens kommt das von RUDOLFF benutzte Zeichen oder ein ähnliches bei vielen seiner Zeitgenossen vor; unter diesen nenne ich nur beispielsweise F. PELLIZZATI¹⁾ und N. TARTAGLIA.²⁾

Aber auch nicht BORGI ist Erfinder des Striches, um den es sich hier handelt, denn schon 20 Jahre vor der Veröffentlichung seiner *Opera de arithmetica* findet er sich bei REGIOMONTANUS. Beispielsweise führt dieser im Jahre 1463 die Division $653848439 : 60000$ dadurch aus, daß er erst $65384|8439$ schreibt und dann 65384 durch 6 dividiert.³⁾

Ich komme jetzt zu der Frage, die in erster Linie meinen Artikel veranlaßt hat, nämlich: „Hat man Recht, diese Bezeichnung mit unserem Dezimalbruchzeichen in Beziehung zu setzen?“, und diese Frage kann, sofern die von GERHARDT, CANTOR und TROPFKE zitierten Schriften in Betracht gezogen werden, leicht erledigt werden. Die Auszüge zeigen nämlich, daß die Strich-Division (ich erlaube mir der Kürze halber, diesen Ausdruck anzuwenden) zunächst nur den Zweck hatte, die ganze Zahl zu ermitteln, die bei der Division durch eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ erhalten wird; durch den Strich wurden die Ziffern, die für die Ermittlung der ganzen Zahl nicht in Betracht kommen konnten, von den übrigen Ziffern getrennt. Daß BORGI nicht daran dachte, den Strich als unser Dezimalkomma zu benutzen, wird aus seiner Bezeichnungsweise $1234|156$ ersichtlich, denn hier bedeutet ja $|156$ nicht $0 \cdot 156$, sondern $\frac{156}{300}$. Daß RUDOLFF auf diesen Gedanken gekommen ist, kann aus den Stellen, um die es sich handelt, nicht herausgelesen werden, und auch bei den späteren Verfassern, die die Strich-Division oder ein ähnliches Verfahren benutzt haben, findet sich keine Spur eines solchen Gedankens.⁴⁾

Aber kann man nicht auf Grund der Auszüge sagen, daß REGIOMONTANUS, BORGI und RUDOLFF der Erfindung der Dezimalbrüche recht nahe gewesen sind? Meiner Ansicht nach ist ein solcher Ausspruch unzutreffend, und um diese Ansicht zu begründen, erlaube ich mir ein Beispiel aus einem ganz

1) PELLIZZATI, *De la art de arithmeticha*, Turin 1492, Bl. 11^a; siehe das Faksimile bei D. E. SMITH, *Rara arithmetica*, Boston 1908, S. 52.

2) TARTAGLIA, *General trattato di numeri, et misura* 1, Venedig 1556, Bl. 30^b—31^a.

3) Siehe M. CURTZE, *Biblioth. Mathem.* 1., 1900, S. 507; *Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss.* 12, 1902, S. 225.

4) Vgl. z. B. CHR. URSTITIUS, *Elementa arithmeticae*, Ausgabe Basel 1586, S. 39, sowie L. L. JACKSON, *The educational significance of sixteenth century arithmetic*, New York 1906, S. 75.

anderen Gebiete zu wählen. Ich nehme an, daß ich bei einer Touristenwanderung auf eine bisher unbekannte Quelle gestoßen bin, aus der ich trinke, und deren Existenz ich dann in einem Zeitungsartikel beiläufig erwähne. Ich nehme weiter an, daß diese Quelle später von einem Chemiker wiederentdeckt wird, und daß dieser aus gewissen Umständen, deren Bedeutung nur ein Fachmann verstehen kann, die Quelle als stark radioaktiv erkennt. Nun frage ich: Kann man sagen, daß ich der Entdeckung der Radioaktivität der Quelle sehr nahe gewesen bin? Meines Erachtens freilich nicht, und auf ganz dieselbe Weise muß ich in Abrede stellen, daß die Mathematiker, die ich oben genannt habe, der Erfindung der Dezimalbrüche sehr nahe gewesen sind, sofern man nur auf die bisher erwähnten Schriften Bezug nimmt. Der Strich, der die Dezimalen von den ganzen Ziffern trennt, hat gar keinen Wert, wenn man nicht im voraus versteht, mit Dezimalbrüchen zu rechnen, und daran haben die fraglichen Mathematiker, soweit man aus den Belegen schließen kann, nicht gedacht.

Andererseits ist natürlich der Ausdruck: „sehr nahe sein“ so schwebend, daß ich den von mir beanstandeten Ausspruch nicht als durchaus unrichtig bezeichnen will. In betreff der von mir zitierten Angabe TROFFKES sowie hinsichtlich der modifizierten Angabe CANTORS bemerke ich also nur, daß sie meiner Ansicht nach unzutreffend und darum irreleitend sind. Dagegen kann die ursprüngliche Angabe CANTORS von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus bemängelt werden. Auf den Umstand, daß CANTOR vermutlich den nicht ganz klaren Ausdruck GERHARDTS: „also die erste Bezeichnung der Dezimalbrüche“ mißverstanden hat¹⁾, lege ich kein besonderes Gewicht. Aber sehr schlimm ist, daß CANTOR bei der Benutzung der Angabe GERHARDTS eine der elementarsten Regeln der historischen Forschung vergessen hat, nämlich daß man erst die Frage: „Konnte GERHARDT wirklich 1877 wissen, daß RUDOLFF der Erfindung der Dezimalbrüche näher gewesen war als irgend ein Zeitgenosse?“ untersuchen sollte. Offenbar muß man diese Frage sofort mit Nein beantworten, denn kein Historiker der Mathematik (möglicherweise mit Ausnahme von BALDASSARRE BONCOMPAGNI) konnte 1877 in der Lage gewesen sein, die zahlreichen (zum Teil ungedruckten) Rechenbücher aus dem Ende des 15. und dem Anfange des 16. Jahrhunderts durchzuarbeiten, und für GERHARDT wäre dies ganz einfach unmöglich gewesen. Nicht einmal das in vielen Auflagen erschienene Rechenbuch BORGIS scheint GERHARDT 1877 genau studiert zu haben. Freilich ist in

1) Vermutlich wollte GERHARDT nur sagen, daß die Bezeichnung, die tatsächlich bei RUDOLFF vorkommt, die erste Bezeichnung der Dezimalbrüche sei, ohne sich bestimmt über den Erfinder dieser Bezeichnung auszusprechen.

der zweiten Auflage der *Vorlesungen* der rein elementare Fehler CANTORS in Fortfall gekommen, aber noch wird auf seine ursprüngliche Angabe hingewiesen¹⁾, und darum ist es angebracht, auf den Fehler dieser Angabe besonders aufmerksam zu machen.

* * *

Durch das Vorhergehende glaube ich nachgewiesen zu haben, daß die bisher angeführten Belege für die Anwendung eines Dezimalbruchzeichens am Anfang des 16. Jahrhunderts hinfällig werden. Aber merkwürdigerweise gibt es eine Schrift von RUDOLFF, die wirklich als ein solcher Beleg benutzt werden kann, nämlich das *Exempel Büchlin*, das bekanntlich in Wien 1530 erschien²⁾; allerdings handelt es sich nicht um Division, sondern um Multiplikation. An der betreffenden Stelle³⁾ berechnet RUDOLFF sukzessiv die Werte von $375(1 + \frac{5}{100})^n$ für $n=1, 2, \dots, 10$. Für $n=1$ schreibt er das Resultat 393|75, das ja tatsächlich den Dezimalbruch 393,75 bedeutet, und die folgenden Werte bekommt er dadurch, daß er sukzessiv $\frac{5}{100}$ des schon erhaltenen Resultates berechnet und dann addiert. Für $n=4$ sieht die Rechnung wie folgt aus (die erste Zahl ist der Wert für $n=3$):

$$\begin{array}{r} 434|109\,375 \\ 21\,705\,46875 \\ 455|814\,84375. \end{array}$$

Hier hat RUDOLFF wirklich mit Dezimalbrüchen gerechnet; wenn man ferner bemerkt, daß der Strich bei RUDOLFF gewissermaßen ein Komma ist — bei der Interpunktion wird nämlich ein schräger Strich als Komma benutzt —, so kann man sagen, daß sowohl die moderne Anwendung wie die moderne Bezeichnung bei RUDOLFF vorkommt, freilich nur im Vorübergehen bei einer gewissen Art von Multiplikation, und ohne daß RUDOLFF die Tragweite seines Verfahrens verstanden hat.

Die ursprüngliche CANTORSche Behauptung: „Der Erfindung der Dezimalbrüche ist RUDOLFF näher gewesen als irgend ein Zeitgenosse“ wird also in Wahrheit richtig, wenn man nach „RUDOLFF“ die Worte „soweit jetzt bekannt ist“ einschaltet, obgleich der einzige Beleg, den CANTOR geboten hat und bieten konnte, lediglich beweist, daß die Behauptung nicht von einem Sachkundigen herrührt.

1) Siehe z. B. A. VOSS, *Über das Wesen der Mathematik*, Leipzig 1908, S. 11.

2) Das Faksimile des Titelblattes hat D. E. SMITH, a. a. O. S. 159 gebracht.

3) RUDOLFF, *Exempel Büchlin*, Bl. hij* (ein Exemplar in der Kgl. Bibliothek in Berlin). D. E. SMITH, der zuerst auf die Stelle aufmerksam machte, hat dieselbe in seinem Aufsatz *The invention of the decimal fraction*; Teachers college bulletin (New York) 5, 1910, S. 18 im Faksimile wiedergegeben.

Un tentativo di Eulero di evitare le quantità complesse nella integrazione delle equazioni differenziali lineari.

Di G. VIVANTI in Pavia.

È noto come, anche dopo che le quantità complesse e le loro funzioni hanno preso un posto notevole nell'analisi, si sia cercato, per ragioni pratiche, di svolgere il calcolo infinitesimale indipendentemente da esse, e con quali artifici si sia raggiunto tale scopo in varie parti di questa disciplina, p. es. nell'integrazione delle funzioni razionali e in quella della radice quadrata d'un polinomio di secondo grado. Un solo punto sembra essersi mostrato ribelle ad ogni tentativo di tal genere. Nella teoria delle equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti, stabilito che una radice a dell'equazione caratteristica dà luogo ad un integrale e^{ax} dell'equazione proposta, si suole osservare che, se a è un numero complesso $b + ic$, l'equazione caratteristica ammette anche la radice coniugata $\bar{a} = b - ic$, e quindi che l'equazione differenziale ha i due integrali e^{ax} , $e^{\bar{a}x}$, dai quali per addizione e sottrazione risultano gli integrali reali $e^{bx} \cos cx$, $e^{bx} \sin cx$. Per rendere rigoroso tale procedimento, bisogna dimostrare che la relazione:

$$\frac{d}{dx} e^{ax} = a e^{ax}$$

sussiste anche per a complesso; ciò che non tutti curano di fare. Ora in una notissima memoria di EULERO¹⁾ si trova un tentativo, parziale e non completamente riuscito, di evitare le quantità complesse; tentativo interessante, e perchè, per quanto io so, è l'unico che sia stato fatto, e perchè può servire di base ad una teoria delle equazioni lineari a coefficienti costanti del tutto indipendente dagli imaginari.

Riassumo anzitutto il contenuto della memoria di EULERO.

1) *De integratione aequationum differentialium altiorum graduum*; Misc. Berol. 7, 1743, p. 193—242.

Un tentativo di Eulero di evitare le quantità complesse nella integrazione etc. 245

Dopo avere stabilito i teoremi generali, che riducono l'integrazione dell' equazione lineare omogenea:

$$(1) \quad Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + \dots + N \frac{d^ny}{dx^n} = 0$$

alla ricerca di n integrali particolari, EULERO osserva che, se i coefficienti sono costanti, l'equazione ammette l'integrale $y = e^{px}$, dove p denota una radice dell' equazione algebrica:

$$(2) \quad A + Bp + Cp^2 + \dots + Np^n = 0;$$

sicchè, se $px - q$ è un divisore del primo membro di questa equazione, si ha l'integrale $y = \alpha e^{\frac{qx}{p}}$, dove α è una costante arbitraria. Per vincere le difficoltà derivanti dall' esistenza di radici multiple o immaginarie della equazione (2), conviene, prosegue EULERO, osservare più attentamente le relazioni che esistono tra la (2) e la (1). Come da questa si ha quella ponendo z^k in luogo di $\frac{d^ky}{dx^k}$, nello stesso modo dai fattori della (2) si otterranno equazioni differenziali, che saranno necessariamente contenute nella (1), e però daranno integrali particolari di essa. Così dal fattore $px - q$ della (2) si deduce «per legem nexus» l'equazione differenziale:

$$qy - p \frac{dy}{dx} = 0,$$

che integrata dà $y = \alpha e^{\frac{qx}{p}}$. Di qui si comprende che, se p. es. $p + qz + rz^2$ è un divisore della (2), l'equazione:

$$py + q \frac{dy}{dx} + r \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

darà un integrale della (1). Con ciò si toglie la difficoltà relativa ai fattori multipli della (2). Se questa ha il fattore $(p - qz)^2$, si ottiene corrispondentemente l'equazione:

$$p^2y - 2pq \frac{dy}{dx} + q^2 \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

che colla sostituzione:

$$y = e^{\frac{px}{q}} u$$

diviene $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$; questa ha l'integrale $u = \alpha + \beta x$, quindi si ha:

$$y = e^{\frac{px}{q}} (\alpha + \beta x).$$

Analogamente per un fattore cubico. Se poi:

$$(3) \quad p + qz + rz^2 + \dots$$

è un divisore comunque composto della (2), ogni integrale dell'equazione differenziale corrispondente sarà pure integrale della (1), giacchè i fattori lineari della (3) sono pure fattori della (2).

Se la (2) ha una coppia di radici complesse coniugate, il fattore quadratico corrispondente può porsi sotto la forma:

$$(4) \quad f^2 - 2f \cos \varphi \cdot z + z^2;$$

esso dà origine all'equazione differenziale:

$$f^2 y - 2f \cos \varphi \frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Ponendo:

$$y = e^{fx \cos \varphi} u,$$

questa diviene:

$$f^2 \sin^2 \varphi \cdot u + \frac{d^2 u}{dx^2} = 0,$$

equazione di cui l'integrale è:

$$u = \alpha \sin (fx \sin \varphi + \beta).$$

Ne segue:

$$y = \alpha e^{fx \cos \varphi} \sin (fx \sin \varphi + \beta),$$

od anche:

$$y = e^{fx \cos \varphi} [\alpha \cos (fx \sin \varphi) + \beta \sin (fx \sin \varphi)].$$

Allo stesso risultato si giungerebbe partendo dai fattori lineari della (4), che sono:

$$z - f(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z - f(\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Di qui si apprende come debba trattarsi il caso di un fattore multiplo della forma (4). Abbia p. es. la (2) il fattore:

$$(f^2 - 2f \cos \varphi \cdot z + z^2)^2;$$

esso può scriversi:

$$[z - f(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^2 [z - f(\cos \varphi - i \sin \varphi)]^2,$$

e se ne deduce, per ciò che sopra fu detto, l'integrale:

$$y = e^{fx(\cos \varphi + i \sin \varphi)} (\eta + \theta x) + e^{fx(\cos \varphi - i \sin \varphi)} (\lambda + \mu x).$$

Ora:

$$(5) \quad \eta e^{fx \sin \varphi} + \lambda e^{-fx \sin \varphi} = \alpha \cos (fx \sin \varphi) + \beta \sin (fx \sin \varphi),$$

quindi:

$$y = e^{fx \cos \varphi} [(\alpha + \beta x) \cos (fx \sin \varphi) + (\gamma + \delta x) \sin (fx \sin \varphi)].$$

Così per potenze superiori, essendo le funzioni esponenziali immaginarie esprimibili mediante funzioni trigonometriche reali in virtù della relazione (5).

Si conclude che dalla risoluzione dell' equazione (2) si può ottenere l'integrale completo della (1).

Dal riassunto che precede emergono due circostanze notevoli. Anzitutto EULERO asserisce che, se (3) è un fattore dell' equazione caratteristica (2) della (1), gli integrali dell' equazione differenziale, di cui la (3), eguagliata a zero, è l'equazione caratteristica, sono integrali della (1); ma non dà di ciò alcuna dimostrazione. In secondo luogo egli ottiene gli integrali corrispondenti ad una coppia di radici complesse coniugate semplici della (2) direttamente in forma reale; ma trova necessario porli sotto la solita forma complessa per trattare il caso delle radici immaginarie multiple.

Non pare che alcuno si sia preoccupato di riparare a queste imperfezioni; lo stesso EULERO, nelle sue *Institutiones calculi integralis*, segue la via comune.

Io mi propongo di mostrare brevemente come, partendo dalle idee contenute nella classica memoria di EULERO, si possa costruire un metodo generale di integrazione diretta in forma reale delle equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti.¹⁾

Scriviamo le (1), (2) brevemente così:

$$(6) \quad F(y) = 0,$$

$$(7) \quad f(z) = 0.$$

Il simbolo F ha le seguenti proprietà:

$$F(y + y_1) = F(y) + F(y_1),$$

$$F(Cy) = CF(y),$$

$$F\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx} F(y).$$

Si dimostra che, se:

$$f(z) = \varphi(z) \psi(z),$$

e se:

$$(8) \quad \Phi(y) = 0, \quad \Psi(y) = 0$$

sono le equazioni differenziali aventi per equazioni caratteristiche rispettivamente:

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = 0,$$

si ha:

$$F(y) = \Phi(\Psi(y)) = \Psi(\Phi(y)).$$

Ne segue immediatamente, che ogni integrale dell' una o dell' altra delle (8) soddisfa alla (6). Reciprocamente, se due equazioni differenziali:

1) Per le dimostrazioni vedi le mie *Lezioni di analisi infinitesimale* in corso di stampa.

$$F(y) = 0, \quad \Phi(y) = 0,$$

aventi le equazioni caratteristiche:

$$f(z) = 0, \quad \varphi(z) = 0,$$

sono tali, che ogni integrale della seconda è un integrale della prima, $f(z)$ è divisibile per $\varphi(z)$.

Di qui risulta che, se $f(z)$ si scompone in più fattori primi tra loro, gli integrali delle corrispondenti equazioni differenziali sono tra loro linearmente indipendenti e sono quindi sufficienti per formare l'integrale generale dell'equazione proposta.

Con ciò l'integrazione di qualunque equazione lineare omogenea a coefficienti costanti è ridotta a quella delle equazioni, le cui equazioni caratteristiche appartengono ai tipi seguenti:

$$z - a = 0,$$

$$(z - a)^m = 0 \quad (m > 1),$$

$$z^2 - 2bz + h^2 = 0 \quad (b^2 < h^2),$$

$$(z^2 - 2bz + h^2)^m = 0 \quad (b^2 < h^2, m > 1).$$

Tali equazioni sono:

$$(9) \quad \Phi(y) = \frac{dy}{dx} - ay = 0,$$

$$(10) \quad \Phi^{[m]}(y) = 0,$$

$$(11) \quad \Psi(y) = \frac{d^2y}{dx^2} - 2b \frac{dy}{dx} + h^2y = 0,$$

$$(12) \quad \Psi^{[m]}(y) = 0,$$

dove:

$$\Phi^{[2]}(y) = \Phi(\Phi(y)), \quad \Phi^{[3]}(y) = \Phi(\Phi^{[2]}(y)),$$

e in generale:

$$\Phi^{[m]}(y) = \Phi(\Phi^{[m-1]}(y)).$$

L'integrale della (9) è:

$$y = Ce^{ax}.$$

L'integrazione della (10) si fonda sulla seguente proprietà del simbolo Φ :

$$\Phi^{[m]}(xy) = x\Phi^{[m]}(y) + m\Phi^{[m-1]}(y).$$

Segue da essa, che, se y è un integrale della $\Phi^{[m-1]}(y) = 0$, xy è un integrale della $\Phi^{[m]}(y) = 0$; quindi gli integrali della (10) sono:

$$e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}, \dots, x^{m-1}e^{ax}.$$

Alle equazioni (11), (12) applichiamo la sostituzione:

$$y = e^{bx}u;$$

si ottiene:

Un tentativo di Eulero di evitare le quantità complesse nella integrazione etc. 249

$$\mathcal{P}(y) = e^{bx} \mathcal{Q}(u), \quad \mathcal{P}^{[m]}(y) = e^{bx} \mathcal{Q}^{[m]}(u),$$

dove:

$$\mathcal{Q}(u) = \frac{d^2 u}{dx^2} + c^2 u,$$

essendo:

$$c^2 = h^2 - b^2.$$

Le (11), (12) divengono quindi:

$$(13) \quad \mathcal{Q}(u) = 0,$$

$$(14) \quad \mathcal{Q}^{[m]}(u) = 0.$$

La (13) ha gli integrali:

$$u = \text{sen } cx, \quad u = \cos cx;$$

quindi gli integrali della (11) sono:

$$e^{bx} \text{sen } cx, \quad e^{bx} \cos cx.$$

Inoltre si ha:

$$\mathcal{Q}^{[m]}(xu) = x\mathcal{Q}^{[m]}(u) + 2m\mathcal{Q}^{[m-1]}\left(\frac{du}{dx}\right);$$

ne segue che, se u è un integrale della $\mathcal{Q}^{[m-1]}(u) = 0$, xu è un integrale della $\mathcal{Q}^{[m]}(u) = 0$. Di qui si deduce che gli integrali della (14) sono:

$$\text{sen } cx, x \text{sen } cx, \dots, x^{m-1} \text{sen } cx,$$

$$\cos cx, x \cos cx, \dots, x^{m-1} \cos cx,$$

e quelli della (12):

$$e^{bx} \text{sen } cx, x e^{bx} \text{sen } cx, \dots, x^{m-1} e^{bx} \text{sen } cx,$$

$$e^{bx} \cos cx, x e^{bx} \cos cx, \dots, x^{m-1} e^{bx} \cos cx.$$

Con ciò il problema è completamente esaurito.

Die Erklärung der Vielseitigkeit der elliptischen Integrale bei Jacobi und Puiseux.

Von A. KRAZER in Karlsruhe.

In einem Feuilletonartikel der Frankfurter Zeitung vom 23. Juli 1904 (Nr. 203): „CARL GUSTAV JACOB JACOBI. Zur Centenarfeier“ sagt S. GUNDELFINGER: „Hätte WEIERSTRASS die noch heute ungedruckte Vorlesung über elliptische Funktionen genauer angesehen, so hätte er finden können, daß JACOBI bereits damals eine Hauptleistung von PUISEUX (Erklärung der Periodizität der Integrale auf Grund der Lehre von den Verzweigungspunkten) vorweggenommen hat.“ Da weder der im 1. Band der gesammelten Werke JACOBI¹⁾ abgedruckte Teil dieser Vorlesung, noch die JACOBI-Biographie KÖNIGSBERGERS²⁾ etwas enthält, was solche Prioritätsansprüche JACOBI begründen könnte, so wandte ich mich, als ich vor mehr als Jahresfrist den eingangs genannten Artikel las, an GUNDELFINGER mit der Bitte um Mitteilung jenes Materials, welches ihn zu seiner Auffassung veranlaßt habe. Aber auch nach freundlichst gewährter Einsicht in dieses mußte ich ihm mitteilen, daß ich mich seiner Ansicht nicht anschließen könne. Daraufhin hat GUNDELFINGER in der Bibliotheca Mathematica³⁾ den in Rede stehenden Teil der JACOBISCHEN Vorlesung veröffentlicht und nicht nur sein früheres Urteil aufrecht erhalten, sondern jetzt sogar noch angedeutet, daß PUISEUX die erste Anregung zu seinen Untersuchungen durch ROSENHAIN'S Preisarbeit⁴⁾, also indirekt durch JACOBI erhalten haben könne.

Dies veranlaßt mich, im folgenden meinen Standpunkt darzulegen. Wenn ich dabei etwas weiter aushole, als es gerade notwendig wäre, und manches wieder sage, was BRILL und NÖTHER⁵⁾ in ihrem ausgezeichneten

1) JACOBI, *Theorie der elliptischen Funktionen aus den Eigenschaften der Theta-reihen abgeleitet*; Ges. Werke 1, p. 497.

2) KÖNIGSBERGER, *CARL GUSTAV JACOB JACOBI. Festschrift* (1904).

3) GUNDELFINGER, *Aus JACOBI'S Vorlesungen über elliptische Funktionen 1835/36*; Biblioth. Mathem. 9, 1909, p. 211.

4) ROSENHAIN, *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe*; Mém. prés. p. div. sav. 11, 1851, p. 388 (deutsch in OSTWALD'S Klassiker Nr. 65).

5) BRILL und NÖTHER, *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit*; Jahresb. d. deutschen Mathem.-Verein. 8 (1892/93), 1894, p. 150 ff.

Berichte schon ausgeführt haben, so glaube ich auch dafür die Aufmerksamkeit des Lesers zu haben.

Die vorliegende Frage gehört in das Gebiet der komplexen Integration, wenn sie auch, und nicht zum Vorteil, bei JACOBI gar nicht als solche erscheint. Als den Schöpfer der komplexen Integration pflegt man CAUCHY zu nennen und dabei auf seine Abhandlung von 1825: *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*¹⁾ zu verweisen, und unter gewissen Einschränkungen, die wir bald sehen werden, auch mit Recht. Allerdings hat CAUCHY schon im Jahre 1814 in seiner großen Abhandlung: *Mémoire sur les intégrales définies*²⁾ komplexe Größen in Integrale eingeführt, und es haben, wie er in der Einleitung dieser Abhandlung sagt, dasselbe schon vor ihm EULER³⁾ und LAPLACE⁴⁾ getan, ja

1) Deutsch in OSTWALDS Klassiker Nr. 112.

2) Mém. prés. p. div. sav. 1, 1827; Oeuvres Sér. 1 (Bd. 1), p. 319. CAUCHY geht hier von der Tatsache aus, daß für zwei Funktionen P und Q zweier Variablen x und y , welche der Differentialgleichung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ genügen, wenn in dem betrachteten Gebiete die Bedingungen der Einwertigkeit, Endlichkeit und Stetigkeit erfüllt sind, die Formel:

$$\int_0^a [P(x \cdot b) - P(x \cdot 0)] dx = \int_0^b [Q(a \cdot y) - Q(0 \cdot y)] dy$$

besteht. Lediglich um solche Funktionen zu bilden, bedient sich CAUCHY komplexer Größen. Ist nämlich w irgendeine Funktion der komplexen Variable z , so genügen

$$P = w \quad Q = iw$$

der obigen Differentialgleichung. Das bekannteste Beispiel ist:

$$w = e^{-z^2},$$

wodurch die Formel:

$$\int_0^a [e^{-(x+bi)^2} - e^{-x^2}] dx = i \int_0^b [e^{-(a+vi)^2} - e^{-v^2}] dy$$

und, indem man a unendlich werden läßt und Reelles und Laterales trennt, die Formeln:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-b^2}, \quad \int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2bx dx = e^{-b^2} \int_0^b e^{-y^2} dy$$

entstehen.

3) Vgl. etwa *De valoribus integralium a terminis variabilis $x=0$ usque ad $x=\infty$ extensorum* [1781]; Instit. calc. integr. 4, Suppl. 5 Nr. 4, wo EULER in der Formel

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-kx} dx = k^{-a} \Gamma(a)$$

an Stelle von k eine komplexe Zahl $p+qi$ setzt und dadurch die Werte der Integrale:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-px} \cos qx dx, \quad \int_0^\infty x^{a-1} e^{-px} \sin qx dx$$

erhält.

4) Vgl. etwa *Théorie analytique des probabilités* L. 1, P. 2, No. 25 (Oeuvres 7, p. 96), wo LAPLACE mit Hilfe der Formel:

wie STÄCKEL¹⁾ gezeigt hat, gehen derartige Versuche bis auf LEIBNIZ und JOH. BERNOULLI zurück; aber in allen diesen Fällen ist, wie LAPLACE es wiederholt ausspricht, die Einführung des Komplexen nur „un moyen de découverte“ und er fügt bei: „Mais ces moyens, comme celui de l'induction, quoique employés avec beaucoup de précaution et de réserve, laissent toujours à désirer des démonstrations directes de leurs résultats.“²⁾ In der gleichen Weise spricht sich auch POISSON³⁾ zu den obigen Formeln EULERS aus.

CAUCHY findet⁴⁾ eine Rechtfertigung seines Verfahrens in der Auffassung des bestimmten Integrales als der Summe seiner Differentiale. Er sagt, wenn man nur die Variable von der einen Grenze zur anderen durch eine Reihe reeller Werte gehen lasse, könne die Funktion unter dem Integralzeichen recht wohl komplex sein; die Gleichung zerfalle dann in zwei Gleichungen, dem reellen und lateralen Teile entsprechend. In der

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

die Formel:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx = \frac{1}{2a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \sqrt{\pi}$$

auf die folgende Weise ableitet. Führt man auf der rechten Seite der Gleichung:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \left[\int_0^{\infty} e^{-\left(ax - \frac{bi}{2a}\right)^2} dx + \int_0^{\infty} e^{-\left(ax + \frac{bi}{2a}\right)^2} dx \right]$$

die neue Integrationsvariable t ein mit Hilfe der Gleichungen:

$$ax - \frac{bi}{2a} = t \quad \text{bzw.} \quad ax + \frac{bi}{2a} = t,$$

so erhält man:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx = \frac{1}{2a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \left[\int_{-\frac{bi}{2a}}^{\infty} e^{-t^2} dt + \int_{\frac{bi}{2a}}^{\infty} e^{-t^2} dt \right]$$

und hieraus, indem man in einem dieser beiden Integrale t durch $-t$ ersetzt:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx = \frac{1}{2a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

1) STÄCKEL, *Integration durch imaginäres Gebiet*; Biblioth. Mathem. 1., 1900, p. 109.

2) LAPLACE, *Mémoire sur les intégrales définies et leur application aux probabilités et spécialement à la recherche du milieu qu'il faut choisir entre les résultats des observations*; Mém. de l'acad. des sc. [de Paris] 11, 1810; Oeuvres 12, p. 361.

3) POISSON, *Mémoire sur les intégrales définies*; J. de l'éc. polyt. Cah. 16 (Bd. 9), 1813, p. 215.

4) CAUCHY, *Mémoire sur les intégrales définies, où l'on fixe le nombre et la nature des constantes arbitraires et des fonctions arbitraires que peuvent comporter les valeurs de ces mêmes intégrales, quand elles deviennent imaginaires*; Bull. de la soc. philom. 1822, p. 161 und: *Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles*. Postscriptum; J. de l'éc. polyt. Cah. 19 (Bd. 12), 1823, p. 511.

Tat hat auch CAUCHY in seiner Abhandlung von 1814 die oben angeführte Ausgangsgleichung nicht selbst, sondern nur die zwei, die aus ihr durch Trennung des Reellen und Imaginären entstehen; -in der eben zitierten Stelle wendet er sich aber unzweifelhaft gegen POISSON¹⁾, der gesagt hatte, daß man ursprünglich das bestimmte Integral als die Summe seiner Differentiale aufgefaßt habe, daß diese Auffassung aber später zurückgetreten und das bestimmte Integral immer mehr als die Differenz der Werte des unbestimmten Integrals an den Grenzen erschienen sei. Dann sei es ein zu beweisender Satz geworden, daß das bestimmte Integral gleich der Summe seiner Differentiale sei, und dieser Satz höre unter Umständen,

z. B. in dem Falle $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$, auf richtig zu sein. Man könne aber auch dann

die Übereinstimmung herstellen, wenn man die Variable x von der unteren Grenze zur oberen durch eine Reihe komplexer Werte gehen lasse. POISSON wertet dann das eben genannte Integral in der Tat mit Hilfe der Substitution $x = -e^{i\theta}$ aus und findet den Wert $(2n+1)\pi i$, wo n eine unbestimmte ganze Zahl ist.

So haben wir die merkwürdige Erscheinung, daß CAUCHY zuerst durch POISSON auf die komplexe Integration aufmerksam gemacht wird, und daß POISSON sie in einem speziellen Falle wirklich durchführt, während CAUCHY das Verfahren zunächst ablehnt, da man jetzt nicht mehr Reelles und Laterales trennen könne, die Resultate also unsicher seien. Dann aber verfolgt POISSON den Gedanken nicht weiter, CAUCHY dagegen greift ihn auf und erscheint zwei Jahre später mit seiner grundlegenden Arbeit.

Auch LAPLACE hat in dem oben angeführten Beispiel eine Integration durch das Komplexe ausgeführt, aber er war sich der Tragweite dieses Schrittes nicht bewußt; ihm fehlte ja auch die Anschauung der komplexen Zahlenebene. Wie es damit bei POISSON stand, ist zweifelhaft; denn trotz der an der angezogenen Stelle herrschenden Breite findet sich keine Andeutung, daß die unbestimmte Zahl n der Anzahl der Umläufe von x um den Nullpunkt entspricht.²⁾

Aber ein anderer hatte mehr als ein Jahrzehnt vorher nicht nur den Begriff des komplexen Integrals und den Satz von der Unabhängigkeit des Integralwertes vom Wege gekannt, sondern gerade bezüglich des Loga-

1) POISSON, *Suite du Mémoire sur les intégrales définies*. J. de l'éc. polyt. Cah. 18 (Bd. 11), 1820, p. 318.

2) Vgl. damit die Mitteilung SYLWOS (N. H. ABEL. *Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance*; „Les études d'ABEL et ses découvertes“, p. 32) aus ABELS Pariser Notizbuch, cah. III, bezüglich der Einführung des Imaginären in das Integral $\int \frac{dx}{x}$: „La représentation géométrique des imaginaires n'apparaît pas“.

rithmus die Erklärung der Vielwertigkeit durch das Umkreisen des Nullpunktes in ganz klarer Form ausgesprochen; das war GAUSS in seinem Briefe an BESSEL vom 18. Dezember 1811.¹⁾ Er zeigt hier eine Freiheit der Auffassung, wie sie CAUCHY erst 1846 erreichte, und aus einer Anmerkung, die GAUSS macht, sieht man, daß er die Schwierigkeiten, die bei der Integration mehrwertiger Funktionen auftreten, gleichfalls schon bemerkt hat.

In der schon zitierten Abhandlung CAUCHYS von 1825 ist der Begriff des komplexen Integrals

$$\int_{x_0 + iy_0}^{x + iy} f(z) dz$$

sogleich an die Spitze gestellt; es wird dieses Integral durch eine Substitution $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ auf gewöhnliche Integrale zurückgeführt, dabei ausdrücklich bemerkt, daß durch diese Gleichungen eine Kurve definiert werde, welche den Integrationsweg bildet, und betont, daß man durch Wahl von φ und ψ alle möglichen Integrationswege erhalten könne. Es wird sodann der Satz bewiesen, daß das Integral auf zwei verschiedenen Wegen, die von demselben Anfangspunkt zu demselben Endpunkt führen, den gleichen Wert annehme, wenn die Funktion $f(z)$ auf den betrachteten Kurven und zwischen ihnen niemals unendlich wird. Tritt dieser Fall ein, so hat das Integral auf dem einen Weg einen anderen Wert als auf dem anderen, und CAUCHY bestimmt diesen Unterschied im Falle von Unendlichkeitspunkten erster und höherer Ordnung.

Auf diesem Standpunkte blieb CAUCHY, wie es scheint, zunächst stehen und stand noch darauf, als JACOBI jene Vorlesung hielt, der das von GUNDELFINGER veröffentlichte Stück entnommen ist. Es handelt sich bei JACOBI um die Erklärung der bereits bekannten Vieldeutigkeit des elliptischen Integrals erster Gattung. Er geht auf den einfacheren Fall des Arcussinus zurück und stellt die Forderung, aus der Integralform dieser Funktion ihre Vieldeutigkeit zu erklären. Er sagt mit allem Grund, daß die CAUCHYSCHEN Prinzipien der Abhandlung von 1825 hier nicht anwendbar seien und kommt schließlich zu folgendem Resultate. Im bestimmten

Integral $\int_a^b f(x) dx$ einer einwertigen Funktion $f(x)$ ist es erlaubt, anstatt von a direkt bis b zu integrieren, die Integration zuerst über b hinaus bis c zu erstrecken und dann von c rückwärts nach b zu gehen, da stets

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

1) Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL (Berlin 1880), p. 156.

ist. Wenn man diese etwas allgemeinere Auffassung des bestimmten Integrals auf das Integral einer zweiwertigen Funktion anwendet und als Stelle c eine der Verzweigungsstellen nimmt, so kann man, ohne die Stetigkeit zu verletzen, auf dem Rückwege von c nach b den anderen Funktionswert wie vorher wählen. Setzt man:

$$+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=y_1, \quad -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=y_2,$$

so wird jetzt:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^1 y_1 dx + \int_1^x y_2 dx = \int_0^1 y_1 dx + \int_x^1 y_1 dx \\ &= 2 \arcsin 1 - \arcsin x = \pi - \arcsin x. \end{aligned}$$

In analoger Weise erhält man:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^1 y_1 dx + \int_1^{-1} y_2 dx + \int_{-1}^x y_1 dx \\ &= \int_0^1 y_1 dx + \int_{-1}^1 y_1 dx + \int_{-1}^0 y_1 dx + \int_0^x y_1 dx \\ &= 2 \int_{-1}^{+1} y_1 dx + \int_0^x y_1 dx = 2\pi + \arcsin x. \end{aligned}$$

Zwischen den Punkten -1 und 1 kann man beliebig oft hin und her integrieren und so ein beliebiges Vielfache von $2\pi i$ zum Integralwert hinzufügen. Dieses nämliche Verfahren wendet JACOBI auf das elliptische Integral erster Gattung an und erklärt auf diese Weise auch dessen Vielwertigkeit. Die Schwierigkeit, welche davon herrührt, daß an Stelle der erwarteten zwei Perioden zunächst, den vier „ganzen“ Integralen zwischen je zwei benachbarten Verzweigungspunkten entsprechend, vier aufzutreten scheinen; beseitigt JACOBI durch den Nachweis, daß je zwei dieser vier Integrale den gleichen Wert haben. Ähnliches wiederholt sich übrigens im hyperelliptischen Falle, und hier konnte JACOBI auf seine Abhandlung vom 14. Februar 1834¹⁾ verweisen, in der er schon gezeigt hatte, daß im allgemeinen hyperelliptischen Falle vom Geschlecht p die Anzahl der Perioden sich auf $2p$ reduziert. Es muß aber betont werden, daß in dieser Abhandlung von der Erklärung der Vieldeutigkeit des Integrals aus der Zwei-

1) JACOBI, *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium abelianarum innititur*; Ges. Werke 2, p. 23 (deutsch in OSRWALDS Klassiker Nr. 64).

wertigkeit der zu integrierenden Funktion keine Sprache ist. Erst ROSENHAIN hat in seiner obengenannten Preisarbeit, die er am 30. September 1846 der Pariser Akademie einreichte, ziemlich ausführlich den darauf bezüglichen Inhalt der JACOBISCHEN Vorlesung wiedergegeben. Es fragt sich nun, ob man sagen kann, daß in der JACOBISCHEN Vorlesung PUISEUX's Hauptleistung vorweggenommen sei, und ob man annehmen kann, daß PUISEUX durch Kenntnisnahme der ROSENHAIN'schen Preisarbeit zu seinen Untersuchungen veranlaßt worden ist.

Um diese Fragen zu entscheiden, muß man zunächst CAUCHY's Arbeiten weiter verfolgen. Einen entscheidenden Schritt vorwärts macht CAUCHY in seiner Abhandlung vom 3. August 1846.¹⁾ Hier erst vereinigt er zwei Kurvenintegrale, die von demselben Anfangspunkte zu demselben Endpunkte führen, zu einem „Randintegral“, und spricht den Satz aus, daß das Integral über den Rand eines Gebietes erstreckt, in welchem die zu integrierende Funktion allenthalben einwertig und stetig ist, den Wert Null besitzt. Und hierauf betrachtet CAUCHY schon den Fall, daß die Funktion nicht nur in einzelnen Punkten des umschlossenen Gebietes, sondern längs ganzer Linien in demselben unstetig ist. Schon am 12. Oktober 1846²⁾ kommt sodann der zweite große Fortschritt CAUCHY's, nämlich die Zulassung mehrwertiger Funktionen unter dem Integralzeichen, und zwar nimmt CAUCHY sogleich den allgemeinen Fall, daß unter dem Integralzeichen irgendeine algebraische Funktion auftritt. CAUCHY erkennt bereits, daß eine Wurzel der gegebenen algebraischen Gleichung nach einem Umlauf um einen Punkt, in welchem sie anderen Wurzeln gleich wird, in eine dieser übergeht, daß das Integral auf einem solchen Wege erstreckt einen von Null verschiedenen Wert hat, daß aber eine Periode für das Integral erst dann eintritt, wenn die Funktion unter dem Integralzeichen nach mehrmaliger Umkreisung eines oder nach Umkreisung mehrerer Verzweigungspunkte zu ihrem Anfangswerte zurückgekehrt ist.

Noch war CAUCHY nicht über diese allgemeinen Andeutungen hinausgekommen, als die erste Abhandlung von PUISEUX³⁾ erschien. PUISEUX zeigt im ersten Teile dieser Arbeit, daß eine Wurzel der gegebenen algebraischen Gleichung nach Durchlaufen einer geschlossenen Kurve, inner-

1) CAUCHY, *Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée*; Comptes rendus de l'acad. des sc. [de Paris] 23, p. 251; Oeuvres Sér. 1 (Bd. 10), p. 70.

2) CAUCHY, *Considérations nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée et sur celles qui sont prises entre des limites imaginaires*; Comptes rendus de l'acad. des sc. [de Paris] 23, p. 689; Oeuvres Sér. 1, (Bd. 10), p. 153.

3) PUISEUX, *Recherches sur les fonctions algébriques*; J. de math. 15 (1850), p. 365.

halb und auf welcher kein Punkt liegt, für welchen sie unendlich oder einer anderen Wurzel gleich wird, stets zu ihrem Anfangswerte zurückkehrt, und daß ihr Integral auf einer solchen Kurve erstreckt den Wert Null besitzt. Im zweiten Teile der Arbeit wird sodann gezeigt, daß für jeden Verzweigungspunkt die Wurzeln der gegebenen Gleichung sich in einen oder mehrere Zyklen derart anordnen, daß bei einem Umlauf um diesen Punkt der Endwert der einen Wurzel immer dem Anfangswert der nächsten, der Endwert der letzten dem Anfangswert der ersten gleich ist. PUISEUX zeigt, wie man diese Wurzelzyklen zu bestimmen hat. Sind sie für jeden Verzweigungspunkt ermittelt, so ist auch die Frage nach dem Endwert, den eine Wurzel nach Durchlaufen eines beliebigen geschlossenen Weges annimmt, beantwortet. Im dritten Teile seiner Arbeit nennt PUISEUX „Elementarintegrale“ jene, die man erhält, indem man das Integral einer Wurzel der gegebenen Gleichung auf einem geschlossenen Wege um einen der Ausnahmepunkte erstreckt. Die Perioden des Integrals setzen sich mit ganzzahligen Koeffizienten aus solchen Elementarintegralen zusammen. Zwar zeigt PUISEUX in einer zweiten Abhandlung¹⁾ für den Fall der Irreduzibilität der vorgelegten algebraischen Gleichung, daß jedes Integral $\int u_n dz$, wo u_n eine der Wurzeln ist und das Integral auf einem solchen geschlossenen Wege erstreckt ist, auf welchem u_n zu seinem Anfangswerte zurückkehrt, eine Periode für alle Integrale $\int u dz$ ist, aber die Fragen, wie viel unabhängige Perioden dieses Integral besitzt, und wie man ein System solcher Perioden erhalten kann, hat PUISEUX zwar aufgeworfen, aber nur im Falle der hyperelliptischen und der binomischen Integrale beantwortet. Auch CAUCHY'S Angabe²⁾ über die Anzahl der unabhängigen Perioden eines algebraischen Integrals ist, wie schon BRILL und NÖTHER in ihrem früher genannten Berichte bemerkt haben, nicht richtig.

CAUCHY³⁾ nahm seine eigenen und PUISEUX'S Untersuchungen nochmals auf und brachte durch seine „lignes d'arrêt“ ein neues Element herein. Seine Absicht war, für die mehrwertigen Funktionen und ihre Integrale die Beweglichkeit der Variable durch Sperrlinien, deren Überschreitung dieser untersagt ist, so zu beschränken, daß Einwertigkeit eintritt. Im Falle der Integrale einwertiger Funktionen erreichen die Sperrlinien CAUCHY'S vollständig ihr Ziel und sind noch heute in der Funktionentheorie durch nichts anderes ersetzt. Daran aber, daß CAUCHY im Falle der algebraischen

1) PUISEUX, *Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques*; J. de math. 16 (1851), p. 228. Beide Abhandlungen deutsch von FISCHER (Halle 1861).

2) Comptes rendus de l'acad. des sc. [de Paris] 32, 1851, p. 126; Oeuvres Sér. 1 (Bd. 11), p. 300.

3) CAUCHY, *Mémoire sur les fonctions irrationnelles*; Comptes rendus de l'acad. des sc. [de Paris] 32, 1851, p. 68. Oeuvres Sér. 1 (Bd. 11), p. 292.

Funktionen und ihrer Integrale für beides, Funktionen und Integrale, durch dasselbe Mittel Einwertigkeit schaffen wollte, mußte er scheitern. Dies wurde deutlich, als 1857 RIEMANN'S *Theorie der ABEL'Schen Funktionen* erschien. Hier dient zur eindeutigen Darstellung der n -wertigen algebraischen Funktion die n -blättrige RIEMANN'Sche Fläche T ; jedes Blatt von T sondert einen Zweig der Funktion ab, die so zur einwertigen Funktion des Ortes in der ganzen Fläche T wird. Die Integrale der algebraischen Funktion sind in T unendlich vielwertig; um sie einwertig zu machen, muß die mehrfach zusammenhängende Fläche T durch Anlage von Querschnitten in die einfach zusammenhängende T' zerschnitten werden. In T' sind dann auch die Integrale einwertige Funktionen des Ortes. In zwei gegenüberliegenden Punkten eines Querschnittes unterscheiden sich die Integralwerte um eine längs des ganzen Querschnittes konstante Größe, der Periode. In diesem Sinne (nicht im eigentlichen, da die beiden Ufer eines Querschnittes Grenzen von T' sind, zwei auf verschiedenen Ufern liegende Punkte also in T' nicht benachbart sind) sind die Querschnitte Unstetigkeitslinien für die Integrale, niemals aber für die algebraischen Funktionen. Die Anlage der Querschnitte kann in verschiedener Weise geschehen, immer ist aber die Anzahl der Querschnitte die gleiche, $2p$, wenn p das Geschlecht der vorliegenden algebraischen Funktion ist, und immer entsprechen den $2p$ Querschnitten ebensoviele unabhängige Perioden des Integrals. So wurden durch RIEMANN die von PUISEUX zwar aufgeworfenen, bei ihm aber ungelöst gebliebenen Fragen vollständig und in höchster Klarheit beantwortet.

Beim Rückblick auf das Vorstehende fällt zunächst in die Augen, daß die von JACOBI in seiner Vorlesung gegebene Erklärung der Vielwertigkeit des elliptischen Integrals in gar keinem Zusammenhang weder mit vorhergehenden noch mit nachfolgenden Arbeiten von CAUCHY und PUISEUX steht. JACOBI erklärt die schon anderwärts erkannte Vieldeutigkeit dieses Integrals, ohne überhaupt in das komplexe Gebiet überzugreifen, durch eine geschickte Erweiterung des Begriffs des gewöhnlichen bestimmten Integrals. Infolge dieser Beschränkung auf das Reelle hat er in keiner Weise das Verhalten seines Integrals auf einem in der komplexen Zahlenebene verlaufenden Integrationswege aufgeklärt; ja nicht einmal die Frage, wie sich die unter dem Integralzeichen stehende zweiwertige Funktion in der komplexen Zahlenebene, etwa bei Umkreisung eines ihrer Verzweigungspunkte verhält, läßt sich mit den JACOBISchen Mitteln beantworten. Dies erhellt schon daraus, daß es bei dem JACOBISchen Verfahren, den Verzweigungspunkt selbst zu betreten, willkürlich bleibt, mit welchem Werte die Funktion den Verzweigungspunkt verläßt, bei einer Umkreisung des Verzweigungspunktes aber eine solche Willkürlichkeit nicht auftritt. JACOBI

hat also nicht einmal eine Vorarbeit für PUISEUX geleistet, geschweige denn ihm einen Teil seiner Entdeckungen vorweggenommen.

Wohl mag die Theorie der elliptischen Funktionen, die seit LEGENDRE das Interesse der Mathematiker in hohem Maße in Anspruch nahm, CAUCHY und PUISEUX den Anstoß gegeben haben, Integrale mehrwertiger Funktionen zu untersuchen, aber ihre darauf bezüglichen Arbeiten entwickeln sich so naturgemäß auseinander¹⁾, daß für die Annahme, letzterer könnte erst durch die Mitteilungen aus JACOBI'S Vorlesung in der ROSENHAIN'Schen Preisarbeit die erste Anregung zu seinen Untersuchungen erhalten haben, kein Raum bleibt.

1) Vgl. dazu CAUCHY, *Rapport sur un Mémoire présenté à l'académie par M. PUISEUX et intitulé: Recherches sur les fonctions algébriques*; Comptes rendus de l'acad. des sc. [de Paris] 82, 1851, p. 276; Oeuvres Sér. 1 (Bd. 11), p. 325.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage¹⁾ von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“.
BM = Bibliotheca Mathematica.

1^s: 12, 15, 22, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 61. — **1^s: 33**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 307. — **1^s: 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 61—64. — **1^s: 163—165**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 64, 173—174. — **1^s: 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 64—65. — **1^s: 198, 201**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 237. — **1^s: 202**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 307—309. — **1^s: 203**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 65, 309. — **1^s: 206**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 237—238. — **1^s: 213, 225, 236, 245**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 65. — **1^s: 252**, siehe BM **10₃**, 1909/10, S. 164. — **1^s: 257**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 139. — **1^s: 270, 287, 297**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 66. — **1^s: 298**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 66; **10₃**, 1909/10, S. 53—54. — **1^s: 310**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 66. — **1^s: 335, 339—340, 344, 348**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 174—176. — **1^s: 351**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 66. — **1^s: 365, 368**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 177. — **1^s: 372**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 411—412; **Q₃**, 1908/9, S. 238. — **1^s: 374, 376**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 412—413. — **1^s: 380**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 66—67. — **1^s: 383—384**, siehe BM **10₃**, 1909/10, S. 164—165. — **1^s: 388**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 177. — **1^s: 394**, siehe BM **10₃**, 1909/10, S. 165. — **1^s: 401—402**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 239. — **1^s: 406, 409**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 177—178. — **1^s: 409**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 239. — **1^s: 410**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 178. — **1^s: 429**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 67. — **1^s: 431**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 67; **Q₃**, 1908/9, S. 139—140. — **1^s: 432**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 67, 178—179. — **1^s: 433**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 179. — **1^s: 447, 448**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 239—240. — **1^s: 452**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 179. — **1^s: 459**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 309—310. — **1^s: 464**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 179. — **1^s: 470**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 311. — **1^s: 471**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 413. — **1^s: 476**, siehe BM **Q₃**, 1908, S. 71—72. — **1^s: 488**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 67. — **1^s: 498**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 180. — **1^s: 500**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 67; **Q₃**, 1908/9, S. 321—322. — **1^s: 502**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 67. — **1^s: 503—504**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 180—181; **Q₃**, 1908/9, S. 240—241. — **1^s: 509, 510**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 67. — **1^s: 512**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 140—141. — **1^s: 513, 515, 523, 545**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 68—69. — **1^s: 551**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 141—142. — **1^s: 556**, siehe BM **10₃**, 1909/10, S. 54. — **1^s: 563—564**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 69. — **1^s: 567**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 241. — **1^s: 576**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 69—70, 181; **Q₃**, 1908/9, S. 142. — **1^s: 580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 70. — **1^s: 706**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 70, 181. — **1^s: 710**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 241. — **1^s: 713**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 70. — **1^s: 715**, siehe BM **Q₃**, 1908/9, S. 241. — **1^s: 715—716**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 70—71, 181. — **1^s: 717**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 71, 182—183. — **1^s: 718**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 71; **Q₃**, 1908/9, S. 242. — **1^s: 719**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 183—184. — **1^s: 720**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 71. — **1^s: 730**,

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 71, 184–185. — 1^s : 784, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 71. — 1^s : 786, siehe BM $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 242. — 1^s : 786–787, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 71–72, 185. — 1^s : 788, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 72. — 1^s : 742, siehe BM $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 242. — 1^s : 743, 748, 750, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 72. — 1^s : 763, siehe BM $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 242. — 1^s : 764, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 185. — 1^s : 766, siehe BM $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 143. — 1^s : 770, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 185. — 1^s : 771, siehe BM $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 143. — 1^s : 779, siehe BM $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 243. — 1^s : 780, 781, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 72. — 1^s : 792, siehe BM $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 143–144. — 1^s : 794, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 72. — 1^s : 795, siehe BM $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 243. — 1^s : 798, siehe BM $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 144. — 1^s : 800, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 73; $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 144–145. — 1^s : 801, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 185–186; $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 145. — 1^s : 802, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 73, 186–187, 414–415. — 1^s : 805–806, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 73. — 1^s : 809–810, siehe BM $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 243. — 1^s : 815, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 73. — 1^s : 838, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 415. — 1^s : 842, siehe BM $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 243. — 1^s : 854, siehe BM $\mathcal{I}_0$, 1909/10, S. 55. — 1^s : 855, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 73. — 1^s : 857, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 73; $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 243–244. — 1^s : 859, 862, 863, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 73–74. — 1^s : 867, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 74, 187. — 1^s : 869, 875–876, 877, 878, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 74–76. — 1^s : 881, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 415–416. — 1^s : 882, 889, 893, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 77–78. — 1^s : 900, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 78, 187–188. — 1^s : 901, siehe BM $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 145–146.

1^s : 901. In einer früheren Bemerkung (BM $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 146) habe ich die Überzeugung ausgesprochen, daß auch die zweite kreisrunde Scheibe, die Herr CANTOR hier erwähnt, einen chronologischen Zweck habe. Ich bin jetzt in der Lage, die Richtigkeit meines Ausspruches zu beweisen. Herr ARVID LINDHAGEN hat nämlich die Güte gehabt, mir mitzuteilen, daß die oberen Zahlen 1, 2, ..., 12 der Scheibe die Monate bezeichnen, während die unteren Zahlen die sogenannten Mondregularen („regulares lunares mensium“ oder „regulares ad lunam calendariam inveniendam“) sind.

Auch in betreff der ersten Scheibe hat mir Herr LINDHAGEN die Erklärung der scheinbaren Abweichungen ihrer Zahlen von denen des Julianischen Kalenders mitgeteilt. Ich hatte richtig angenommen, daß die Ziffer 1 der untersten Zellenreihe März bedeutet, und die entsprechenden Zahlen der mittleren Zellenreihe geben in Wirklichkeit den Ostertermin an, wenn man rückwärts vom 1. April ab rechnet. Beispielsweise ist 7 die zweite Zahl der mittleren Reihe, und in Wirklichkeit ist der $(31 + 1 - 7)^{to} = 25$. März der richtige Ostertermin. S. 146 Z. 3 steht durch einen Druckfehler als die 10.^e Zahl 17 statt 27.

G. ENESTROM.

1^s : 902, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 78–79. — 1^s : 906, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 79, 188–189; $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 244. — 1^s : 908, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 79; $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 146–147. — 1^s : 909, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 79. — 1^s : 910, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 79, 416. — 1^s : 911, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 79–80.

2^s : 5, siehe BM $\mathcal{Z}_3$, 1906/7, S. 286; $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 80. — 2^s : 7, siehe BM $\mathcal{Z}_3$, 1901, S. 351. — 2^s : 8, siehe BM $\mathcal{I}_1$, 1900, S. 501; $\mathcal{G}_3$, 1905, S. 309. — 2^s : 9, siehe BM $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 147. — 2^s : 10, siehe BM $\mathcal{I}_1$, 1900, S. 502; $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 147–148. — 2^s : 11, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 189. — 2^s : 14–15, siehe BM $\mathcal{Z}_3$, 1901, S. 144; $\mathcal{S}_3$, 1904, S. 200; $\mathcal{G}_3$, 1905, S. 208–209. — 2^s : 17, siehe BM $\mathcal{S}_3$, 1907/8, S. 189. — 2^s : 20, siehe BM $\mathcal{I}_1$, 1900, S. 502; $\mathcal{S}_3$, 1902, S. 239. — 2^s : 25, siehe BM $\mathcal{I}_1$, 1900, S. 274; $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 148. — 2^s : 26, siehe BM $\mathcal{Q}_3$, 1908/9, S. 244–245. — 2^s : 30, siehe BM $\mathcal{G}_3$, 1905, S. 105; $\mathcal{I}_0$, 1909/10, S. 166–167. — 2^s : 31, siehe BM $\mathcal{Z}_3$, 1901, S. 351–352; $\mathcal{S}_3$, 1902, S. 239–240; $\mathcal{G}_3$, 1905, S. 309–310. — 2^s : 32,

siehe BM 6₃, 1905, S. 105. — 2:84, siehe BM 2₃, 1901, S. 144; 6₃, 1905, S. 810; 8₃, 1907/8, S. 190. — 2:87, siehe BM 1₃, 1900, S. 502; 6₃, 1905, S. 105. — 2:88, siehe BM 2₃, 1901, S. 352; 9₃, 1908/9, S. 148. — 2:89, siehe BM 1₃, 1900, S. 502; 6₃, 1905, S. 209; 9₃, 1908/9, S. 245. — 2:41, siehe BM 2₃, 1901, S. 352; 8₃, 1907/8, S. 80—81; 9₃, 1908/9, S. 72—73. — 2:45, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 148—150. — 2:46, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 81. — 2:51, siehe BM 6₃, 1905, S. 106; 9₃, 1908/9, S. 150. — 2:52, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 190—191. — 2:53, siehe BM 5₃, 1904, S. 201. — 2:57, siehe BM 2₃, 1901, S. 352. — 2:59, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 207—208.

2:59. Die Worte (Z. 13—16): „Davon aber vollends, daß wer ausnahmsweise Mathematik zu erlernen die Erlaubnis erhielt, sie nicht weiter lehren dürfe, ist in den Satzungen gar nicht die Rede“ sollten meines Erachtens gestrichen werden. Ich gebe hier die fragliche Stelle der Satzungen wieder:

Seculares scientias non addiscant [fratres], nec etiam artes quas liberales vocant, nisi aliquando adeo aliquos magister generalis vel capitula generalia voluerint aliter dispensare, sed tantum libros theologicos tam juvenes quam senes legant.

Aus den letzten Worten, die Herr CANTOR nicht erwähnt, scheint mir hervorzugehen, daß ein Lehrer der Mathematik wenigstens unter den Ordensmitgliedern keine Zuhörer bekommen konnte.

G. ENESTRÖM.

2:59—60, siehe BM 1₃, 1900, S. 502; 6₃, 1905, S. 810—811. — 2:61, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 85—86, 208—209, 286—287; 9₃, 1908/9, S. 150. — 2:63, siehe BM 4₃, 1903, S. 206. — 2:65, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 151. — 2:67, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 209—210. — 2:70, siehe BM 1₃, 1900, S. 417. — 2:73, siehe BM 1₃, 1900, S. 502. — 2:77, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 152. — 2:82, siehe BM 1₃, 1900, S. 502. — 2:87, siehe BM 1₃, 1900, S. 502; 9₃, 1908/9, S. 323. — 2:88, siehe BM 1₃, 1900, S. 503; 6₃, 1905, S. 395. — 2:89, siehe BM 1₃, 1900, S. 503; 9₃, 1908/9, S. 245—246. — 2:90, siehe BM 1₃, 1900, S. 503. — 2:91—92, siehe BM 1₃, 1900, S. 503; 5₃, 1904, S. 409—410; 6₃, 1905, S. 395—396; 8₃, 1907/8, S. 191; 9₃, 1908/9, S. 152. — 2:94, 96, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 167—168. — 2:97, siehe BM 3₃, 1902, S. 406. — 2:98—99, siehe BM 1₃, 1900, S. 269—270; 6₃, 1905, S. 106—107; 7₃, 1906/7, S. 210. — 2:100, siehe BM 3₃, 1902, S. 140; 8₃, 1907/8, S. 81; 9₃, 1908/9, S. 73—74. — 2:101, siehe BM 3₃, 1902, S. 325; 6₃, 1905, S. 396; 9₃, 1908/9, S. 152—153.

2:103. Es ist dringend zu empfehlen, Z. 8 von unten in betreff des Ausdrucks: „EUKLIDAusgabe des CAMPANUS“ hinzuzufügen, daß es sich um den von RATDOLT 1482 veröffentlichten und später oft abgedruckten Text handelt. Die Frage, inwieweit dieser Text wirklich von CAMPANUS herrührt, ist bisher nicht erledigt worden; man weiß nur, daß gewisse Stellen des Textes in Handschriften fehlen, die ausdrücklich als die EUKLIDAusgabe des CAMPANUS angegeben werden (vgl. was Herr CANTOR S. 105 Z. 7 im Vorübergehen bemerkt).

Aus einer Angabe der *Rara arithmetica* (Boston 1908, S. 433—434) von D. E. SMITH könnte man versucht sein, anzunehmen, daß eine von CAMPANUS selbst verschenkte Abschrift seiner EUKLIDAusgabe noch existiert, so daß die oben erwähnte Frage leicht zu erledigen wäre, aber diese Annahme ist ganz gewiß unbegründet. Ihre einzige Stütze sind einige Worte am Ende der Handschrift, die als vom ersten Besitzer der Handschrift herrührend bezeichnet worden sind, aber die Erklärung der Worte beruht lediglich auf einer Mut-

maßung, die meines Erachtens wenig wahrscheinlich ist. Der Anfang der Handschrift muß nämlich von einem sehr unkundigen oder sehr nachlässigen Abschreiber herrühren, und man kann kaum annehmen, daß CAMPANUS eine solche Handschrift verschenkt hätte. Beispielsweise fehlte in der Definition „Superficies, est quae longitudinem et latitudinem tantum habet“ ursprünglich das erste Wort, und die nötige Ergänzung scheint von einer anderen Hand herzurühren. Ebenso fehlt in der Definition der „linea recta“ vor „extensio“ das wichtige Wort „brevissima“, so daß die Definition auch für eine krumme Linie paßt.

G. ENESTROM.

2:104, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 168—169. — 2:104—105, siehe BM 1₃, 1900, S. 503; 4₃, 1903, S. 397—398; 9₃, 1908/9, S. 153. — 2:106, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 380. — 2:111, siehe BM 2₃, 1901, S. 352. — 2:112, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 56. — 2:112—113, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 56—57. — 2:114, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 153; 10₃, 1909/10, S. 57. — 2:116, siehe BM 3₃, 1902, S. 406; 9₃, 1908/9, S. 153—154. — 2:117—118, siehe BM 6₃, 1905, S. 107, 311. — 2:122, siehe BM 1₃, 1900, S. 503—504; 6₃, 1905, S. 397. — 2:126, siehe BM 3₃, 1902, S. 406; 6₃, 1905, S. 210. — 2:127, siehe BM 3₃, 1902, S. 406. — 2:128, siehe BM 1₃, 1900, S. 504; 8₃, 1907/8, S. 191—192. — 2:129, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 287. — 2:132, siehe BM 1₃, 1900, S. 515—516. — 2:143, siehe BM 1₃, 1900, S. 504. — 2:144, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 381. — 2:145, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 287. — 2:148, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 381—382. — 2:150—151, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 288. — 2:155, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 323—325. — 2:155—156, siehe BM 5₃, 1904, S. 410—411; 7₃, 1906/7, S. 86—87. — 2:157, 158, siehe BM 2₃, 1901, S. 352. — 2:160—162, siehe BM 6₃, 1905, S. 311—312; 7₃, 1906/7, S. 87—88; 9₃, 1908/9, S. 154. — 2:163, siehe BM 1₃, 1900, S. 504; 6₃, 1905, S. 312. — 2:164, siehe BM 6₃, 1905, S. 313. — 2:165, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 382; 9₃, 1908/9, S. 246—247. — 2:166, siehe BM 1₃, 1900, S. 504. — 2:171, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 58. — 2:175, siehe BM 3₃, 1902, S. 140. — 2:178—179, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 192—193; 10₃, 1909/10, S. 58. — 2:206, siehe BM 6₃, 1905, S. 313. — 2:208, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 247. — 2:210, siehe BM 2₃, 1901, S. 352—353. — 2:218, siehe BM 4₃, 1903, S. 284. — 2:219, siehe BM 2₃, 1901, S. 353. — 2:222, siehe BM 6₃, 1905, S. 397—398. — 2:224—226, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 155. — 2:228, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 193. — 2:229, siehe BM 1₃, 1900, S. 504—505; 8₃, 1907/8, S. 194.

2:229. In betreff der Division bei WIDMANN (1489) sagt Herr CANTOR nur, daß das Verfahren „an das Bamberger Rechenbuch erinnert“, und wenn der Leser diesen Verweis benutzen will, so bekommt er (S. 223) folgenden Aufschluß: „Das Dividieren unbenannter Zahlen [wird gelehrt], wobei Unterabteilungen je nach der Größe des Divisors gebildet sind“.

In Wirklichkeit kommen bei WIDMANN nicht Unterabteilungen je nach der Größe des Divisors vor. Allerdings behandelt er einleitungsweise den Fall, in dem der Divisor nur eine wirkliche Ziffer enthält, also von der Form $a \cdot 10^n$ ($a < 10$) ist, aber dann geht er sofort zu dem allgemeinen Verfahren über und lehrt dabei an drei Beispielen das „teylen in galein“, d. h. die Überwärtsdivision. Nebenbei bemerke ich, daß WIDMANN den Term „differentia“, der ja „Stelle“ bedeutet, wörtlich durch „vnderschayd“ übersetzt.

G. ENESTROM.

2:230, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 195—196; 9₃, 1908/9, S. 155—157. — 2:232, 234, 237, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 196—198. — 2:238, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 198; 10₃, 1909/10, S. 59, 169. — 2:240, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 198—199; 10₃, 1909/10, S. 59.

— 2:242, siehe BM 1₃, 1900, S. 505; 8₃, 1907/8, S. 199—200. — 2:243, siehe BM 1₃, 1900, S. 505; 6₃, 1905, S. 398; 7₃, 1906/7, S. 382; 8₃, 1907/8, S. 200. — 2:245, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 388. — 2:246, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 288; 8₃, 1907/8, S. 200. — 2:247, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 383—384; 9₃, 1908/9, S. 247. — 2:249, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 200—201. — 2:250, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 82. — 2:253, siehe BM 2₃, 1901, S. 353. — 2:272, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 247. — 2:273, siehe BM 1₃, 1900, S. 505. — 2:274, siehe BM 3₃, 1902, S. 325. — 2:281, siehe BM 5₃, 1904, S. 411. — 2:282, 283, siehe BM 1₃, 1900, S. 506; 2₃, 1901, S. 353—354. — 2:284, siehe BM 1₃, 1900, S. 506; 9₃, 1908/9, S. 157—158. — 2:286, 287, 289, 290, 291, siehe BM 1₃, 1900, S. 506—507. — 2:296, siehe BM 2₃, 1901, S. 354. — 2:304, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 201. — 2:305, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 88. — 2:306, 308, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 248. — 2:313, siehe BM 1₃, 1900, S. 507. — 2:314, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 288—289. — 2:317, siehe BM 5₃, 1904, S. 69; 7₃, 1906/7, S. 384. — 2:318, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 158. — 2:319, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 201—202. — 2:320, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 88—89; 9₃, 1908/9, S. 248. — 2:322, siehe BM 6₃, 1905, S. 399; 8₃, 1907/8, S. 202—203. — 2:325, siehe BM 6₃, 1905, S. 313—314. — 2:327, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 248—249. — 2:328, siehe BM 3₃, 1902, S. 140; 4₃, 1903, S. 285. — 2:334, siehe BM 1₃, 1900, S. 507. — 2:339, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 82. — 2:341, 343, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 170. — 2:351, siehe BM 6₃, 1905, S. 399. — 2:353, siehe BM 1₃, 1900, S. 507; 4₃, 1903, S. 87. — 2:355, 357, siehe BM 6₃, 1905, S. 399—400. — 2:358, siehe BM 4₃, 1903, S. 87; 8₃, 1907/8, S. 203. — 2:360, siehe BM 4₃, 1903, S. 87. — 2:371, siehe BM 6₃, 1905, S. 314. — 2:375, siehe BM 9₃, 1908, S. 75. — 2:379, siehe BM 6₃, 1905, S. 400; 7₃, 1906/7, S. 384. — 2:380, siehe BM 6₃, 1905, S. 400—401. — 2:381, siehe BM 1₃, 1900, S. 507. — 2:382, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 60. — 2:385, siehe BM 3₃, 1902, S. 81; 4₃, 1903, S. 207; 7₃, 1906/7, S. 289; 10₃, 1909/10, S. 170. — 2:386, siehe BM 1₃, 1900, S. 507; 5₃, 1904, S. 306. — 2:388, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 289. — 2:392, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 82; 10₃, 1909/10, S. 171. — 2:395, siehe BM 1₃, 1900, S. 507—508. — 2:396, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 82. — 2:397, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 211. — 2:398, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 204; 9₃, 1908/9, S. 158—160. — 2:399, siehe BM 6₃, 1905, S. 107—108; 8₃, 1907/8, S. 204—205. — 2:401, 405, siehe BM 1₃, 1900, S. 507. — 2:410, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 290. — 2:411, 412, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 89. — 2:413, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 205. — 2:419, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 205—206; 9₃, 1908/9, S. 249—250. — 2:420, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 83, 206. — 2:421, 422, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 206. — 2:425, siehe BM 1₃, 1900, S. 507. — 2:426, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 207; 10₃, 1909/10, S. 60—61. — 2:427, siehe BM 6₃, 1905, S. 314—315; 8₃, 1907/8, S. 207. — 2:428, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 208; 9₃, 1908/9, S. 160. — 2:429, siehe BM 5₃, 1904, S. 201—202; 8₃, 1907/8, S. 208—209. — 2:430, siehe BM 2₃, 1901, S. 145. — 2:434, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 160—161. — 2:437—438, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 209—210. — 2:440, siehe BM 4₃, 1903, S. 285. — 2:441, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 161. — 2:442, siehe BM 3₃, 1902, S. 325. — 2:444, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 210. — 2:446, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 250. — 2:449, siehe BM 3₃, 1902, S. 140; 10₃, 1909/10, S. 171. — 2:452, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 210. — 2:454, siehe BM 3₃, 1902, S. 242. — 2:457, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 250—251. — 2:471, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 161. — 2:474, siehe BM 3₃, 1902, S. 140—141; 9₃, 1908/9, S. 161, 251. — 2:476, siehe BM 9₃, 1908, S. 75. — 2:479—480, siehe BM 3₃, 1902, S. 141; 7₃, 1906/7, S. 290—291, 385; 9₃, 1908, S. 75, 251. — 2:481, siehe BM 1₃, 1900, S. 508; 8₃, 1907/8, S. 83. — 2:482, siehe BM 1₃, 1900, S. 508; 2₃, 1901, S. 354; 3₃, 1902, S. 240; 6₃, 1905, S. 401. — 2:483, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 291. — 2:484, siehe BM 3₃, 1902, S. 141. — 2:486, 489, siehe BM 1₃, 1900, S. 509. — 2:490, siehe BM 1₃, 1900, S. 509; 7₃, 1906/7, S. 385—386. — 2:497, siehe BM 1₃, 1900, S. 509; 4₃, 1903, S. 87; 7₃, 1906/7, S. 291, 386. — 2:503, 505, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 292. — 2:506, 507, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 162—163.

2:508. Z. 26—27 gibt Herr CANTOR die Worte CARDANOS „quae quantitas vere est sophistica“ durch: „es ist dieses eine auf formaler Logik beruhende Größe“ wieder, aber diese Übersetzung ist meines Erachtens nicht

gut. S. 625 übersetzt Herr CANTOR den Ausdruck „opinione sofistica“ bei BOMBELLI durch „ein ausschweifender Gedanke“, und etwas Ähnliches meinte sicherlich auch CARDANO, als er $5 + \sqrt{-15}$ „quantitas sophistica“ nannte. Ich schlage darum als Übersetzung „ausgeklügelte Größe“ oder „gekünstelte Größe“ vor, wenn man nicht das Wort sophistisch gebrauchen will.

G. ENESTRÖM.

2: 509, siehe BM 1₃, 1900, S. 270, 509. — 2: 510, siehe BM 1₃, 1900, S. 509. — 2: 512, siehe BM 3₁, 1902, S. 141. — 2: 514, 516, 517, siehe BM 1₃, 1900, S. 509. — 2: 524, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 90; 10₁, 1909/10, S. 171—172. — 2: 525, siehe BM 10₁, 1909/10, S. 172. — 2: 527, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 387. — 2: 529, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 91. — 2: 530, siehe BM 2₁, 1901, S. 354—355; 3₁, 1902, S. 141. — 2: 531, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 212. — 2: 532, siehe BM 1₃, 1900, S. 509; 7₁, 1906/7, S. 292; 8₁, 1907/8, S. 84; 9₁, 1908/9, S. 163—164. — 2: 535, siehe BM 1₃, 1900, S. 509. — 2: 536, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 212—213. — 2: 537, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 387. — 2: 539, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 293; 9₁, 1908/9, S. 252. — 2: 541, siehe BM 1₃, 1900, S. 509. — 2: 547, siehe BM 8₁, 1907/8, S. 84. — 2: 548, siehe BM 1₃, 1900, S. 510; 9₁, 1908, S. 76. — 2: 549, siehe BM 1₃, 1900, S. 510; 6₁, 1905, S. 401. — 2: 550, siehe BM 2₁, 1901, S. 355; 9₁, 1908, S. 76. — 2: 554, siehe BM 1₃, 1900, S. 510. — 2: 555, siehe BM 4₁, 1903, S. 285; 6₁, 1905, S. 322. — 2: 558, siehe BM 9₁, 1908, S. 76. — 2: 561, siehe BM 7₁, 1906, S. 91. — 2: 565, siehe BM 4₁, 1903, S. 285. — 2: 566, siehe BM 8₁, 1907/8, S. 85. — 2: 567, 568, siehe BM 4₁, 1903, S. 286. — 2: 569, siehe BM 1₃, 1900, S. 510. — 2: 572—573, siehe BM 1₃, 1900, S. 510; 3₁, 1902, S. 141. — 2: 576, siehe BM 2₁, 1901, S. 355—356. — 2: 579, siehe BM 2₁, 1901, S. 145. — 2: 580—581, siehe BM 4₁, 1903, S. 207; 8₁, 1907/8, S. 85—86; 9₁, 1908/9, S. 326—327. — 2: 582, siehe BM 1₃, 1900, S. 510. — 2: 583, siehe BM 1₃, 1900, S. 270; 2₁, 1901, S. 356. — 2: 585, siehe BM 5₁, 1904, S. 69—70. — 2: 592, siehe BM 2₁, 1901, S. 146. — 2: 593, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 387. — 2: 594, siehe BM 1₃, 1900, S. 270. — 2: 597, siehe BM 1₃, 1900, S. 270; 2₁, 1901, S. 146. — 2: 599—600, siehe BM 2₁, 1901, S. 146. — 2: 602, siehe BM 1₃, 1900, S. 270. — 2: 603—604, siehe BM 1₃, 1900, S. 270—271; 6₁, 1905, S. 108; 8₁, 1907/8, S. 211. — 2: 605, siehe BM 8₁, 1907/8, S. 86. — 2: 610, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 388. — 2: 611, siehe BM 2₁, 1901, S. 356—357. — 2: 612, siehe BM 1₃, 1900, S. 277; 2₁, 1901, S. 146; 8₁, 1907/8, S. 212. — 2: 612—613, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 91—92. — 2: 613, siehe BM 2₁, 1901, S. 357; 5₁, 1904, S. 306; 7₁, 1906/7, S. 294, 388—389. — 2: 614, siehe BM 3₁, 1902, S. 141. — 2: 617, 619, siehe BM 6₁, 1905, S. 108—109. — 2: 620, siehe BM 3₁, 1902, S. 141. — 2: 621, siehe BM 1₃, 1900, S. 277; 2₁, 1901, S. 146; 6₁, 1905, S. 402; 7₁, 1906/7, S. 214, 389; 8₁, 1907/8, S. 86—87; 9₁, 1908, S. 77. — 2: 622, siehe BM 8₁, 1907/8, S. 87. — 2: 623, siehe BM 1₃, 1900, S. 277; 2₁, 1901, S. 146—147. — 2: 624, 625, siehe BM 8₁, 1907/8, S. 87—88. — 2: 626, siehe BM 7₁, 1906/7, S. 389—390. — 2: 632, siehe BM 6₁, 1905, S. 109. — 2: 634, 637, siehe BM 6₁, 1905, S. 315—316. — 2: 638, siehe BM 2₁, 1901, S. 147. — 2: 639, siehe BM 9₁, 1908/9, S. 77. — 2: 641, siehe BM 9₁, 1908/9, S. 253. — 2: 642, siehe BM 1₃, 1900, S. 271. — 2: 643, siehe BM 1₃, 1900, S. 271; 7₁, 1906/7, S. 391. — 2: 644, siehe BM 6₁, 1905, S. 402—403. — 2: 655, siehe BM 2₁, 1901, S. 357.

2: 655. Deve essere certamente un lapsus calami, ripetuto però dalla prima (pag. 602) alla seconda edizione, quello per il quale si legge qui: „auf GHETALDI's vorher genannte Wiederherstellung der Berührungen kam ALEXANDER ANDERSON 1612 mit seinem *Supplementum APOLLONII redivivi* zurück“; perchè la citata pubblicazione dell'ANDERSON non si riferisce già alla restituzione del libro dei contatti (*περί ἐπαφῶν*); ma a quella del libro delle inclinazioni (*περί νεύσεων*).

Per mettere le cose bene a posto, anche in relazione con ciò che si legge a pag. 653—654, mi pare opportuno chiarire come MARINO GHETALDI si sia

occupato della restituzione di ambedue i suddetti libri di APOLLONIO, e con tre pubblicazioni distinte.

Nel *Supplementum APOLLONII Galli seu exsuscitata APOLLONII Pergaei tactionum geometria pars reliqua* (Venetiis, apud Vincentium Fiorinum, MDCVII) scrive il GHETALDI: „Decem APOLLONII PERGAEI magni geometrae problemata, FRANCISCUS VIETA, seu APOLLONIUS Gallus, non minor geometra, feliciter construxit. At in libro tactionum APOLLONII Pergaei sexdecim problemata erant... Non igitur exsuscitavit APOLLONIUS Gallus universam APOLLONII Pergaei tactionum geometriam, omisit enim sex problemata ad illam geometriam pertinentia, sed ea supplebimus, et sic APOLLONIUS Gallus, non sine Illyrico, APOLLONTUM Pergaeum, qui extinctus iniuria temporum, vel a barbaris oppressus iacebat, excitabit.“ E questo è adunque relativo al libro *περὶ ἐναφῶν*.

Della restituzione dell' altro libro *περὶ νεύσεων* si occupò il GHETALDI con due pubblicazioni distinte, una delle quali *APOLLONIUS Redivivus, seu restituta APOLLONII Pergaei inclinationum geometria* (Venetiis, apud Bernardum Juntam, MDCVII) comprende i primi quattro dei cinque problemi relativi a questo argomento; ma dal compierne la trattazione fu distolto per essere stato mandato ambasciatore della Repubblica di Ragusa, sua patria, a Constantinopoli. Ritornò sull' argomento, avendovi data occasione appunto il *Supplementum APOLLONII Redivivi* dato in luce dall' ANDERSON nel 1612; e lo fece con l'*APOLLONIUS Redivivus, seu restitutae APOLLONII Pergaei de inclinationibus geometriae. Liber secundus* (Venetiis, apud Baretium Baretium, MDCXIII). A. FAVARO.

2: 656, siehe BM 4, 1903, S. 286. — 2: 659, 660, siehe BM 2, 1901, S. 147—148. — 2: 661, siehe BM 6, 1905, S. 403. — 2: 665, siehe BM 1, 1900, S. 271. — 2: 666, siehe BM 8, 1907/8, S. 88—89; 9, 1908/9, S. 164—165. — 2: 667, siehe BM 8, 1907/8, S. 89. — 2: 669, siehe BM 5, 1904, S. 203. — 2: 670, siehe BM 6, 1905, S. 403; 7, 1906/7, S. 391. — 2: 674, siehe BM 4, 1903, S. 88. — 2: 683, siehe BM 2, 1901, S. 148; 9, 1908/9, S. 328. — 2: 687, siehe BM 7, 1906/7, S. 294. — 2: 689, siehe BM 7, 1906/7, S. 391; 8, 1907/8, S. 89; 9, 1908/9, S. 253. — 2: 693, siehe BM 4, 1903, S. 287; 7, 1906/7, S. 394—395. — 2: 699, siehe BM 9, 1908/9, S. 165—166. — 2: 700, 701, siehe BM 1, 1900, S. 271. — 2: 703, siehe BM 1, 1900, S. 271—272; 8, 1907/8, S. 212. — 2: 704, 705, siehe BM 1, 1900, S. 272—273. — 2: 712, siehe BM 8, 1907/8, S. 212—213. — 2: 713, siehe BM 9, 1908/9, S. 254. — 2: 714, siehe BM 8, 1907/8, S. 89—90. — 2: 715, siehe BM 5, 1904, S. 412. — 2: 716, siehe BM 6, 1905, S. 404. — 2: 717, 718, siehe BM 7, 1906/7, S. 92—93. — 2: 719, siehe BM 2, 1901, S. 357. — 2: 720, siehe BM 4, 1903, S. 287; 6, 1905, S. 404. — 2: 721, siehe BM 1, 1900, S. 273; 6, 1905, S. 404—405. — 2: 726, siehe BM 8, 1907/8, S. 90. — 2: 727, siehe BM 7, 1906/7, S. 392. — 2: 741, siehe BM 7, 1906/7, S. 395—396. — 2: 742, siehe BM 1, 1900, S. 273; 3, 1902, S. 142. — 2: 746, siehe BM 1, 1900, S. 273. — 2: 747, siehe BM 1, 1900, S. 173; 2, 1901, S. 225. — 2: 749, siehe BM 4, 1903, S. 88. — 2: 753—754, 758, siehe BM 9, 1908/9, S. 254—255. — 2: 763, siehe BM 9, 1908/9, S. 166. — 2: 765, siehe BM 8, 1907/8, S. 90—91. — 2: 766, siehe BM 3, 1902, S. 142; 5, 1904, S. 412—413. — 2: 767, siehe BM 2, 1901, S. 148, 357—358. — 2: 770, siehe BM 4, 1903, S. 208. — 2: 772, siehe BM 2, 1901, S. 358; 7, 1906/7, S. 392—393. — 2: 773, siehe BM 8, 1907/8, S. 213; 9, 1908/9, S. 167. — 2: 775, siehe BM 2, 1901, S. 358—359. — 2: 777, siehe BM 2, 1901, S. 148; 3, 1902, S. 204. — 2: 780, siehe BM 9, 1908/9, S. 78, 167. — 2: 783, siehe BM 2, 1901, S. 359; 4, 1903, S. 88—89. — 2: 784, siehe BM 2, 1901, S. 148. — 2: 787, siehe BM 6, 1905, S. 405; 7, 1906/7, S. 296. — 2: 790, siehe BM 7, 1906/7, S. 393; 9, 1908/9, S. 255; 10, 1909/10, S. 62—63. — 2: 791, siehe BM 6, 1905, S. 405. — 2: 793—794, siehe BM 5, 1904, S. 307; 6, 1905, S. 316—317, 405—406. — 2: 795, siehe

BM 6., 1905, S. 317. — 2: 797—798, siehe BM 5., 1904, S. 307; 6., 1905, S. 317; 10., 1909/10, S. 63—64. — 2: 799, siehe BM 5., 1904, S. 307. — 2: 802, siehe BM 4., 1903, S. 208.

2: 802—803. Der Bericht über die HUDDESCHE Regel, um zu entscheiden, ob eine Gleichung zwei gleiche Wurzeln besitzt, sollte wesentlich modifiziert werden. Was Herr CANTOR Z. 11—20 mitteilt, ist richtig, aber das übrige (etwa $1\frac{1}{2}$ Seite) hat wenig mit der Darstellung HUDDES gemeinsam. In betreff der Angabe: „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die vorgelegte Gleichung mehrfach auftretende Wurzeln besaß, besteht alsdann in dem Vorhandensein eines Gemeinteilers zwischen dem ursprünglichen und dem zuletzt erhaltenen Gleichungspolynome“ ist zu bemerken, daß bei HUDDÉ weder von notwendiger Bedingung, noch von dem Vorhandensein eines Gemeinteilers gesprochen wird. Sein Theorem lautet nämlich (S. 507 der Ausgabe 1659): „Si in aequatione duae radices sint aequales, atque ipsa multiplicetur per arithmetica progressionem, quam libuerit . . . dico productum fore aequationem, in qua una dictarum radicum reperietur“, und auch nicht bei dem Beweise gibt HUDDÉ an, daß die im Satze erwähnte Bedingung notwendig ist, oder daß ein Gemeinteiler vorhanden sein muß.

Was bei Herrn CANTOR nach den Worten: „Suchen wir den Beweis einem heutigen Leser etwas mundgerechter zu machen, so sieht er folgendermaßen aus“ folgt, ist darum nicht der HUDDESCHE Beweis und sollte entweder gestrichen oder in eine Fußnote versetzt werden. HUDDÉ selbst bewies erst einen einfacheren Satz, nämlich den folgenden: Wenn man die Terme des linken Gliedes der Gleichung $x^2 - 2yx + y^2 = 0$, deren zwei Wurzeln ja gleich y sind, bzw. mit drei sukzessiven Termen einer arithmetischen Reihe multipliziert, so bekommt man eine neue Gleichung, die die Wurzel $x = y$ hat, so daß die gegebene und die abgeleitete Gleichung eine gemeinsame Wurzel besitzen. Der Beweis ist sehr leicht. Seien $a, a + b, a + 2b$ die drei Terme der arithmetischen Reihe, so wird die neue Gleichung $ax^2 - 2(a + b)yx + (a + 2b)y^2 = 0$, und setzt man hier $x = y$, so wird das linke Glied $ay^2 - 2(a + b)y^2 + (a + 2b)y^2$, d. h. identisch Null, wodurch nachgewiesen ist, daß die abgeleitete Gleichung wirklich die Wurzel $x = y$ besitzt. Jetzt ist es leicht, den eigentlichen Satz zu beweisen. Jede Gleichung

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0$$

mit zwei gleichen Wurzeln y kann nämlich auf die Form

$$(x^2 - 2yx + y^2)x^{m-2} + b_1(x^2 - 2yx + y^2)x^{m-3} + \dots + b_{m-2}(x^2 - 2yx + y^2) = 0$$

gebracht werden, und will man nun die Terme der ersten Gleichung bzw. mit den Größen $\alpha, \alpha + \delta, \alpha + 2\delta, \dots, \alpha + (m-1)\delta, \alpha + m\delta$ multiplizieren, so bekommt man dabei offenbar dasselbe Resultat, als wenn man in der zweiten Gleichung die drei Glieder des ersten Ausdruckes $x^2 - 2yx + y^2$ bzw. mit $\alpha, \alpha + \delta, \alpha + 2\delta$, die drei Glieder des zweiten Ausdruckes $x^2 - 2yx + y^2$ bzw. mit $\alpha + \delta, \alpha + 2\delta, \alpha + 3\delta$ multipliziert, usw. Aber wenn man diese Multiplikationen ausführt und dann überall y statt x setzt, so werden nach dem schon bewiesenen Satz die dreigliedrigen Koeffizienten, die aus $x^2 - 2yx + y^2$ erhalten wurden, alle identisch gleich Null, woraus hervorgeht, daß $x = y$ wirklich eine Wurzel der abgeleiteten Gleichung ist. Auf die von Herrn CANTOR behandelte Frage, ob die abgeleitete Gleichung eine Wurzel $x = y$ haben kann,

wenn die gegebene Gleichung nicht zwei Wurzeln $x = y$ hat, geht HUDDEGAR nicht ein.

Es scheint mir nicht ganz ohne Interesse zu sein, ausdrücklich hervorzuheben, daß das HUDDESche Verfahren offenbar eine versteckte Differentiation ist. Die Multiplikatoren können ja, wenn A statt $\alpha + m\delta$ gesetzt wird,

$$A - m\delta, A - (m-1)\delta, A - (m-2)\delta, \dots, A - \delta, A,$$

geschrieben werden, und das Ergebnis der Multiplikationen ist also mit dem folgenden identisch:

$$Ax^m - mx^m\delta + a_1Ax^{m-1} - (m-1)a_1x^{m-1}\delta + \dots + a_{m-1}Ax - a_{m-1}x\delta + a_mA = 0.$$

Aber auf Grund der ursprünglichen Gleichung ist

$$Ax^m + a_1Ax^{m-1} + \dots + a_mA = 0,$$

so daß

$$-mx^m\delta - (m-1)a_1x^{m-1}\delta - \dots - a_{m-1}x\delta = 0,$$

und dividiert man jetzt überall mit $-x\delta$, bekommt man

$$mx^{m-1} + (m-1)a_1x^{m-2} + \dots + a_{m-1} = 0,$$

also genau dasselbe Resultat, das unmittelbar durch Differentiation erhalten wird.

G. ENESTRÖM.

2:812, siehe BM **4**₃, 1903, S. 37. — **2:815**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 64. — **2:817**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 174. — **2:820**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 148; **5**₃, 1904, S. 307. — **2:825**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 148. — **2:827**, **830**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 256–257. — **2:832**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 203–204; **6**₃, 1905, S. 211. — **2:840**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 148–149. — **2:848**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 328. — **2:850**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 109–110. — **2:851**, **852**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 174–175. — **2:856**, **865**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 149. — **2:876**, **878**, **879**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 511. — **2:891**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 273. — **2:897**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 406. — **2:898**, siehe BM **4**₃, 1903, S. 37, 208; **10**₃, 1909/10, S. 175–176. — **2:901**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 511. — **2:902**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 329–330; **10**₃, 1909/10, S. 64. — **2:911**, siehe BM **9**₃, 1908, S. 78–79. — **2:919**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 204. — **2:VIII** (Vorwort), siehe BM **3**₃, 1902, S. 142. — **2:IX**, **X** (Vorwort), siehe BM **1**₃, 1900, S. 511–512.

3:1. Herr CANTOR beginnt den 3. Band der *Vorlesungen* mit den folgenden Worten: „Die gleichen Namen [d. h. LEONARDO PISANO und JORDANUS NEMORARIUS], welche am Schlusse des VIII. Abschnittes im I. Bande dieses Werkes auftraten, und welche als die der Träger einer neuen Zeit angekündigt wurden, eröffneten im II. Bande den IX. Abschnitt. Ein ähnlicher Abschluß wie dem I. Bande konnte auch dem II. gegeben werden, ein Zeichen dafür, daß die von uns benutzte Einteilung keine bloß äußerliche ist.“ Hier wäre es meines Erachtens angebracht, die Worte „ein Zeichen . . . äußerliche ist“ zu streichen. Daß die von Herrn CANTOR benutzte Einteilung (ich sehe dabei von der willkürlich gewählten Jahreszahl 1668 ab) keine bloß äußerliche ist, beruht ja darauf, daß NEWTON und LEIBNIZ als Träger einer neuen Zeit betrachtet werden können, und mit diesen zwei Persönlichkeiten könnte man eine neue Periode der Geschichte der Mathematik beginnen, auch wenn es sich herausstellen würde, daß LEONARDO PISANO und JORDANUS NEMORARIUS alles, was sie in ihren Schriften bringen, aus früheren Arbeiten entnommen haben, so daß sie nicht als Träger einer neuen Zeit zu betrachten sind.

G. ENESTRÖM.

3:4, siehe BM **10**., 1909/10, S. 65—67.

3:5. Zeile 1 sollten die Worte „dadurch keineswegs verbesserte“ gestrichen werden. Aus dem, was Herr CANTOR S. 15 sagt (siehe unten die Bemerkung zu **3:15**), geht nämlich mit großer Wahrscheinlichkeit hervor, daß er die zwei Auflagen der Arbeit von DECHALES nicht verglichen hat, und unter solchen Umständen wird das Urteil, daß die zweite Auflage keineswegs eine verbesserte ist, wertlos. In Wahrheit gibt es wenigstens eine rein formelle Verbesserung, die man schon ohne genauere Vergleichung entdeckt, nämlich, daß die drei Abschnitte (Algebra, Lehre von den Indivisibilen, Kegelschnittslehre), die sich am Ende des 3. Bandes der ersten Auflage befinden, in der zweiten Auflage einen besseren Platz bekommen haben. Die Algebra steht schon im 1. Bande unmittelbar nach der Trigonometrie, die Lehre von den Indivisibilen bildet das 8. Buch der praktischen Geometrie des 2. Bandes, und die Kegelschnittslehre folgt im 1. Bande nach der Sphärik des THEODOSIUS.

G. ENESTROM.

3:5—6. Herr CANTOR berichtet hier über den posthumen *Tractatus prooemialis de progressu matheseos et illustribus mathematicis* von DECHALES, und sein Bericht hat lediglich den Zweck, nachzuweisen, daß der Traktat teils höchst unzuverlässig, teils unvollständig sei; freilich wird der letztere Nachweis durch ein einziges Beispiel (das Fehlen von den mathematischen Schriften CARDANOS) erledigt.

Ohne Zweifel kann es in gewissen Fällen angebracht sein, ausschließlich die Fehler hervorzuheben, z. B. in betreff einer allgemein zugänglichen Arbeit, die in Wirklichkeit viele unrichtige Angaben enthält, aber noch jetzt als eine zuverlässige Quelle benutzt und zitiert wird, und zwar von solchen Personen, die nicht selbst kompetent sind, den Wert der Arbeit zu beurteilen. Ebenso kann es am Platze sein, zu versuchen, durch eingehende Kritik einer schlechten neuerschienenen Arbeit den Verfasser und seine Kollegen zu bewegen, von der Veröffentlichung weiterer Arbeiten dieser Art Abstand zu nehmen.

Aber in dem jetzigen Falle liegt die Sache ganz anders. Der Traktat von DECHALES erschien vor mehr als 200 Jahren, er ist nunmehr nicht leicht zu bekommen, und ganz gewiß wird ein Mathematiker unserer Zeit nur ausnahmsweise (oder vielleicht nie) auf den Gedanken kommen, den *Tractatus prooemialis* von DECHALES als mathematisch-historischen Führer zu benutzen. Unter solchen Umständen muß es die Pflicht des Historikers der Mathematik sein, bei dem Berichte über diese Schrift nicht nur die Fehler, sondern auch die Verdienste anzugeben.

Allerdings ist die Behandlung der älteren Geschichte der Mathematik bei DECHALES nichts weniger als zuverlässig, und man braucht nicht besonders sachkundig zu sein, um eine ziemlich große Zahl von offenbaren Unrichtigkeiten ausfindig zu machen. Dagegen ist die Darstellung der Geschichte des 16. und 17. Jahrhunderts nicht ohne Verdienste, und DECHALES hat versucht, kurze Referate nebst zusammenfassenden Urteilen über die wichtigsten mathematischen Arbeiten dieser Jahrhunderte zu bieten. Als Beleg drucke ich hier zwei Absätze der Seite 18 ab:

1609 ADRIANUS ROMANUS *Canonem triangulorum sphaericorum* edidit, in quo totam trigonometriam quam alij 28 casibus comprehendunt, 6 casibus absolvit.

Methodicè non procedit hic author, nec terminis utitur consuetis, ita ut ejus trigonometria, licet bonam doctrinam contineat, evadat difficillima. Demonstrationes vix indicat, quare nimis laborandum est in ea perdiscenda.

Daß die Darstellung bei DECHALES zuweilen lückenhaft ist (z. B. in betreff des CARDANO, der zwar S. 88 als Astrolog, aber nicht S. 32 als Mathematiker erwähnt wird), soll nicht in Abrede gestellt werden. Allein anderseits finden sich bei ihm Notizen, die Herr CANTOR bei der Bearbeitung seiner *Vorlesungen* hätte benutzen können, um die Darstellung daselbst zu ergänzen. Beispielsweise bemerkt DECHALES (S. 35): „1631 FRANCISCI VIETAE ... *ad logicicem speciosam notae priores*, typis mandatae sunt in 24 Parisiis“, und wenn Herr CANTOR diese Bemerkung zum Ausgangspunkt einer einfachen bibliographischen Untersuchung benutzt hätte, so würde er sofort den Passus der *Vorlesungen* (2³: 632): „Es ist nicht wahrscheinlich, daß eine Veröffentlichung [der *Notae priores*] zu Lebzeiten VIETAS stattfand“, in einen bestimmten Ausspruch verändert haben können. Auf dem Titelblatt der von DECHALES zitierten Schrift steht nämlich: ... „notae priores, nunc primum in lucem editae“.

Aus dem oben angeführten Grunde möchte ich den CANTORSchen Bericht über den *Tractatus prooemialis* von DECHALES als unzutreffend bezeichnen, obgleich die kritischen Bemerkungen an sich richtig sind. Dem Mathematiker, der nur zuverlässige Auskunft über bestimmte historische Fragen sucht, kann der Traktat nicht empfohlen werden, aber der Fachmann auf dem mathematisch-historischen Gebiete sollte nicht unterlassen, gelegentlich nachzusehen, welche Aufschlüsse ihm der Traktat über die Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert bietet.

G. ENESTRÖM.

3:9, siehe BM 2., 1901, S. 359. — 3:10, siehe BM 1., 1900, S. 518; 6., 1905, S. 211; 7., 1906/7, S. 393—394. — 3:11, siehe BM 4., 1903, S. 209. — 3:12, siehe BM 1., 1900, S. 512. — 3:14—15, siehe BM 7., 1906/7, S. 296—297.

3:15. Der Passus (Z. 18—21): „Es beginnt, wenn wir von jener Einleitung absehen, mit einer Geometrie nach EUKLID, d. h. die sechs ersten, das elfte und das zwölfte Buch der Elemente sind der Hauptsache nach vorhanden, die dazwischen liegenden Bücher VII bis X fehlen“ muß modifiziert werden. Bezieht man das Wort „Es“ auf die erste Auflage der Arbeit von DECHALES, so sind die Worte „wenn wir von jener Einleitung absehen“ sinnlos, denn diese Einleitung findet sich ja nicht in der ersten Auflage. Bezieht man dagegen das Wort „Es“ auf die zweite Auflage, so wird der Schluß der CANTORSchen Bemerkung unrichtig, denn diese Auflage enthält nicht nur die Bücher 1—6, 11—12, sondern noch dazu die Bücher 7—10, 13—14 der Elemente. Schon aus diesem Umstande kann man vermuten, daß Herr CANTOR von der zweiten Auflage nur das Vorwort und die Einleitung gelesen hat, und diese Vermutung wird bestätigt, wenn man den CANTORSchen Bericht über den Inhalt des *Mundus mathematicus* liest, denn der Bericht paßt teilweise gar nicht zur zweiten Auflage dieser Arbeit. Hier unten bringe ich eine Übersicht der rein mathematischen Abteilungen derselben.

Nach der Einleitung (S. 1—108) kommt, wie ich schon angedeutet habe, eine Bearbeitung (S. 109—260) der Bücher 1—14 der Elemente, dann (S. 261—284) eine ähnliche Bearbeitung der Sphärik des THEODOSIOS, ferner

(S. 285—356) die Kegelschnittslehre, die Arithmetik (S. 357—420), die Trigonometrie in sieben Büchern (S. 421—570) und die Algebra (S. 571—671); die letzten Seiten (S. 671—691) des 1. Bandes enthalten eine posthume Streitschrift gegen DESCARTES.

Von den Traktaten des 2. Bandes kann der erste („Geometria practica“) als rein mathematisch betrachtet werden; er enthält (S. 1—152) 11 Abschnitte, nämlich: 1. Mensura linearum rectarum. 2. Planometria (!). 3. Stereometria. 4. De circino proportionum. 5. De lineis curvis. 6. De figuris circularibus et curvis superficiebus. 7. De soliditate corporum rotundorum. 8. Nova methodus geometrica. 9. De quadratura circuli. 10. De progressionibus geometricis. 11. De novo usu centri gravitatis. Der 5. Abschnitt behandelt auch die Quadratrix und die Spirale, der 8. Abschnitt ist der Lehre von den Indivisibilen gewidmet, und im 9. Abschnitt beschäftigt sich der Verfasser noch einmal mit der Spirale.

Selbstverständlich kann man sich bei dem Berichte über die Arbeit von DECHALES auf die erste Auflage beschränken, und die kleine, von mir bemerkte Ungenauigkeit am Anfange des CANTORSchen Berichtes ist an sich kaum nennenswert. Aber als Beleg dafür, daß Herr CANTOR höchst wahrscheinlich ein allgemeines Urteil über die zweite Auflage gefällt hat (siehe oben die Bemerkung zu 3: 5), ohne etwas mehr als die Einleitung zu lesen, dürfte meine Bemerkung von Interesse sein.

G. ENESTRÖM.

3: 16. Die Angabe (Z. 27—29): „Diese Buchstaben werden aber bei höheren Potenzen nicht addiert, sondern multipliziert, und damit ist VIËTE gegenüber ein bewußter Rückschritt vollzogen“ gibt zu verschiedenen Bemerkungen Anlaß.

Erstens ist der Anfang der Angabe nicht gut ausgedrückt, denn in Wirklichkeit werden bei DECHALES ganz wie bei VIËTE die Buchstaben q , c usw. weder addiert noch multipliziert, sondern nur zusammengestellt, z. B. qc . Natürlich meint Herr CANTOR, daß die Exponenten, die den zusammengesetzten Bezeichnungen zuzuordnen sind, nicht durch Addition, sondern durch Multiplikation der Exponenten, die den einfachen Buchstaben zuzuordnen sind, erhalten werden.

Zweitens ist es zum mindesten zweifelhaft, ob die Bezeichnung von DECHALES ein Rückschritt VIËTE gegenüber genannt werden kann. Herr CANTOR behauptet, daß bei VIËTE die Multiplikation zweier Potenzen durch bloßes Nebeneinanderschreiben ihrer Zeichen ausgeführt wird; aber diese Behauptung ist nur zum Teil richtig, denn beispielsweise schreibt VIËTE das Produkt von N und C nicht NC , sondern QQ . Übrigens muß man in betreff der mathematischen Zeichen auch in Betracht ziehen, ob sie leicht anzuwenden sind, und von diesem Gesichtspunkte aus sind die DECHALESSchen Bezeichnungen vorzuziehen, wenn höhere Potenzen vorkommen, wie aus der folgenden Zusammenstellung hervorgehen dürfte:

unsere Bezeichnung:	$27x^5 - 9x^7 + x^9$,
DECHALES'	$27s - 9ss + 1cc$,
VIËTES	$27QC - 9QQC + 1CCC$.

Wenn man als Beispiel eine Gleichung 45^{ten} Grades wählen wollte, so würde es sich noch deutlicher zeigen, daß die DECHALESSchen Zeichen weniger unbequem wie die des VIËTE sind.

Drittens kann die fragliche Bezeichnung bei DECHALES kaum ein bewußter Rückschritt genannt werden. Einerseits war nämlich die Bezeichnung noch 1674 in vielen verbreiteten Lehrbüchern benutzt, anderseits lehrt DECHALES nicht nur diese ältere Bezeichnung, sondern auch, wie Herr CANTOR richtig angibt, unsere moderne Exponentenbezeichnung, freilich so, daß er die Exponenten auf gleicher Linie mit den Buchstaben schreibt.

G. ENESTRÖM.

3 : 17, siehe BM **1**, 1900, S. 512. — **3 : 18**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 168. **3 : 19**, siehe BM **10**, 1909/10, S. 67—68. — **3 : 22**, siehe BM **1**, 1900, S. 512; **4**, 1903, S. 209. — **3 : 23**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 297—298; **8**, 1907/8, S. 91. — **3 : 24**, siehe BM **4**, 1903, S. 209. — **3 : 25**, siehe BM **4**, 1903, S. 209, 399; **9**, 1908/9, S. 168. — **3 : 26**, siehe BM **2**, 1901, S. 359; **7**, 1906/7, S. 394. — **3 : 29**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 381. — **3 : 37**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 91—92. — **3 : 39**, siehe BM **6**, 1905, S. 407. — **3 : 40**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 394. — **3 : 45—48, 49, 50**, siehe BM **1**, 1900, S. 512—515. — **3 : 57**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 298—299.

3 : 58. Die Frage des Herrn CANTOR: „Hat er [N. MERCATOR] die Gleichung $\log(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \dots$ wirklich angesetzt?“ kann der aufmerksame Leser der *Logarithmotechnia* sofort beantworten, ohne auf das

Ergebnis $\int_0^a \log(1+a) da = \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{2 \cdot 3} + \frac{a^4}{3 \cdot 4} - \dots$ Bezug zu nehmen. In der

18. Proposition hebt MERCATOR ausdrücklich hervor, daß: „areola *B Ips* [est] mensura ratiunculæ, quam *AI* obtinet ad *Ap*“, und wenn man diese Angabe in unsere mathematische Sprache übersetzt, so sieht der Satz folgendermaßen aus:

$$\text{Flächenstückchen } B Ips = \log Ap,$$

weil MERCATOR schon im voraus bemerkt hat, daß $AI = 1$. Anderseits hat MERCATOR in der Proposition 17 bewiesen, daß das Flächenstückchen *B Ips* bzw. für $Ap = 1,1$ und $Ap = 1,21$ die folgenden Werte bekommt:

$$\begin{aligned} 0,1 &= \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3} - \frac{(0,1)^4}{4} + \dots \\ 0,21 &= \frac{(0,21)^2}{2} + \frac{(0,21)^3}{3} - \frac{(0,21)^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

Er wußte also ganz gewiß, daß diese Reihen bzw. $\log 1,1$ und $\log 1,21$ darstellen. Nimmt man noch hinzu, daß das Verfahren, wodurch MERCATOR die zwei Reihen herleitete, ohne weiteres für jedes $a < 1$ angewandt werden kann, so dürfte ersichtlich sein, daß die von Herrn CANTOR gestellte Frage sofort mit Ja beantwortet werden kann.

Beiläufig bemerke ich, daß MERCATOR auch nicht die allgemeine Formel der Reihenentwicklung für $\int_0^a \log(1+a) da$ ausdrücklich angibt. Ganz wie in betreff der Reihe für $\log(1+a)$ teilt MERCATOR jene Reihe für $a = 0,1$ sowie

das für jedes $a < 1$ gültige Verfahren mit. Gibt man also wie Herr CANTOR zu, daß bei MERCATOR die Reihe für $\int_0^a \log(1+a) da$ vorkommt, so ist es sinnlos zu fragen, ob MERCATOR die Reihe für $\log(1+a)$ erfunden habe.

G. ENESTROM.

3:62, siehe BM **10**, 1909/10, S. 177. — **3:63**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 93—94. — **3:68**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 299; **9**, 1908/9, S. 257—258. — **3:69**, siehe BM **10**, 1909/10, S. 69. — **3:70**, siehe BM **2**, 1901, S. 360; **9**, 1908/9, S. 258. — **3:78**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 92. — **3:79**, siehe BM **10**, 1909/10, S. 69—71. — **3:82**, siehe BM **5**, 1904, S. 308.

3:85. Hier sollten am Anfang etwa neun Zeilen („HALLEY will . . . andere große Zahl darstellt“) entweder gestrichen oder umgearbeitet werden, weil die Angaben teils allzu unvollständig, teils ungenau sind. Wenn man überhaupt die HALLEYSchen Terme „Ratio“ und „Ratiunculae“ erwähnen will, so sollte man nicht, wie Herr CANTOR, diese Terme ganz einfach durch „Verhältnis“ und „kleine Verhältnisse“ übersetzen. Diese Übersetzungen sind nämlich entweder nichtssagend oder irreleitend, denn in Wirklichkeit bedeutet bei HALLEY „Ratio“ nicht Verhältnis, sondern vielmehr Exponent, wie Herr CANTOR aus der von ihm selbst zitierten Stelle bei REIFF hätte erfahren können. HALLEY hebt ja übrigens hervor, daß „the ratio of equality, or 1 to 1 = 0“, und diesen Ausspruch könnte man in unsere mathematische Sprache etwa auf folgende Weise übersetzen: „Wenn B eine gegebene Zahl [die Basis] ist, so ist $1 = B^0$.“ Ferner sind die „Ratiunculae“ nicht „kleine Verhältnisse“, sondern die unendlich kleinen „Rationes“, die man bekommt, wenn die Differenz der zwei Zahlen der „Ratio“ unendlich klein ist. Was Herr CANTOR weiter sagt, ist ebenfalls ungenau, weil HALLEY nicht von sehr großen Zahlen, sondern von unendlich großen Zahlen spricht. HALLEY schiebt nicht 100 000, sondern „100 000 &c. in infinitum“ mittlere Proportionale zwischen 1 und 10 ein, und ungenau ist also ebenfalls die Bemerkung: „allgemeiner ist sie [d. h. die Ratiuncula] $\frac{1}{n}$, sofern n . . . eine . . . große Zahl darstellt“.

In betreff der Fortsetzung seines Berichtes scheint Herr CANTOR die Darstellung von REIFF benutzt zu haben, und diese ist im allgemeinen richtig.

Zu beanstanden ist vielleicht bei REIFF die Behauptung: „ $a^{\frac{1}{m}} - a^0$ ist proportional $\frac{1}{m}$, etwa $\frac{k}{m}$ “, deren Grund nicht angegeben wird, aber bei Herrn CANTOR ist die entsprechende Stelle durchaus unverständlich, weil bei ihm m (CANTOR nennt diese Zahl n) nicht unendlich, sondern nur sehr groß ist. Am richtigsten dürfte man den Gedankengang HALLEYS auf folgende Weise wiedergeben.

Sei B die willkürlich gewählte Basis des Logarithmensystems und $\frac{1}{m}$ die Größe einer „Ratiuncula“ dieses Systems, so weiß man, daß die Zahl der mittleren Proportionale zwischen 1 und B gleich m ist. Sei ferner $1+q$ die n^{te} mittlere Proportionale, so ist laut der Definition $1+q = B^{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots}$

wobei die Zahl der Summanden gleich n ist, folglich $(1+q)^{\frac{1}{n}} = B^{\frac{1}{m}}$. Aber $B^{\frac{1}{m}}$ bedeutet die erste eingeschobene Proportionale, und diese kann sich nur durch eine unendlich kleine Größe erster Ordnung von 1 unterscheiden, so daß $B^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{k}{m}$, wo k eine endliche Zahl ist, die offenbar nur von B abhängt. Entwickelt man jetzt $(1+q)^{\frac{1}{n}}$ wie bei REIFF, so bekommt man das gewünschte Resultat, wenn man bemerkt, daß nach der Definition $\log(1+q) = \frac{n}{m}$.

G. ENESTRÖM.

3:97, siehe BM **7**, 1906/7, S. 394. — **3:100**, siehe BM **2**, 1901, S. 149; **7**, 1906/7, S. 299—300. — **3:102**, siehe BM **6**, 1905, S. 318; **7**, 1906/7, S. 300; **9**, 1908/9, S. 169. — **3:104**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 331. — **3:112**, siehe BM **4**, 1903, S. 209—210; **6**, 1905, S. 318. — **3:113**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 258—259. — **3:116**, siehe BM **1**, 1900, S. 513. — **3:117**, siehe BM **1**, 1900, S. 518; **9**, 1908/9, S. 259—260. — **3:118**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 92—93. — **3:122**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 301. — **3:123**, siehe BM **1**, 1900, S. 513; **4**, 1903, S. 399; **7**, 1906/7, S. 301—302. — **3:124**, siehe BM **3**, 1902, S. 407—408; **4**, 1903, S. 400. — **3:126**, siehe BM **4**, 1903, S. 288. — **3:129—130**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 93. — **3:131**, siehe BM **4**, 1903, S. 210. — **3:151**, siehe BM **3**, 1902, S. 326. — **3:166**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 332. — **3:167, 172—173**, siehe BM **4**, 1903, S. 400. — **3:174**, siehe BM **2**, 1901, S. 149—150. — **3:174, 181**, siehe BM **10**, 1909/10, S. 71—73. — **3:183**, siehe BM **1**, 1900, S. 432. — **3:188**, siehe BM **3**, 1902, S. 241. — **3:195**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 311, 332—333; **10**, 1909/10, S. 73. — **3:196**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 333. — **3:201**, siehe BM **1**, 1900, S. 513. — **3:207**, siehe BM **1**, 1900, S. 519. — **3:215**, siehe BM **2**, 1901, S. 150; **9**, 1908/9, S. 260—262. — **3:218**, siehe BM **1**, 1900, S. 513. — **3:220**, siehe BM **3**, 1902, S. 326. — **3:221**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 333. — **3:224**, siehe BM **1**, 1900, S. 514. — **3:225**, siehe BM **2**, 1901, S. 150. — **3:228**, siehe BM **2**, 1901, S. 150; **9**, 1908/9, S. 333—334. — **3:230**, siehe BM **6**, 1905, S. 211—212. — **3:232**, siehe BM **1**, 1900, S. 514; **6**, 1905, S. 212; **7**, 1906/7, S. 303; **8**, 1907/8, S. 94; **9**, 1908/9, S. 334—335. — **3:244—245**, siehe BM **5**, 1904, S. 205, 413; **7**, 1906/7, S. 303—304. — **3:246**, siehe BM **1**, 1900, S. 514; **2**, 1901, S. 151. — **3:250**, siehe BM **1**, 1900, S. 514. — **3:253, 254, 258, 260**, siehe BM **10**, 1909/10, S. 73—76. — **3:270**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 395. — **3:276**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 304. — **3:279**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 335—336. — **3:286**, siehe BM **10**, 1909/10, S. 76. — **3:303**, siehe BM **2**, 1901, S. 155. — **3:306**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 304. — **3:327**, siehe BM **10**, 1909/10, S. 77. — **3:330—331**, siehe BM **3**, 1902, S. 241—242. — **3:337**, siehe BM **5**, 1904, S. 206. — **3:350**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 336. — **3:364**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 304—305. — **3:365**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 94.

3:366. Da Herr CANTOR hier im Vorübergehen den Briefwechsel zwischen LEIBNIZ und GRANDI erwähnt, benutze ich die Gelegenheit, um auf einen Umstand hinzuweisen, der vielen Fachgenossen unbekannt sein dürfte, nämlich daß vier Briefe von LEIBNIZ an GRANDI schon 1854 nach den Originalen veröffentlicht wurden; von diesem Umstand hatte GERHARDT selbst offenbar keine Kenntnis, als er 1859 den 4. Band von LEIBNIZENS *Mathematischen Schriften* herausgab und darin nach den Konzepten oder Entwürfen vier Briefe von LEIBNIZ an GRANDI herausgab.

Die von mir angedeutete Veröffentlichung fand in der Allgemeinen Monatsschrift für Wissenschaft und Literatur (Jahrg. 1854, S. 222—230)

statt, und zwar sind die Briefe ein Anhang zur Abhandlung: *MAGLIABECHI, MURATORI und LEIBNITZ* von A. VON REUMONT. Von größtem Interesse ist der vierte Brief, der vom 14. März 1714 datiert ist, weil dieser bei GERHARDT fehlt. Leider ist der Abdruck des vierten Briefes sehr schlecht in betreff der Formeln; vermutlich hat weder der Abschreiber noch der Herausgeber den Inhalt des Briefes verstanden.

Hinsichtlich der drei übrigen Briefe (vom 1. [nach GERHARDT 11.] Juli 1705, 6. September 1713 und 3. März 1714) stimmen die Abdrücke bei GERHARDT und REUMONT im allgemeinen überein; immerhin könnten jene auf Grund dieser verbessert oder ergänzt werden; beispielsweise steht im Briefe vom 6. September 1713 nach den Worten „quam verae religioni“ nicht „profuturam“, wie GERHARDT vermutete, sondern „illustrandae proficuum“.

G. ENESTRÖM.

3:367, siehe BM 7., 1906/7, S. 215. — **3:370—371**, siehe BM 5., 1904, S. 308. — **3:382**, siehe BM 6., 1905, S. 213. — **3:384**, siehe BM 6., 1905, S. 319. — **3:397**, siehe BM 8., 1907/8, S. 94. — **3:398**, siehe BM 7., 1906/7, S. 305—306; 8., 1907/8, S. 94—95. — **3:399**, siehe BM 10., 1909/10, S. 77—78. — **3:406**, siehe BM 9., 1908/9, S. 262. — **3:408**, siehe BM 6., 1905, S. 213. — **3:412**, siehe BM 7., 1906/7, S. 306. — **3:427**, siehe BM 9., 1908/9, S. 169. — **3:447, 455**, siehe BM 2., 1901, S. 151. — **3:461**, siehe BM 9., 1908/9, S. 337. — **3:473**, siehe BM 2., 1901, S. 154—155; 4., 1903, S. 401. — **3:475**, siehe BM 10., 1909/10, S. 79—80. — **3:476**, siehe BM 9., 1908/9, S. 169—170, 476. — **3:477, 479**, siehe BM 2., 1901, S. 151—152. — **3:480**, siehe BM 8., 1907/8, S. 95. — **3:481**, siehe BM 10., 1909/10, S. 79. — **3:482**, siehe BM 10., 1909/10, S. 178. — **3:496**, siehe BM 9., 1908/9, S. 337—338. — **3:497, 498**, siehe BM 5., 1904, S. 309. — **3:507**, siehe BM 5., 1904, S. 71—72. — **3:507—509, 509**, siehe BM 9., 1908/9, S. 338—339. — **3:521**, siehe BM 2., 1901, S. 441. — **3:527**, siehe BM 7., 1906/7, S. 95. — **3:535**, siehe BM 4., 1903, S. 401. — **3:536**, siehe BM 5., 1904, S. 206. — **3:540**, siehe BM 6., 1905, S. 319—321. — **3:565**, siehe BM 3., 1902, S. 326—327. — **3:571**, siehe BM 3., 1902, S. 327; 5., 1904, S. 72; 9., 1908/9, S. 170. — **3:575**, siehe BM 9., 1908/9, S. 263. — **3:578**, siehe BM 3., 1902, S. 327; 5., 1904, S. 309. — **3:582**, siehe BM 7., 1906/7, S. 307. — **3:583**, siehe BM 10., 1909/10, S. 80. — **3:586**, siehe BM 5., 1904, S. 309. — **3:593**, siehe BM 8., 1907/8, S. 214. — **3:609**, siehe BM 5., 1904, S. 309—310. — **3:612**, siehe BM 7., 1906/7, S. 307—308; 9., 1908/9, S. 339—340. — **3:614—615**, siehe BM 4., 1903, S. 89—90; 7., 1906/7, S. 308. — **3:616**, siehe BM 6., 1905, S. 214, 408; 9., 1908/9, S. 263. — **3:617**, siehe BM 9., 1908/9, S. 263; 10., 1909/10, S. 80—81. — **3:636—637**, siehe BM 2., 1901, S. 441. — **3:646—647**, siehe BM 5., 1904, S. 206—207. — **3:652**, siehe BM 2., 1901, S. 446; 5., 1904, S. 207.

3:655. Wie Herr CANTOR bemerkt, beschäftigt sich EULER in der Abhandlung *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales*

algebraice dari nequeunt mit dem Integral $\int_0^1 dx (-\log x)^n$, und aus dem, was

Herr CANTOR S. 653 mitteilt, ersieht man, daß EULER den Wert dieses Integrals für $n = \frac{1}{2}$ ermittelt hat. Nun findet sich im 1. Bande der *Mechanica* EULERS (St. Petersburg 1736, S. 124) folgender Passus: „Demonstravi vero in Commentariis Academiae Scientiarum Petropol. Anno 1730. hanc quantitatem $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z}}$, si ponatur $z = 1$, definire in hac progressionem 1, 2, 6, 24 etc., eum terminum, cuius index sit $= -\frac{1}{2}$, quem alia methodo ibidem ostendi esse $= \sqrt{\pi}$.“

18*

Allein der von EULER zitierte Band der *Commentarii* ist eben der 5. Band („ad annos 1730 et 1731“), und die einzige Abhandlung dieses Bandes, worin es sich um das Integral $\int_0^1 dx (-\log x)^n$ handelt, ist die am Anfang dieser Bemerkung erwähnte. Man könnte also mit gutem Recht annehmen, daß EULER in der fraglichen Abhandlung den Wert $\sqrt{\pi}$ des Integrals $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\log x}}$ hergeleitet hat. Aber in Wirklichkeit hat EULER weder den Wert des Integrals hergeleitet noch überhaupt dasselbe erwähnt. S. 44 gibt er die Werte des Integrals $\int_0^1 dx (-\log x)^n$ für $n = \frac{1}{2}$ und $n = \frac{3}{2}$ an; S. 51 bringt er eine Formel für $n = \frac{p}{2}$, aber diese versagt für $p = -1$, weil der Faktor $p + 1$ darin vorkommt. Freilich ist es sehr leicht, den Wert für $n = -\frac{1}{2}$ aus dem Wert für $n = \frac{1}{2}$ durch teilweise Integration herzuleiten, und man hat darum nicht den geringsten Anlaß, anzuzweifeln, daß EULER bei der Redaktion der Abhandlung *De progressionibus transcendentibus* die Formel $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\log x}} = \sqrt{\pi}$ kannte. Aber unrichtig ist jedenfalls die Angabe EULERS: „quem alia methodo ibidem ostendi esse $= \sqrt{\pi}$ “, und man sieht hieraus, mit welcher Vorsicht man auch die anscheinend zuverlässigsten Angaben benutzen soll.

Beiläufig mache ich darauf aufmerksam, daß das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\log x}}$ durch die Substitution $x = e^{-y}$ in $2 \int_0^\infty e^{-y^2} dy$ übergeht, das bekanntlich später von LAPLACE eingehend behandelt worden ist.

G. ENESTRÖM.

3:660, siehe BM 2., 1901, S. 441. — 3:666, siehe BM 10., 1909/10, S. 179. — 3:667, siehe BM 2., 1901, S. 441–442; 5., 1904, S. 207–208, 310. — 3:675, siehe BM 9., 1908/9, S. 340–341. — 3:682, siehe BM 6., 1905, S. 408. — 3:686, siehe BM 5., 1904, S. 208. — 3:688, siehe BM 9., 1908/9, S. 341.

3:688. Ich habe in einer früheren Bemerkung (BM 9., 1908/9, S. 341) angegeben, daß der Brief DANIEL BERNOULLI, den Herr CANTOR Z. 11–15 erwähnt, wahrscheinlich vor dem 20. September 1740 und nicht erst 1741 geschrieben wurde. Ich bin jetzt in der Lage, diese Angabe zu präzisieren. Nach den *Procès-verbaux* (1, St. Petersburg 1897, S. 612) wurde die Abhandlung *Excerpta ex litteris a DANIELE BERNOULLI* am 19. Mai 1740 der Petersburger Akademie vorgelegt, und nach derselben Quelle (a. a. O. S. 607, 611) waren die betreffenden Briefe (vom 12. März und 30. April 1740) deutsch geschrieben. Es ist also sehr wohl möglich, daß EULER bei der Übersetzung der Briefe seine eigenen Bezeichnungen statt der BERNOULLISCHEN einführte.

G. ENESTRÖM.

3:689, siehe BM **2**, 1901, S. 442; **3**, 1907/8, S. 215. — **3:692**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 215. — **3:698**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 341. — **3:695**, siehe BM **2**, 1901, S. 442. — **3:700**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 171, 342. — **3:702**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 171. — **3:703, 705**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 342—343. — **3:722**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 172. — **3:726—728**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 343—344. — **3:736**, siehe BM **6**, 1905, S. 111. — **3:749**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 172. — **3:750**, siehe BM **2**, 1901, S. 446. — **3:753**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 172—174. — **3:754**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 344—345. — **3:758**, siehe BM **2**, 1901, S. 446; **9**, 1908/9, S. 345—346. — **3:759**, siehe BM **5**, 1904, S. 208. — **3:760**, siehe BM **2**, 1901, S. 447. — **3:762**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 346. — **3:766**, siehe BM **2**, 1901, S. 446. — **3:773**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 174—175, 346—347. — **3:774**, siehe BM **2**, 1901, S. 442—443. — **3:792**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 347. — **3:798**, siehe BM **2**, 1901, S. 443. — **3:813**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 348. — **3:819**, siehe BM **6**, 1905, S. 321. — **3:845**, siehe BM **2**, 1901, S. 447; **3**, 1902, S. 327—328. — **3:848**, siehe BM **2**, 1901, S. 443. — **3:870—871**, siehe BM **10**, 1909/10, S. 81—82. — **3:880**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 95—96. — **3:881**, siehe BM **2**, 1901, S. 443; **9**, 1908/9, S. 264—265; **10**, 1909/10, S. 83. — **3:882**, siehe BM **2**, 1901, S. 447; **5**, 1904, S. 414. — **3:890**, siehe BM **4**, 1903, S. 401; **9**, 1908/9, S. 348—349. — **3:892**, siehe BM **3**, 1902, S. 143; **9**, 1908/9, S. 265. — **3:894**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 349—350. — **3:897**, siehe BM **10**, 1909/10, S. 83. — **3:IV** (Vorwort), siehe BM **2**, 1901, S. 443.

Anfragen.

145. Über die Geschichte der Sternvielecke im Mittelalter. Bekanntlich enthält die EUKLID-Übersetzung, die 1482 unter dem Namen des CAMPANUS herausgegeben wurde, nach dem Beweis des Satzes I:32 der *Elemente*, eine „CAMPANI additio“ über Sternvielecke (siehe z. B. *EUCLIDIS Elementorum geometricorum lib. XV*, Basileae 1537, S. 27—28). Eine noch ausführlichere Einschaltung über denselben Gegenstand findet sich in einer in der Stadtbibliothek zu Nürnberg aufbewahrten, aus dem 15. Jahrhundert stammenden Handschrift der EUKLID-Übersetzung ATELHARDS, und darum wird zuweilen behauptet, ATELHARD habe die Theorie der Sternvielecke behandelt (siehe z. B. B. LEFEBVRE, *Revue des questions scientifiques publiée par la société scientifique de Bruxelles* **17**, 1910, S. 615). Indessen ist es längst nachgewiesen worden, daß die Behauptung als unbegründet und höchst unwahrscheinlich betrachtet werden muß, da die älteren Handschriften der EUKLID-Übersetzung ATELHARDS nicht die fragliche Einschaltung enthalten (vgl. S. GÜNTHER, *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, Leipzig 1876, S. 2—3; H. WEISSENORN, *Abhandl. zur Gesch. d. Mathem.* **3**, 1880, S. 162).

Die oben erwähnte „CAMPANI additio“ ist also die älteste bisher bekannte Behandlung der Theorie der Sternvielecke, aber ob die Behandlung wirklich dem CAMPANUS selbst zuzuweisen ist, weiß man nicht, denn die Stelle kann sehr wohl aus einem arabischen EUKLID-Kommentar übersetzt worden sein. In Wirklichkeit hat J. L. HEIBERG (*Litterargeschichtliche Studien über EUKLID*, Leipzig 1882, S. 19) aus einer Notiz EL KIFTIS gefolgert, daß die „CAMPANI additio“ vielleicht aus der Bearbeitung THEBIT BEN KURRAS entnommen ist. Nun gibt es ja eine nicht von CAMPANUS herrührende mittelalterliche EUKLID-Übersetzung, worin THEBIT oft genannt wird. Ist es durch Zuhilfenahme dieser Übersetzung oder durch Untersuchung der arabischen Redaktion THEBITS möglich, zu entscheiden, ob CAMPANUS in betreff der Theorie der Sternvielecke eine arabische Vorlage benutzte?

G. ENESTRÖM.

146. Sur les premières démonstrations de l'équivalence des figures symétriques. Dans la première édition des *Eléments de géométrie* de LEGENDRE (Paris, Didot, L'an II^e de la République, M. DCC. XCIV), on trouve livre VII, propositions XXI et XXII p. 225—226 et Note VII, p. 306, une démonstration insuffisante du théorème relatif à l'aire du triangle sphérique. De même, l'équivalence de deux polyèdres symétriques n'est pas vraiment établie, livre VI, proposition II, p. 172 et Note VII, p. 305.

Dans la troisième édition du même ouvrage (Paris, Didot, An IX—1800) la Note VII, p. 338—342 contient une démonstration rigoureuse de l'équivalence des polyèdres symétriques par décomposition en pyramides autosymétriques. Il n'est plus question dans cette Note VII des triangles sphériques, mais les propositions XXI, XXII, XXIII, p. 248—252, établissent avec rigueur l'équivalence des triangles sphériques symétriques et le théorème relatif à l'aire du triangle sphérique.

D'après BALTZER (*Die Elemente der Mathematik*, B. II, zweite Auflage, Leipzig, Hirzel 1867, p. 168—169, Note) „den Beweis für die Gleichheit jener incongruenten Flächen [der symmetrischen sphärischen Dreiecke] hat LEGENDRE von einem ungenannten ausländischen Mathematiker erhalten und in den Elém. de géom. VII, 21 (2^{te} Ausg. 1800) mitgeteilt“.

KANT, la première fois qu'il parle du *paradoxe des objets symétriques*, dans son Mémoire *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume* (1768; *Werke*, édition ROSENKRANZ und SCHUBERT, Leipzig, Voß 1839, B. 5, p. 291—301) remarque explicitement (p. 299—300) qu'un objet *autosymétrique* est superposable à son symétrique, ce qui est le principe de la démonstration de LEGENDRE, pour l'équivalence des polyèdres et des triangles sphériques symétriques. D'autre part, J. A. SEGNER a signalé en 1741 (d'après G. S. KLÜGEL und C. B. MOLLWEIDE, *Mathematisches Wörterbuch* 4, Leipzig 1823, p. 859) dans sa *Defensio adversus censuram Berolinensem* p. 32 la lacune de la démonstration de l'équivalence des triangles sphériques symétriques.

Ces faits soulèvent les questions suivantes: 1^o A-t-on publié, entre 1741 et 1800, avant LEGENDRE, une démonstration de l'équivalence des figures symétriques, basée sur leur décomposition en figures autosymétriques? 2^o Peut-on conjecturer le nom du géomètre étranger qui a communiqué à LEGENDRE la démonstration de l'équivalence des triangles sphériques symétriques?

Gand.

P. MANSION.

.

Rezensionen.

Royal society of London. Catalogue of scientific papers 1800—1900. Subject index. I. Pure mathematics. Cambridge 1908. Groß-8°, LVIII + 666 S. — 27 Sh.

Am Schlusse meiner Besprechung des *Mathematischen Bücherschatzes* von E. WOLFFING habe ich (siehe *Biblioth. Mathem.* 4, 1903, S. 313) im Vorübergehen das Fehlen einer Bibliographie der periodischen mathematischen Literatur des 19. Jahrhunderts als einen bedauerlichen Umstand bezeichnet. Seitdem sind allerdings einige neue „Séries“ von Karten des *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques* erschienen, aber auch wenn diese Arbeit einmal vollständig abgeschlossen wird, kann sie meines Erachtens höchstens als Notbehelf zur Anwendung kommen. Dagegen besitzen wir nunmehr eine andere, viel brauchbarere bibliographische Arbeit für denselben Zweck, nämlich den ersten Band des *Subject index* der „Royal society“.

Das Material, das für diesen Band benutzt worden ist, besteht teils aus den Zetteln des früher (1867—1902) veröffentlichten alphabetischen *Catalogue of scientific papers* für 1800—1883, teils aus ähnlichen Zetteln für die Zeit 1884—1900. Bei der Bearbeitung des Materials sind indessen, wie der Titel *Subject index* des Kataloges andeutet, die Titel der verzeichneten Abhandlungen durch kurze Angaben („entries“) in englischer Sprache ersetzt worden, welche Angaben vor den Verfassernamen stehen. Beispielsweise ist die *Bemerkung über reelle Primzahlen* L. GEGENBAUERS (*Monatsh. für Mathem.* 7, 1896, S. 73—76) verzeichnet wie folgt: „Functions giving real prime numbers. Gegenbauer, L. *Mh. Mth. Ps.* 7 (1896) 73.“. Gewöhnlich sind die Angaben aus den Titeln entnommen, aber zuweilen sind sie verfertigt unter Bezugnahme auf den Inhalt der betreffenden Abhandlung.

Hinsichtlich der Klassifikation ist das Schema der internationalen naturwissenschaftlichen Bibliographie maßgebend gewesen. Aber wenn es sich um ein ganzes Jahrhundert handelt, werden die meisten der Abteilungen dieses Schemas sehr umfangreich, und die Frage der Anordnung innerhalb der im voraus festgestellten Abteilungen mußte also besonders in Erwägung gezogen werden. Zuweilen sind neue Unterabteilungen gebildet, aber im allgemeinen ist die Frage durch alphabetische Anordnung nach den Stichwörtern der soeben erwähnten Angaben erledigt worden. In einigen Fällen ist die Anordnung chronologisch nach den Erscheinungsjahren, ausnahmsweise (in der Abteilung für Geschichte der Mathematik) chronologisch nach den behandelten Gegenständen.

Wer sich ein wenig mit ähnlichen Aufgaben beschäftigt hat, weiß, wie schwierig die Klassifikation des Materials, um das es sich hier handelt, sein muß. Auch wenn man ein gewisses Gebiet der Mathematik vollständig be-

herrscht, und auch wenn man jede Arbeit auf diesem Gebiete genau durchgelesen hat, bietet die Klassifikation nicht selten bedeutende Schwierigkeiten dar. Allein in diesem Falle handelt es sich um beinahe 40 000 Schriften aus allen Gebieten der reinen Mathematik, und es wäre unsinnig vorauszusetzen, daß für jedes Gebiet ein kompetenter Bearbeiter aufgefunden werden könnte. Vielmehr muß man annehmen, daß eine ziemlich große Zahl der „entries“ von Mitarbeitern herrühren, denen keine besondere Sachkunde zur Verfügung gestanden hat, und daß auch bei der Klassifikation ähnliche Verhältnisse vorlagen. Daß unter solchen Umständen die Vorteile, welche die Anwendung von „entries“ theoretisch bietet, nicht selten in Nachteile verwandelt werden mußten, ist sehr natürlich und wird recht bald von den Benutzern des Katalogs konstatiert werden. In den bisher erschienenen Rezensionen werden Belege hierfür gegeben und weitere Belege sind fast auf jeder Seite zu finden. Hier werde ich mich indessen auf die Abteilung „History“ (S. 3—17) beschränken.

Diese Abteilung beginnt mit einigen Angaben, die chronologisch nach den behandelten Gegenständen geordnet sind, und dann folgen in alphabetischer Ordnung die übrigen „entries“, freilich so, daß die Angaben über arabische, griechische und indische Mathematik besondere Unterabteilungen mit ähnlicher Anordnung bilden; beispielsweise sind die 33 Angaben über arabische Mathematik zwischen die Stichwörter „Approximation“ und „ARBOGASTS rule“ eingefügt. Die Stichwörter sind in den meisten Fällen entweder Personennamen, z. B. „DIOPHANTUS“ oder mathematische Terme, z. B. „Definite integrals“.

Daß eine Anordnung wie die soeben beschriebene große Vorteile haben kann, soll natürlich nicht in Abrede gestellt werden, aber eine notwendige Voraussetzung dafür ist, daß die Arbeit von Personen ausgeführt wird, die wenigstens bis zu einem gewissen Grade sachkundig und geschult sind. Aber leider ist die Voraussetzung in diesem Falle kaum erfüllt worden. In betreff der fehlenden Sachkunde lege ich geringeres Gewicht auf Übersetzungen wie z. B. „Grecian page-numbers (Seitenzahlen!) and diametral numbers (S. 10), oder auf den Umstand, daß ein Artikel über AEGIDIUS DE COLUMNA unter griechischer Mathematik aufgeführt worden ist. Schlimm ist dagegen, daß die Artikel über LEONARDO PISANO teils unter „FIBONACCI“ teils unter „LEONARDO“ zu suchen sind, denn dieser Umstand deutet darauf hin, daß die Geschichte der Mathematik für die Redaktion des Katalogs eine „terra incognita“ gewesen ist. Bemerkt man ferner, daß zwei Artikel über LEONARDO PISANO unter „CANTORS history“ sich befinden, so bekommt man einen guten Beleg für die Nachteile, welche die Methode der „entries“ mit sich führt, wenn die nötige Sachkunde fehlt. Im Jahre 1893 veröffentlichte H. G. ZEUTHEN die erste seiner *Notes sur l'histoire des mathématiques*, nämlich *Sur la résolution numérique d'une équation du 3^e degré par LÉONARD DE PISE* und die Einleitung zu diesen *Notes* beginnt: „Un nouveau volume des *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* von MORITZ CANTOR a paru en 1892“. Unmittelbar nach dem ZEUTHENSchen Artikel folgt nun ein anderer von J. P. GRAM über denselben Gegenstand: *Essai sur la restitution du calcul de LÉONARD DE PISE sur l'équation* $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ und auf Grund der Anfangsworte des ZEUTHENSchen Artikels hat die Redaktion des Kataloges die beiden fraglichen Artikel unter: „CANTOR's history: 13th century solution of a cubic“ aufgeführt, obgleich es außer dem Stichwort „LEONARDO PISANO“ noch ein Stichwort „Equations of 3rd order“ (S. 7) gibt.

Daß auch die Schulung der Mitarbeiter des Kataloges zuweilen recht mangelhaft gewesen ist, scheint aus den zahlreichen Inkonssequenzen bei der Klassifikation hervorzugehen. Beispielsweise gibt es S. 11 ein Stichwort: „Infinitesimal calculus“ mit 7 Angaben, aber S. 5 wird unter „Calculus, infinitesimal“ noch ein Artikel genau derselben Art verzeichnet. Ein anderes Beispiel auffälliger Inkonssequenzen bieten die Stichwörter „Hebrew“ (S. 11) und „Jewish“ (S. 12).

Nun ist ja andererseits die Zahl der historischen Angaben so klein, daß die Ordnungsfolge eigentlich gleichgültig ist, und der Schaden einer unrichtigen oder inkonsequenten Klassifikation dieser Angaben wird darum nicht besonders erheblich werden, aber immerhin wäre es meines Erachtens besser gewesen, alle historischen Artikel chronologisch nach den Erscheinungsjahren zu ordnen. Inwieweit der Katalog die mathematisch-historische Literatur 1800—1900 vollständig verzeichnet, ist es mir nicht möglich zu beurteilen. In der Abteilung „History“ habe ich vergebens einige tatsächlich 1800—1900 erschienene mathematisch-historische Artikel gesucht, aber später ist es mir gelungen, gewisse derselben an anderen Stellen wiederzufinden, freilich ohne daß ich ausfinden konnte, warum sie nicht als historisch betrachtet worden sind. Beispielsweise wird S. 8 unter „Geodetic lines, history“ eine Abhandlung von P. STÄCKEL: *Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien* verzeichnet, während mein rein historischer Artikel: *Sur la découverte de l'équation générale des lignes géodésiques* erst S. 637 und zwar in der Abteilung „Geometry“ erwähnt wird!

Wenn man indessen von den Mängeln des Kataloges absieht, die ich oben angegeben oder angedeutet habe, kann man nicht umhin, die Veröffentlichung der großen Arbeit mit Freuden zu grüßen. Ein besonderes Lob verdient der sehr mäßige Preis des starken Bandes.

Stockholm.

G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

Ahrens, 22, 71.	Du Pasquier, 60, 61.	Jourdain, 78.	Poincaré, 79.
André, 101.	Dürer, 40.	Kapteyn, 5.	Rudio, 102.
Anthiaume, 33.	Ebeling, 28.	Kepler, 44.	Salkowski, 92.
Archibald, 83.	Eckart, 66.	Klug, 44.	Schawen, 58.
Arrillaga, 95.	Eneström, 3, 42, 58.	Kluyver, 5.	Schilling, 69.
Auerbach, 6.	Engel, 72.	Krause, 100.	Schlesinger, 76.
Baillaud, 94.	Euklides, 39.	Lampe, 4.	Schottenloher, 39.
Baeumker, 26.	Favaro, 46, 47, 48, 49, 50.	Lange, 37.	Schoute, 5.
Barbarin, 98.	Fuss, 71.	Lebon, 80, 81.	Smith, D. E., 9, 41.
Biedenkapp, 70.	Gans, 63.	Levi ben Gerson, 37.	Sottas, 33.
Billy, 53.	Gauss, 69.	Levi Civita, 87.	Stäckel, 59, 65, 71.
Borel, 77.	Guimarães, 24.	Lind, 10.	Stadler, 2.
Bosmans, 43.	Haas, 18, 21.	Lockwood, 34.	Sudhoff, 2.
Bosscha, 56.	Haskins, 84.	Loria, 13, 14.	Suter, 32.
Brown, 94.	Heath, 29.	Manville, 75.	Szabó, 68.
Brunschvicg, 11.	Heiberg, 35.	Mikami, 55.	Teixeira, 15, 16.
Buchka, 2.	Hilbert, 93.	Muir, 67, 73, 74.	Timmerding, 64.
Cabreira, 82.	Hölder, 91.	Müller, Fel., 8.	Vacca, 12.
Cajori, 52.	Hoppe, 57, 62.	Naber, 25.	Vogt, 27.
Cantor, 7.	Huygens, 54.	Neumann, 97.	Volterra, 99.
Cardinaal, 5.	Jacobi, 71.	Olbers, 69.	Voss, 25.
Carrara, 30.	Janet, 90.	Paoli, 51.	Vries, 5.
Decourdemanche, 20.	Jansen, 26.	Peltzer, 40.	Wiedemann, 31.
Duhem, 19, 38.	Jouguet, 17.	Pincherle, 96.	Wohlwill, 45.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8°. [1
26: 2 (1910).

Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, herausgegeben von K. von BUCHKA, H. STADLER, K. SUDHOFF. Leipzig. 8°. [2
2 (1910): 1—3.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. ENESTRÖM. Leipzig (Stockholm). 8°. [3
10, (1909/10): 2.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. LAMPE. Berlin. 8°. [4
38 (1907): 3.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam

par H. DE VRIES, J. CARDINAAL, J. C. KLUYVER, W. KAPTEYN, P. H. SCHOUTE. Amsterdam. 8°. [5
17: 2 (octobre 1908—avril 1909), 18: 1 (avril—octobre 1909).

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Herausgegeben von FELIX AUERBACH (1909). — [Rezension:] *New York, Americ. mathem. soc., Bulletin* 16, 1910, 321—322. (J. B. SHAW.) — *Nature* 81, 1909, 484—485. — *Science* 31, 1910, 223—224. (F. N. COLE.) [6

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1^o (1907). [Kleine Bemerkungen:] *Biblioth. Mathem.* 10, 1909/10, 164—165. (G. ENESTRÖM.) — 2^o (1900). [Kleine Bemerkungen:] *Biblioth. Mathem.* 10, 1909/10, 166—176. (G. ENESTRÖM, A. STURM.) — 3^o (1901). [Kleine Bemerkungen:] *Biblioth. Mathem.* 10, 1909/10, 177—179. (G. ENESTRÖM.) [7

Müller, Felix, Führer durch die mathematische Literatur (1908). [Rezension:] *Revue génér. d. sc.* 20, 1909, 329. [8

Smith, D. E., *Rara arithmetica* (1908). [Rezension:] *New York, Americ. mathem. soc., Bulletin* 16, 1910, 312—314. (L. L. JACKSON.) [9

Lind, B., Über das letzte Fermatsche Theorem. [10]

Abhandl. sur Gesch. d. mathem. Wiss. 26: 2, 1910, 21—65. — [Selbstanzeige:] Deutsche Mathem.-Verein, Jahresber. 19, 1910, 41. — [Rezension:] Arch. der Mathem. 16., 1910, 107—109. (A. FLICK.) — Mathesis 10., 1910, 102. (P. M.)

Brunschvicg, L., Une phase du développement de la pensée mathématique. [11]
Revue de métaphys. et de morale 17, 1909, 309—356. — Übersicht der Geschichte der höheren Analysis.

Vacca, G., A new analytical expression for the number π , and some historical considerations. [12]
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 16., 1910, 368—369.

Loria, G., Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche (1907). [Rezension:] L'enseignement mathém. 12, 1910, 162—163. — Monatsch. für Mathem. 21, 1910, Lit.-Ber. 4. (G. K.) — Nature 81, 1909, 361—362. [13]

Loria, G., Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von F. SCHÜTTE. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Erster Teil. Leipzig, Teubner 1910. [14]
8°, XVIII + 488 S. — [16,50 Mk.] — [Selbstanzeige:] Deutsche Mathem.-Verein, Jahresber. 19, 1910, 62—63.

Teixeira, F. G., Tratado de las curvas especiales notables (1905). [Rezension:] Monatsch. für Mathem. 21, 1910, 9—10. (G. K.) [15]

Teixeira, F. G., Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches (1908—1909). [Rezension:] Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 9., 1910, 182—184. (Se.) — L'enseignement mathém. 12, 1910, 164. (H. F.) [16]

Jouguet, E., Lectures de mécanique. La mécanique enseignée par les auteurs originaux. I—II (1908—1909). [Rezension:] Arch. der Mathem. 16., 1910, 51—52. (E. LAMPE.) — Nature 81, 1909, 301—302. [17]

Haas, A. E., Die Entwicklungsgeschichte des Satzes von der Erhaltung der Kraft (1909). [Rezension:] Arch. der Mathem. 16., 1910, 55—56. (P. JOHANNESSEN.) [18]

Duhem, P., Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée (1908). [Rezension:] New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 16., 1910, 325—327. (E. B. WILSON.) — Revue génér. d. sc. 20, 1909, 554—556. [19]

Decourdemanche, J. A., Traité pratique des poids et mesures des peuples anciens et des Arabes. Paris, Gauthier-Villars 1909. [20]
8°, VII + (1) + 144 S. + 1 Tabelle. — [5 fr.] — [Rezension:] Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 17., 1910, 646—648.

Haas, A. E., Technik und Energetik. [21]
Arch. für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 2, 1910, 214—227. — Historische Notiz.

Ahrens, W., Mathematische Unterhaltungen und Spiele. I (1910). [Rezension:] Amsterdam, Wisk.

genoots., Nieuw archief 9., 1910, 184. (Se.) — Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 17., 1910, 632—636. (H. B.) [22]

Voss, A., Über das Wesen der Mathematik (1908). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 10., 1909/10, 181—184. (G. ENSTRÖM.) [23]

Guimarães, R., Les mathématiques en Portugal (1909). [Rezension:] Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 17., 1910, 636—646. (H. BOSMANS.) — L'enseignement mathém. 12, 1910, 158—159. (E. LEBON.) — Mathesis 10., 1910, 68. (J. NEUBERG.) [24]

b) Geschichte des Altertums.

Naber, H. A., Das Theorem des Pythagoras (1908). [Rezension:] Nature 81, 1909, 361—362. [25]

***Jansen, F.**, De cirkelquadratuur bij de Grieken. Haarlem, Visser 1909. [26]
8°, 54 S.

Vogt, H., Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts. [27]
Biblioth. Mathem. 10., 1909/10, 97—155.

Ebeling, R., Mathematik und Philosophie bei Plato (1909). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 81, 1910, 336. (W. NESTLE.) [28]

Heath, T. L., The thirteen books of Euclid's Elements translated (1908). [Rezension:] Nature 81, 1909, 271—272. [29]

c) Geschichte des Mittelalters.

Carrara, B., L'opera scientifica di Gerberto o papa Silvestro II novellamente discussa ed illustrata. [30]
Roma, Accad. d. Nuovi Lincei, Memorie 26, 1909, 195—228.

Wiedemann, E., Über den Sextant des al Chogendi. [31]
Arch. für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 2, 1910, 149—151.

Suter, H., Zur Trigonometrie der Araber. [32]
Biblioth. Mathem. 10., 1909/10, 156—160.

***Anthiaume, A. et Sottas, J.**, L'astrolabe-quadrant du musée des antiquités de Rouen. Recherches sur les connaissances mathématiques, astronomiques et nautiques au moyen âge. Paris, Thomas 1910. [33]
8°, 162 S. + 8 Taf. — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 24., 1910, 15—23. (J. C.)

Haskins, Ch. H. and Lockwood, P., The sicilian translators of the twelfth century and first latin version of Ptolemy's Almagest. [34]
Harvard studies in classical philology 21, 1910, 75—102.

Heiberg, J. L., Eine mittelalterliche Übersetzung der Syntax des Ptolemaios. [35]
Hermes 45: 1, 1910.

Baumker, Cl., Witalo, ein Philosoph und Naturforscher des 13. Jahrhunderts (1908). [Rezension:] Deutsche Literatur. 31, 1910, 984—985. (R. STÖLZLE.) [36]

Lange, G., Sefer Maassei Choscheb. Die Praxis des Rechners (1909). [Rezension:] Arch. der Mathem. 16, 1910, 150. (W. AHRENS.) [37]

Duhem, P., Études sur Léonard de Vinci I—II (1906—1909). [Rezension:] Nature 81, 1909, 2—3. — Revue de métaphys. et de morale 1909, suppl. de sept., 15. [38]

d) Geschichte der neueren Zeit.

*Schottenloher, K., Jakob Ziegler aus Landau a. d. Isar. Ein Gelehrtenleben aus der Zeit des Humanismus und der Reformation. Münster, Aschendorff 1910. [39]
8°. — [11,25 Mk.]

*Dürer, A., Unterweisung der Messung. Herausgegeben sowie mit einem Nachwort versehen von A. PELTZER, München 1909. [40]
8°, 196 S. — [6 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Literatur. 31, 1910, 618—619. (H. W. SINGER.)

Smith, D. E., The invention of the decimal fraction. [41]
New York, Columbia university, Teachers college Bulletin 5, 1910, 11—21.

Eneström, G., Über den Ursprung eines von Ramus (1569) gelehrtens Divisionsverfahrens. [42]
Biblioth. Mathem. 10, 1909/10, 180. — Anfrage.

Bosmans, H., Un émule de Viète: Ludolphe van Ceulen. Analyse de son: „Traité du cercle“. [43]
Bruzeller, Soc. scient., Annales 34: 2, 1910, 88—139.

Klug, R., Johannes Kepler, Neue Stereometrie der Fässer (1908). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 21, 1910; Lit.-Ber. 14. (Th. SCH.) [44]

Wohlwill, E., Galilei und sein Kampf für die Copernikanische Lehre. Erster Band. Bis zur Verurteilung der Copernikanischen Lehre durch die römischen Kongregationen. Hamburg, Voß 1909. [45]
8°, XX + 646 S. — [14 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Literatur. 31, 1910, 374—377. (J. KLUG.)

Favaro, A., Sul campanile di San Marco trecento anni da oggi (21 agosto 1609—1909). [46]
Rivista di astronomia (Torino) 3, 1909, 9 S. — Über die astronomischen Beobachtungen GALILEI.

Favaro, A., Serie ventesima di scampoli Galileiani. [47]
Padova, Accad. d. sc., Atti e memorie 26, 1910, 5—28.

Favaro, A., Galileo e le edizioni delle sue opere. [48]
Firenze, Accad. della Crusca, Atti 1908/9, 46 S.

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXIII. Federigo Borromeo. [49]
Miscellanea Ceriani (Milano 1909). 24 S.

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXIV. Marino Ghetaldi. [50]
Venezia, Istituto Veneto, Atti 69: 2, 1910, 303—324.

Paoli, A., La scuola di Galileo nella storia della filosofia. Corrispondenza del padre Grande col Tomasso Ceva. [51]
Pisa, Università Toscana, Annali 27, 1908, 44 S.

Cajori, F., A note on the history of the slide rule [52]
Biblioth. Mathem. 10, 1909/10, 161—163.

Schaeuwen, P. von, Jacobi de Billy Doctrinae analyticae inventum novum, Fermats Briefen an Billy entnommen, herausgegeben und übersetzt. Berlin, Salle 1910. [53]
8°, 143 S. — [3 Mk.]

Oeuvres complètes de CHR. HUYGENS. Tome 11 (1908). [Rezension:] Nature 80, 1909, 307. [54]

Mikami, Y., Hatono Soha and the mathematics of Seki. [55]
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 9, 1910, 158—171.

Bosscha, J., La découverte en Australie de l'exemplaire des „Principia“ qui a servi à Newton même. [56]
Arch. néerland. d. sc. 14, 1909, 278—288.

Hoppe, E., Zum Gedächtnis Leonhard Eulers. [57]
Physikal. Zeitschr. 8, 1907, 225—232.

Eneström, G., Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. Erste Lieferung. Leipzig, Teubner 1910. [58]
8°, 209 S. — [10 Mk.] — Jahresber. d. deutschen Mathem.-Verein., Ergänzungsband 4: 1.

Stäckel, P., Umfang der einzelnen Abhandlungen Leonhard Eulers. Bemerkungen und Berichtigungen zu der Müllerschen Liste. [59]
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 19, 1910, 25—39. — Voran geht eine kurze Bemerkung über denselben Gegenstand von FELIX MÜLLER.

Du Pasquier, L. G., Über Leonhard Eulers Verdienste um Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Anwendungen. Wissen und Leben (Zürich) 1910. 13 S. [60]

Du Pasquier, L. G., Eine deutsche Abhandlung Leonhard Eulers über Witwenkassen. [61]
Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrschr. 55, 1910, 14—22.

Hoppe, E., Die Verdienste Eulers um die Optik (1907). [Auszug:] Physikal. Zeitschr. 8, 1907, 856—858. [62]

Gans, R., Euler als Physiker. [63]
Physikal. Zeitschr. 8, 1907, 859—865.

- Timmerding, E.**, Eulers Theorie des Schiffes und die Bewegungsgleichungen des starren Körpers (1908). [Vorläufiger Abdruck:] *Physikal. Zeitschr.* 8, 1907, 865—869. [64]
- Stäckel, P.**, Johann Albrecht Euler. [65]
Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 55, 1910, 28 S.
- Eckart, E.**, A. G. Kästners Selbstbiographie (1909). [Rezension:] *Arch. der Mathem.* 16., 1910, 72. (E. JAHNKE.) [66]
- Muir, Th.**, Waring's expression for a symmetric function in terms of like powers. [67]
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings 27, 1909, 5—9.
- Szabó, P.**, Beiträge zum Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai und zur Biographie von W. Bolyai. [68]
Mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn 25 (1907), 1909, 226—240.
- Schilling, C.**, Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke. Zweiter Band. Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss. Zweite Abteilung. Berlin, Springer 1909. [69]
8°, VI + 758 S. — [16 Mk.] — [Rezension:] *Nature* 82, 1910, 211—212. (J. L. E. D.)
- *Bliedenkapp, G.**, Sophie Germain. Ein weiblicher Denker. Jena, Schmidt 1910. [70]
8°. — [3 Mk.]
- Stäckel, P. und Ahrens, W.**, Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers (1908). [Rezension:] *Bullet. d. sc. mathém.* 32., 1909, 260—261. (J. T.) [71]
- Engel, F.**, Hermann Graßmann. [72]
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 19, 1910, 1—13.
- Muir, Th.**, The theory of general determinants in the historical order of development up to 1860. [73]
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 28, 1908, 676—702.
- Muir, Th.**, The theory of Jacobians in the historical order of its development up to 1860. [74]
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 29, 1909, 499—516.
- Mauville, O.**, Les découvertes modernes en physique. 2^e édition (1909). [Rezension:] *Arch. der Mathem.* 16., 1910, 59—60. (E. WARTZMANN.) — *Naturwiss. Rundschau* 25, 1910, 75—76. (A. BECKER.) [75]
- Schlesinger, L.**, Bericht über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865 (1909). [Rezension:] *Deutsche Literaturz.* 31, 1910, 887—888. (F. MÜLLER.) [76]
- Borel, E.**, La théorie des ensembles et la théorie des fonctions. [77]
Revue génér. d. sc. 20, 1909, 215—224. — *Historische Notiz.*
- Jourdain, Ph. E. B.**, The development of the theory of transfinite numbers. III. [78]
Arch. der Mathem. 16., 1910, 21—48.
- Poincaré, H.**, Sully Prudhomme mathématicien. [79]
Revue génér. d. sc. 20, 1909, 657—662.
- Lebon, E.**, Gaston Darboux. Biographie, bibliographie analytique des écrits. Paris, Gauthier-Villars 1910. [80]
Gross 8°, Porträt + VIII + 72 S., — [7 fr.] — [Rezension:] *Bruzelles, Soc. scient., Revue des quest. scient.* 17., 1910, 648—649. (J. N.) — *Mathesis* 10., 1910, 68. (J. N.)
- Lebon, E.**, Henri Poincaré (1909). [Rezension:] *Amsterdam, Wisk. genoots.*, *Nieuw archief* 9., 1910, 186—188. (KL.) [81]
- Cabreira, A.**, Les mathématiques en Portugal. Deuxième défense. Lisbonne 1910. [82]
8°, Porträt + XXXIII + (1) + 118 S.
- Archibald, R. C.**, Notes on the Institut de France and the annual meeting of the Académie des sciences. [83]
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 16., 1910, 328—332.
- e) Nekrologe.
- Domenico Amanzio (1854—1908).** [84]
In memoria di DOMENICO AMANZIO. Napoli 1909.
- Hugh Blackburn (1823—1909).** [85]
Nature 81, 1909, 522—523. (W. J.)
- Alfredo Capelli (1855—1910).** [86]
Periodico di matem. 25, 1909/10, 191—192.
- Valentino Cerruti (1850—1909).** [87]
Roma, Accad. d. Lincei, Rendic. (Sc. matem.) 18., 2, 1909, 565—575. (T. LEVI CIVITA.) — *Periodico di matem.* 25, 1909/10, 46—48.
- Luigi Cremona (1830—1908).** [88]
Omorance al prof. LUIGI CREMONA. Roma 1909.
- Albin Herzog (1852—1909).** [89]
Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 54, 1909, 511—515.
- Elie Mascart (1837—1908).** [90]
Revue génér. d. sc. 20, 1909, 574—593. (P. JANET.)
- Adolph Mayer (1839—1908).** [91]
Leipzig, S.-chs. Ges. d. Wiss., Berichte (Math. Kl.) 60, 1908, 355—378. (U. HÖLDER.)
- Eugen Meyer (1871—1909).** [92]
Berlin, Mathem. Ges., Sitzungsber. 9, 1910, 9—13 [mit Schriftenverzeichnis]. (E. SALKOWSKI.)
- Hermann Minkowski (1864—1909).** [93]
Göttingen, Ges. d. Wiss., Nachrichten (Geschäftl. Mitteil.) 1909, 72—101. (D. HILBERT.) — *Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr.* 54, 1909, 505—506.
- Simon Newcomb (1835—1909).** [94]
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 16., 1910, 341—355. (E. W. BROWN.) — *Revue génér. d. sc.* 20, 1909, 725—727. (H. BAILLAUD.)

- Francisco de Paula Rojas** (?—1909). [95]
Madrid, Acad. d. ciencias, Anuario 1910, 180—144. (F. DE P. ARRILAGA.)
- Ferdinando Paolo Ruffini** (1823—1908). [96]
Bologna, Accad. d. sc., Rendiconto 12., 1907/8, 153—168. (S. PINCHERLE.)
- Wilhelm Scheibner** (1826—1908). [97]
Leipzig, Sächs. Ges. d. Wiss., Berichte (Mathem. Kl.) 60, 1908, 377—390. (C. NEUMANN.)
- Joseph de Tilly** (1837—1906). [98]
Bordeaux, Soc. d. sc., Procès-verbaux 1908/9, 145—155. (P. BARBARIN.)
- Giovanni Vallati** (1863—1909). [99]
Periodico di matem. 24, 1909, 289—291. (V. VOLTERRA.)
- Gustav Zeuner** (1828—1907). [100]
Leipzig, Sächs. Ges. d. Wiss., Berichte (Mathem. Kl.) 60, 1908, 341—351. (M. KRAUSE.)
- f) Aktuelle Fragen.
- André, D.**, Des notations mathématiques (1909)
 [Rezensien:] *Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw archief 9., 1910, 191—192. (KL.) [101]
- Rudio, F.**, Die Eulerausgabe. (Fortsetzung.) [102]
Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrschr. 54, 1909, 465—480.
- [Die Euler-Ausgabe.] [103]
Deutsche Mathem.-Verein, Jahresber. 19, 1910, 31—32. — *L'enseignement mathém.* 12, 1910, 55. — *Wiadomości matem.* 13, 1909, 315—316.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Professor G. BOCCARDI zum Professor der Astronomie an der Universität in Turin.

— Dozent E. COTTON in Paris zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. H. DISSELHORST in Berlin zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Braunschweig.

— Privatdozent H. EGERER in München zum Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Drontheim.

— Professor G. FABER in Tübingen zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Stuttgart.

— Professor K. T. FISCHER in München zum Professor der Physik an der Universität von La Plata.

— Professor W. B. FITE in Ithaca zum Professor der Mathematik an der „Columbia university“ in New York.

— Privatdozent E. GROSSMANN in München zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Privatdozent FR. HARMS in Würzburg zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor F. HAUSDORFF in Leipzig zum Professor der Mathematik an der Universität in Bonn.

— H. E. HAWKES in New Haven zum Professor der Mathematik an der „Columbia university“ in New York.

— E. W. HOBSON in Cambridge zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. W. KNOCHE in Berlin zum Direktor des meteorologischen Zentralinstituts in Santiago di Chile.

— Privatdozent CL. SCHAEFER in Breslau zum Professor der Physik an der Universität von La Plata.

— Professor ERHARD SCHMIDT in Zürich zum Professor der Mathematik an der Universität in Erlangen.

— Dr. J. S. SHEARER in Ithaca zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor J. C. STONE an dem „Michigan state normal college“ zum Professor der Mathematik an der „New Jersey state normal school“ in Montclair.

— Privatdozent K. W. WIRTZ in Straßburg zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Privatdozent E. ZERMELO in Göttingen zum Professor der Mathematik an der Universität in Zürich.

Todesfälle.

— DOMENICO AMANZIO, Professor der Mathematik am „Collegio militare“ in Neapel, geboren in Marano den 2. Februar 1854, gestorben in Neapel den 19. August 1908.

— CARL FABIAN EMANUEL BJÖRLING, früher Professor der Mathematik an der Universität in Lund, geboren in Stockholm den 30. November 1839, gestorben in Lund den 6. Mai 1910.

— ADALBERT BOCK, Professor an der Kreisrealschule in Regensburg, geboren in Oberkirchberg den 9. März 1865, gestorben in Regensburg den 29. Januar 1909.

— EDWARD BOWSER, früher Professor der Mathematik am „Rutgers college“, gestorben in Honolulu den 29. Februar 1910, 65 Jahre alt.

— ALFREDO CAPELLI, Professor der Mathematik an der Universität in Neapel, geboren in Milano den 5. August 1855, gestorben in Neapel den 28. Januar 1910.

— AMOS EMERSON DOLEBEAR, Professor der Physik am „Taft college“, geboren in Norwich, Conn., den 10. November 1837, gestorben den 28. Februar 1910.

— KARL DOMALIP, Professor der Elektrotechnik an der böhmischen Technischen Hochschule in Prag, geboren in Kosmonos den 24. Juni 1846, gestorben in Prag den 19. November 1909.

— HENRI DUFOUR, Professor der Physik an der Universität in Lausanne, geboren

in Morges den 12. Oktober 1852, gestorben den 7. Februar 1910.

— WERNER ERNST GERLAND, Professor der Physik an der Bergakademie in Clausthal, geboren in Cassel den 16. März 1838, gestorben in Clausthal den 22. März 1910.

— FRIEDRICH KOHLRAUCH, emeritierter Präsident der physikalisch-technischen Reichsanstalt, geboren in Rinteln a. d. Weser den 14. Oktober 1840, gestorben in Marburg den 17. Januar 1910.

— EUGEN MEYER, Oberlehrer am Realgymnasium in Charlottenburg, geboren in Bielefeld den 17. Juni 1871, gestorben in Charlottenburg den 23. Oktober 1909.

— HENRY BYRON NEWSON, Professor der Mathematik an der Universität von Kansas, geboren in Mount Gilead, Ohio, den 10. Juli 1860, gestorben den 10. Februar 1910.

— CARR PRITCHETT, früher Direktor des „Morrison astronomical observatory“, geboren zu Henry Co., Va., den 4. September 1823, gestorben den 18. März 1910.

— FREDERICK PURSER, Professor der Physik an der Universität in Dublin, geboren in Dublin den 13. Januar 1840, gestorben den 28. Januar 1910.

— AUGUST RITTER, früher Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Aachen, geboren in Lüneburg den 11. Dezember 1826, gestorben daselbst den 26. Februar 1908.

— FRANCISCO DE PAULA ROJAS, früher Professor der mathematischen Physik an der Universität in Madrid, gestorben in Madrid den 18. Februar 1909.

— FERDINANDO PAOLO RUFFINI, Professor der theoretischen Mechanik an der Universität in Bologna, geboren in Reggio Emilia den 1. April 1823, gestorben in Bologna den 8. Januar 1908.

— CHARLES TODD, Gouvernementsastronom von Südastralien, geboren in Islington den 7. Juli 1826, gestorben 1910.

— EDMUND WRIGHT, Professor der Mathematik am „Bryn Mawr college“, gestorben den 20. Februar 1910.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Göttingen hat Privatdozent C. H. MÜLLER für das Sommersemester 1910 eine einstündige Vorlesung über die Mathematik bei ARCHIMEDES angekündigt.

— A l'université de Moskwa M. V. BOBYNIN a annoncé pour l'année scolaire 1909—1910 quatre cours (chacun une heure par semaine) d'histoire des mathématiques, à savoir: 1. Histoire des connaissances mathématiques antérieures à la science; 2. Histoire des mathématiques grecques; 3. Histoire des mathématiques au moyen âge; 4. Histoire des mathématiques modernes.

Gekrönte Preisschriften.

— *Reale Istituto Lombardo in Milano.* Un prix a été décerné à M. U. AMALDI à Modena pour son mémoire „I gruppi continui infiniti di trasformazioni puntali dello spazio a tre dimensioni“.

Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Concours de l'an 1911. On demande de nouvelles recherches sur les développements des fonctions (réelles ou analytiques) en séries de polynômes. — Résumer les travaux sur les systèmes de coniques dans l'espace et faire de nouvelles recherches sur ces systèmes.

— *Société scientifique de Bruxelles.* Concours de l'an 1910. On demande de résumer et d'apprécier l'œuvre géométrique de GRÉGOIRE DE ST. VINCENT.

— *Académie des sciences de Danemark à Kopenhagen.* Concours de l'an 1911. Exposer une méthode de transformation d'une série asymptotique en série convergente ayant le même degré d'approximation; la méthode devra s'appliquer à la majorité des séries asymptotiques connues. On discutera spécialement la question de savoir quel sens il faut attribuer aux développements trouvés quand la variable réelle est supposée complexe dans un domaine convenable.

— *Academia de ciencias de Madrid.* Concurso del año 1911. Problemas geométricos más notables, cuya resolución es imposible con el sólo auxilio de la regla y el compás.

— *Académie des sciences de Paris.* Concours de l'an 1912. Perfectionner la théorie des équations différentielles algébriques du second ou du troisième ordre, dont l'intégrale générale est uniforme.

The two Āryabhaṭas.

By G. R. KAYE in Simla, India.

At the beginning of the eleventh century of our era the celebrated ALBERUNI visited India, and, although he did not spare either trouble or money in the collection of Sanskrit books, particularly on astronomical subjects, and in obtaining information from Hindu scholars¹), yet he was not able to find any of the works of ĀRYABHAṬA. He writes²): „I have not been able to find anything of the books of ĀRYABHAṬA. All I know of him I know through the quotations from him given by BRAHMA GUPTA.“ Again we learn from a passage in the *Maha Āryasiddhānta*³) that the original works of ĀRYABHAṬA were unknown in India in the fourteenth century A. D.; and at the beginning of the nineteenth century COLEBROOKE, after a long and diligent search in various parts of India, failed to discover any of the works of ĀRYABHAṬA.⁴) Soon after, however, BHĀU DĀJĪ discovered three copies of what he supposed to be ĀRYABHAṬAS work.⁵) Similar copies were also in the possession of BURNELL and WHISH and the present writer obtained another copy from Madras a few years ago. All these copies, if not direct transcripts from the same manuscript are very closely related. The oldest of them does not date earlier than the beginning of the nineteenth century and two of them are dated 1820 and 1863 respectively.

In 1874 KERN published⁶) a text founded on the two manuscripts last mentioned; in 1879 RODET published the mathematical section of KERN's text with translation and notes⁷); and in 1908 the present writer published⁸) a photograph of the mathematical portion of the Madras manuscript, also with a translation and notes.

1) *ALBERUNIS India*; translated by E. C. SACHAU I, p. 24.

2) *ib.* p. 360. 3) *Journ. of the roy. Asiatic soc.* 1864, p. 392.

4) *Algebra with arithmetic and mensuration from the Sanskrit.* By H. T. COLEBROOKE, London 1817, p. V. 5) *Journ. of the roy. Asiatic soc.* 1864, p. 390.

6) *The Āryabhaṭīya, with the commentary &c.* Leiden 1874.

7) L. RODET, *Leçons de Calcul d'ĀRYABHAṬA*, Paris 1879.

8) G. R. KAYE, *ĀRYABHAṬA*; *Journ. of the As. soc. of Bengal* 4, 1908.

KERN gives no information that helps to establish the soundness of his text and it appears that much has been taken for granted in this connection. BRAHMAGUPTA stated that ĀRYABHATA was the author of two books, one of which was called *Daśagītikā*, the other *Āryāśtaśata*. The former title is said to mean a work of ten Āryās or strophes but about the latter there has been some dispute. LASSEN and COLEBROOKE interpreted it as meaning 'eight hundred couplets' but BHĀU DĀJĪ pointed out that the meaning is 'a treatise of 108 couplets'. BHĀU DĀJĪ's copies consist of 13 and 108 couplets respectively and KERN's text is of precisely the same length while mine has an additional stanza. These facts seem to be the only evidence to show that the work in question is that of the ĀRYABHATA referred to by BRAHMAGUPTA.

The matter is complicated by the question of identity for there were at least two ĀRYABHATAS who lived before the eleventh century A. D. and who wrote on astronomical and mathematical subjects. The elder of these lived before BRAHMAGUPTA and is often quoted by him; the younger evidently lived after BRAHMAGUPTA but was either earlier than ALBERUNI or contemporary with him. The date of birth of ĀRYABHATA the elder is generally given as 476 A. D. and this may be accepted as approximately correct. The exact period in which ĀRYABHATA the younger lived is not known but probably it was in the tenth century: at any rate it was after BRAHMAGUPTA who flourished in the seventh century A. D.

The early orientalists either did not know of ĀRYABHATA the younger or did not have any means of differentiation between the two. ALBERUNI, however, clearly distinguishes the one from the other. The younger he always designates as ĀRYABHATA of Kusumapura¹) (i e. the modern Patna). „This author“, he says, „is not identical with the elder ĀRYABHATA but he belongs to his followers, for he quotes him and follows his example²)“, and when referring to his work he generally speaks of „the book of ĀRYABHATA of Kusumapura.“³) Now KERN, WEBER and BHĀU DĀJĪ distinctly say that their ĀRYABHATA belonged to Kusumapura and, if we rely upon ALBERUNI, we must conclude that they really were referring to ĀRYABHATA the younger. Again, the opening stanza of the *Ganita* of KERN's text explicitly states that the author is ĀRYABHATA of Kusumapura.

In Hindu works references to ĀRYABHATA are fairly numerous but it is not always possible to say which ĀRYABHATA is meant. Those quo-

1) ALBERUNI, l. c. vol. I, p. 176, 246, 316, 335, 370.

2) ib. p. 246.

3) ib. p. 176 &c.

tations which undoubtedly refer to the elder are all astronomical or quasi astronomical. The most reliable authority is BRAHMAGUPTA whose references are confirmed by ALBERUNI. Any quotation subsequent to the time of ALBERUNI may refer to either of the two ĀRYABHAṬAS. BRAHMAGUPTA in the mathematical sections of his work makes no reference whatever to ĀRYABHAṬA but in the astronomical chapters refers, amongst many other subjects, to the values used by ĀRYABHAṬA the elder for the ratio of the circumference to the diameter of the circle; but, as will be shown later on, was not acquainted with the value given in KERN's text of the *Gaṇita*. Other references to the mathematical work of either of the two authors are very few. ALBERUNI paid considerable attention to the *orders* of numbers in vogue in India and quotes¹⁾ those given by ĀRYABHAṬA the younger and the list given agrees pretty closely with our text.²⁾ CHATURVEDA (? tenth century A. D.), a commentator of BRAHMAGUPTA, says³⁾: „What is termed by us 'diameter less the arrow' is by ĀRYABHAṬA denominated 'the greater arrow'. For he says, 'In a circle the product of the arrows is equal to the square of the semi-chord of both arcs'." This agrees exactly with KERN's text but the rule is common to all Hindu mathematical works and the quotation may be from either of the ĀRYABHAṬAS. GANEŚA, a commentator of BHĀSKARA, attributes the following rule to ĀRYABHAṬA⁴⁾: „Six times the square of the arrow being added to the square of the chord, the square-root of the sum is the arc." Neither this nor any rule even remotely connected with it occurs in KERN's text! The same commentator states that ĀRYABHAṬA clearly differentiates between the several branches of mathematics in the following words⁵⁾: „The multifarious doctrine of the planets, arithmetic, the pulverizer⁶⁾ (*kuṭṭaca*), and analysis (*vīja*) and the rest of the science of seen objects." This does not occur in KERN's text, the mathematical section of which, moreover, does not follow the division here suggested.

Assuming, as generally has been done, that KERN's text was the work of the elder ĀRYABHAṬA, then it must have preceded the work of BRAHMAGUPTA by at least a century; but a comparison of the mathematical portions of the two works leads one to suspect that KERN's text was composed after BRAHMAGUPTA's work, which is much fuller and contains much that does not occur in the former and cannot possibly have

1) ALBERUNI, l. c. vol. I, p. 176.

2) See Journ. of the As. soc. of Bengal 4₂, 1908, p. 117.

3) COLEBROOKE, *Algebra &c.*, p. 309.

4) H. C. BANNERJI, *Līlāvati*, p. 125.

5) COLEBROOKE, l. c. p. 112.

6) This is COLEBROOKE's translation. Probably the German 'Kettenbruchmethode' would be nearer the mark.

been copied from it, while the converse is possibly true. Furthermore such a comparison leads us to conclude that BRAHMA GUPTA was not even acquainted with the *Ganita* of KERN's text. In particular we may refer to the value of the ratio of the circumference to the diameter of the circle given in the latter, viz. $\pi = \frac{62882}{20000}$ ($= 3.1416$). Now BRAHMA GUPTA finds fault¹⁾ with ĀRYABHAṬA the elder for using in one place the value $3393/1080$ ($= 3.141\bar{6}$), i. e. PROLEMY's value, and in another $3393/1050$ ($= 3.23\dots$) but nowhere refers to the more accurate value given in KERN's text and we can only conclude that he was not acquainted with it. Again KERN's text gives a rather complicated rule for a problem in interest which is certainly taken either from the more general rule given by BRAHMA GUPTA or from a source common to both works.

In dealing with the history of Hindu manuscripts great difficulties are often encountered and final conclusions as to their authorship and date are often mere conjectures. Consequently any indications in these directions are of value, and from this stand-point the above facts have been put forward for consideration; and, while they do not definitely alter the generally accepted view regarding the authorship and date of the work in question, it is submitted that they do throw some doubt on the matter and establish the need of caution in utilising this particular material in building up a history of Hindu mathematics. Only one family of Mss. has, so far, come to light and the authenticity of this has been, more or less, taken for granted. The suggestion that these manuscripts were called into being by COLEBROOKE's search, a phenomenon not without precedent in India, has been made to the present writer only to be discarded on the grounds of internal evidence. Our conclusion is that the manuscripts in question are of somewhat doubtful origin; but that, most probably, the real author of the mathematical section of the work, at least, was ĀRYABHAṬA the younger.

1) ALBERUNI, l. c. vol. I, p. 168.

Ibn al Haitams Schrift über die sphärischen Hohlspiegel.

Von E. WIEDEMANN in Erlangen.

Im Anschluß an die früher veröffentlichte Schrift von IBN AL HAITAM über die parabolischen Hohlspiegel¹⁾ soll jetzt die Übersetzung derjenigen über die sphärischen mitgeteilt werden. Von ihr ist uns nur eine arabische Handschrift (India Office 734 no 3) bekannt.

Jedenfalls ist die Schrift von R. BACO²⁾ benützt worden. Ihr Hauptinhalt besteht in dem Nachweis der longitudinalen Aberration bei sphärischen Hohlspiegeln und der Konstruktion eines solchen aus einzelnen sphärischen Kreisringen, die einen gemeinsamen Brennpunkt haben. Die Spiegel können dabei vor oder hinter ihrer Fläche ihren Brennpunkt haben. Zur Entscheidung der Frage, ob hier IBN AL HAITAM auf antikem Boden steht, dürften die bisher aufgefundenen Quellen nicht genügen.

Auf eine Anfrage war Herr Dr. BJØRNBO in Kopenhagen so freundlich, mir mitzuteilen, daß ihm keine mittelalterliche Übersetzung der Schrift über sphärische Brennspiegel bekannt sei.

Die im folgenden gegebene Übersetzung ist hier und da etwas gekürzt.

Abhandlung von AL HASAN BEN AL HAITAM über die kreisförmigen Brennspiegel.

Die Sonnenstrahlen gehen von der Sonne in geraden Linien aus und werden an jedem glatten Körper zurückgeworfen nach gleichen Winkeln, d. h. der reflektierte Strahl (der Araber versteht hierunter den ganzen aus dem einfallenden und dem reflektierten bestehenden Strahl) bildet mit der Tangente an dem glatten Körper gleiche Winkel und zwar mit der Tangente, welche in der Ebene des reflektierten Strahles gelegen ist. Daraus folgt, daß der an einer Kugeloberfläche reflektierte Strahl mit der Peripherie des Kreises, der in der Ebene des Strahles gelegen ist, gleiche

1) J. L. HEIBERG und E. WIEDEMANN, *IBN AL HAITAMS Schrift über parabolische Hohlspiegel*; *Biblioth. Mathem.* 10, 1910, S. 201—237.

2) Vgl. S. VOGEL, *ROGER BACON*, Erlangen 1906, S. 71

Winkel bildet, und daraus ergibt sich ferner, daß der reflektierte Strahl mit dem Durchmesser des Kreises gleiche Winkel bildet.

Jeder Strahl, der von einem glatten Körper nach einem Punkte reflektiert wird, erzeugt dort Hitze. Kommen zahlreiche Strahlen nach einem Punkte, so vervielfacht sich die Hitze, die an diesem Punkte entsteht. So oft die Zahl der Strahlen wächst, wächst auch die Hitze entsprechend der Zunahme der Strahlen.

1. Stellt man irgendeinen Hohlspiegel, dessen Höhlung einer Kugel entspricht, aber kleiner als eine Halbkugel ist, der Sonne so gegenüber auf, daß die geradlinig verlängerte Achse die Sonne treffen würde, so werden die Strahlen, welche von dem Sonnenkörper parallel der Achse ausgehen, von der Spiegelfläche nach der Achse hin reflektiert. Die Achse ist der Durchmesser der Kugel, der senkrecht auf dem Durchmesser der Basis des Spiegels steht.

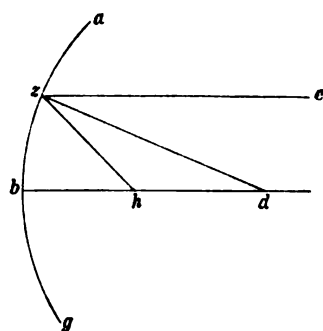


Fig. 1.

Es sei ein sphärischer Hohlspiegel gegeben, [Fig. 1]. Seine Achse sei db , sein Mittelpunkt d ; z sei ein Punkt seiner Fläche. ez sei einer der von der Sonne parallel zur Achse ausgehenden Strahlen. Ich behaupte die Linie ez wird nach der Achse hin reflektiert.

Beweis hierfür: Wir denken uns die Linie dz . Die Linien ez , zd und db liegen in einer Ebene. Wir denken uns die Ebene gezeichnet; sie schneidet die spiegelnde Fläche in einem Kreisstück. Sein Durchmesser ist db , sein Mittelpunkt d . Der Schnitt ist abg . Wir ziehen nun die Linie zh unter einem Winkel gleich dem Winkel ezd , er sei dzh . Da abg kleiner als ein Halbkreis ist, so ist der Bogen $bz < 90^\circ$ ¹⁾, also $\sphericalangle zdh < 90^\circ$. Nun ist ez parallel dh , daher ist $\sphericalangle ezd < 90^\circ$. Es ist aber $\sphericalangle dzh = \sphericalangle ezd$, es ist also auch $\sphericalangle dzh$ kleiner als 90° . Demnach trifft die Linie zh die Gerade db , und zwar möge sie sie in dem Punkte h treffen. Ein Strahl ez wird aber von der spiegelnden Fläche unter gleichen Winkeln zurückgeworfen. Er wird also längs der Linie zh zurückgeworfen, und diese trifft die Achse db . Ebenso wird jeder parallel der Achse verlaufende Strahl, der auf einen Punkt des Spiegels trifft, nach der Achse zurückgeworfen. Das war, was wir beweisen wollten.

Halten wir die Achse db fest und drehen den Bogen ab , so bewegt er sich über die Spiegelfläche hin. Der Punkt z beschreibt dabei auf der Spiegelfläche einen Kreis. Alle Punkte h nun, die diesem Punkte in dem ersten Schnitte entsprechen, fallen zusammen, daher werden die Strahlen,

1) Im Arabischen heißt es stets ein „rechter Winkel“.

welche parallel mit der Achse verlaufen und auf den Umfang dieses Kreises fallen, alle nach dem Punkt h zurückgeworfen.

Dasselbe gilt für jeden Punkt auf der Spiegelfläche. Ihm ist derselbe Punkt auf der Achse zugeordnet, wie allen anderen Punkten, die auf dem Kreise gelegen sind, den dieser Punkt bei der Drehung des Bogens beschreibt. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß nach einem Punkt auf der Achse nicht weniger Strahlen gelangen, als von dem Umfang eines Kreises in der spiegelnden Fläche reflektiert werden.

2. Nach einem Punkte der Achse eines kugelförmigen Hohlspiegels werden die Strahlen von der Peripherie eines Kreises auf der Kugelfläche reflektiert, aber nur diese.

Es sei [Fig. 2] ein sphärischer Hohlspiegel gegeben, der durch die Achse gelegte Kreisschnitt sei abg , seine Achse sei db , und es mögen von einem der Kreise, welche auf der Kugel liegen, Strahlen nach dem Punkte z der Achse zurückgeworfen werden. Ich behaupte nun, daß nach diesem Punkte z nur Strahlen von diesem Kreise zurückgeworfen werden. Man beweist dies dadurch, daß man zeigt, daß es nicht möglich ist, daß andere Strahlen hierher reflektiert werden. Wenn es möglich wäre, so würde noch ein anderer Strahl nach dem Punkte z zurückgeworfen werden.

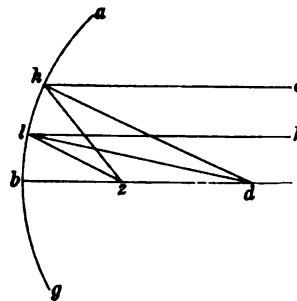


Fig. 2.

Dieser Punkt auf der Spiegelfläche verhält sich, wie jeder andere Punkt auf dem Kreise, welchen dieser Punkt um die Achse beschreibt, wenn man die Kugel um diese Achse dreht. Wird nach dem Punkte z ein Strahl zurückgeworfen außer den Strahlen, welche an dem Umfang des eben beschriebenen Kreises reflektiert werden, so werden auch alle auf dem Umfang eines andern Kreises auftreffenden nach dem Punkte z reflektiert.

Es sei h der Punkt auf dem ersten Kreise, und der Strahl ehz der im Punkte h reflektierte. Ferner sei l der Punkt auf dem zweiten Kreise, und der Strahl klz sei der im Punkte l zurückgeworfene. Wir ziehen dh und dl , dann ist, wenn es möglich ist, $\angle ehd = \angle dhz$ und $\angle dhz = \angle hdz$ also $dz = hz$ ebenso wird bewiesen, daß $dz = zl$ ist, und daher $hz = zl$. Nun liegt z auf dem Durchmesser des Kreises, daher ist $hz > lz$. Nun sollen aber auch diese Linien einander gleich sein. Dies ist ein Widerspruch, der nicht möglich ist. Ein Strahl der längs kl fortschreitet, wird also nicht nach dem Punkte z reflektiert, sondern nach einem andern Punkte als z .

Alle Strahlen, welche von dem Sonnenkörper auf den Punkt l fallen, werden nur in einem einzigen Punkt der Achse vereinigt, denn von den Strahlen, die nach dem Punkte l gehen, bildet keiner mit der Linie einen

Winkel von einer solchen Größe, daß man die beiden Strahlen unterscheiden müßte, da die Sonne so sehr weit von der Spiegelfläche entfernt ist.¹⁾ Wenn die beiden Strahlen von dem Punkte l reflektiert werden, und sie nicht voneinander entfernt sind, so verhalten sich die beiden Strahlen, wie ein einziger. Treffen sie die Achse, so treffen sie sie in einem einzigen Punkte, soweit die Sinne es beurteilen können, wegen der Nähe der Achse an dem Reflexionspunkt und der außerordentlichen Kleinheit des Winkels zwischen ihnen. Alle Strahlen also, welche nach dem Punkt l gehen, werden nach dem Punkt reflektiert, zu dem der Strahl kl reflektiert wird. Es ist dies ein anderer Punkt als z . Zum Punkt z werden nur Strahlen von einem einzigen Kreise zurückgeworfen. Dies wollten wir beweisen.

3. Die Entfernung eines jeden Punktes der Achse eines Hohlspiegels, nach welchem Strahlen reflektiert werden, von dem Mittelpunkt ist größer, als ein Viertel des Durchmessers. Es sei [Fig. 3] der Kreis auf dem Spiegel abg , seine Achse bd , sein Mittelpunkt d . Ferner sei h einer der Punkte, nach denen die Reflexion stattfindet. Ich behaupte, daß stets die Linie dh größer als ein Viertel des Durchmessers ist.

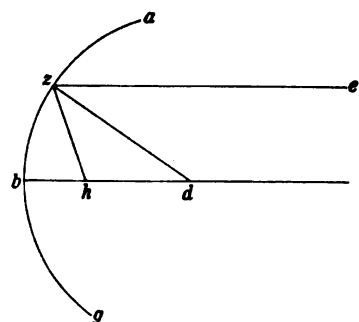


Fig. 3.

Beweis: Wir zeichnen den reflektierten Strahl nach dem Punkte h , er sei esh . In derselben Weise wie früher wird bewiesen, daß $dh = hz$. Da aber $hz > hb$ ist²⁾, so ist

auch $dh > hb$. db ist aber gleich dem halben Durchmesser, also ist dh größer, als ein Viertel des Durchmessers und das ist, was wir beweisen wollten.

4. Die Strahlen, welche von einem Kreise (Z) reflektiert werden, dessen Abstand von dem Ende der Achse gleich der Seite eines regelmäßigen in den größten Kreis abg der Kugel eingeschriebenen Achtecks ist, werden alle nach dem Mittelpunkt des betreffenden Kreises, wir nennen ihn α , reflektiert.

Der Kreis auf dem Spiegel sei [Fig. 4] abg , seine Achse db . Ferner sei bz die Seite des regulären Achtecks, dann behaupte ich, daß der Strahl, der auf den Kreis fällt, der durch den Punkt z geht, nach seinem Mittelpunkt reflektiert wird.

Beweis: Wir zeichnen im Punkt z das Lot zh , und ziehen ez parallel zu der Achse. Ferner verbinden wir d und z . Da nun bz die

1) IBN AL HAITAM meint, daß, da die Sonne so sehr weit entfernt ist, der Winkel zwischen den von verschiedenen Stellen zum gleichen Punkt ausgehenden Strahlen sehr klein ist.

2) Denn $hz + hd > zd$ und $hb + hd = zd$.

Seite eines regelmäßigen Achtecks ist, so ist $\angle zdb = 45^\circ$ und $\angle dhs = 90^\circ$ daher $\angle dzh = 45^\circ$ und $\angle esd$ wiederum 45° , da er gleich $\angle zdh$ ist. Nun ist $\angle esd = \angle dzh$, also werden die Strahlen, welche längs der Linie es fortschreiten, nach dem Punkt h auf der Linie sh zurückgeworfen, und ebenso werden alle Strahlen, welche von dem Umfang eines Kreises reflektiert werden, der durch den Punkt z beschrieben wird, in dem Punkt h vereint. Wenn wir also die Achse db festhalten und den Kreisschnitt drehen, so ist h der Mittelpunkt des Kreises, welchen der Punkt z beschreibt, und von dem die Strahlen zurückgeworfen werden, denn die Linie zh ist ein Lot.

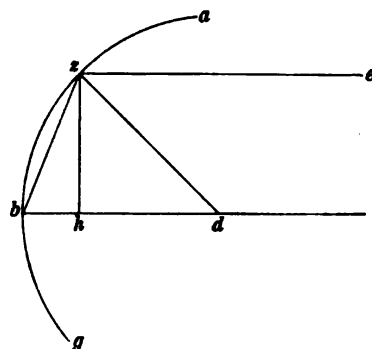


Fig. 4.

Die Strahlen, welche von dem Kreise reflektiert werden, der sich in einer Entfernung von dem Ende der Achse des Kreisschnittes befindet, die der Seite eines regelmäßigen Achtecks entspricht, werden daher nach dem Mittelpunkt dieses Kreises reflektiert. Und dies wollten wir beweisen.

5. Die Strahlen, welche an dem Umfang eines Kreises reflektiert werden, der sich im Abstand der Seite eines regelmäßigen Sechsecks von dem Ende der Achse befindet, werden von ihnen allen nach dem Ende der Achse reflektiert. Und die Strahlen, deren Abstand von dem Ende der Achse größer, als die Seite eines regelmäßigen Sechsecks und kleiner, als die des Vierecks ist, werden nach einem Punkte außerhalb der Kugel reflektiert und diejenigen, deren Abstand kleiner, als die Seite eines Sechsecks ist, werden nach dem Innern der Kugel zurückgeworfen.

Je näher der Kreis, an dem die Reflexion eintritt, an dem Ende der Achse liegt, um so näher an dem Mittelpunkte der Kugel liegt der Punkt, nach dem die Strahlen zurückgeworfen werden.

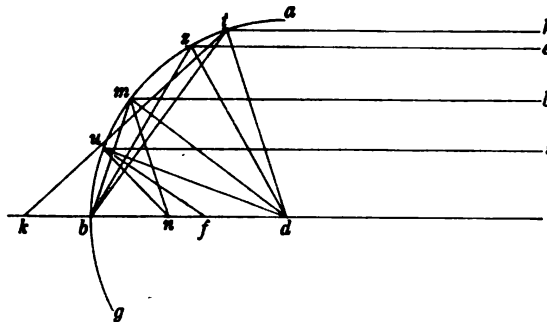


Fig. 5.

Der Kreis auf dem Spiegel sei [Fig. 5] abg , seine Achse db . Ferner sei bz die Seite des regelmäßigen Sechsecks. Dann behaupte ich, daß die Strahlen, welche von dem Kreise reflektiert werden, den der Punkt z beschreibt, in dem Punkt b vereinigt werden.

Beweis: Wir ziehen ez parallel zu der Achse und verbinden d und z . Da nun bz die Seite eines Sechsecks ist, so ist $db = bz$ und $\angle bdz = \angle dzb$.

Daher werden die Strahlen, die längs ez hinschreiten nach dem Punkte b reflektiert. Ganz analog werden alle Strahlen, die an der Kreisperipherie, die der Punkt z beschreibt, reflektiert werden, in dem Punkte b gesammelt.

Ferner sei die Entfernung des Punktes t vom Punkte b größer, als die Seite eines Sechsecks und kleiner, als die eines Vierecks. Dann behaupte ich, daß die Strahlen, welche von dem Kreise, welchen der Punkt t beschreibt, reflektiert werden, in einem Punkte der Achse gesammelt werden, der außerhalb der Kugel gelegen ist. Wir zeichnen dt und bt und ziehen ht parallel zur Achse. Dann ist $tb > db$ und daher $\sphericalangle bdt > \sphericalangle dtb$ und $\sphericalangle bdt = \sphericalangle htd$. Daher ist $\sphericalangle htd > dtb$. Wir machen nun $\sphericalangle dtk = \sphericalangle htd$. Dann wird der Strahl, welcher längs der Graden ht fortschreitet, nach dem Punkt k reflektiert. Ebenso werden alle Strahlen, die von dem Umfange des Kreises reflektiert werden, welchen der Punkt t beschreibt, in dem Punkte k gesammelt.

Ferner befinde sich der Punkt m in einem Abstand von dem Ende der Achse, der kleiner ist, als die Seite des Sechsecks. Wir ziehen ml parallel zur Achse und zeichnen md und mb . Dann ist $\sphericalangle lmd < \sphericalangle dmb$. Machen wir $\sphericalangle dmn = \sphericalangle lmd$, so liegt der Punkt n im Innern der Kugel. Er ist der Punkt, nach dem die Reflexion statthat.

Ferner liegt der Punkt u ¹⁾ näher an dem Ende der Achse, als der Punkt m . Dann sage ich, daß der Punkt, nach dem die Strahlen von dem Kreis reflektiert werden, der durch den Punkt u geht, näher am Mittelpunkt der Kugel liegt, als der Punkt n . Wir ziehen su parallel zur Achse und zeichnen du . Dann ist die Linie nm größer, als die Linie nu , und es ist $nm = dn$ und $dn > nu$. Daher ist $\sphericalangle dun > \sphericalangle udn$ und da $\sphericalangle sud = \sphericalangle udn$, so ist $\sphericalangle dun > \sphericalangle sud$. Tragen wir von ihm $\sphericalangle duf = \sphericalangle sud$ ab, so ist der Punkt f näher an dem Mittelpunkt der Kugel [als n], und das wollten wir beweisen.

So wäre denn dasjenige bewiesen, dessen Behandlung wir vorausschicken wollten.

Wir wollen nun zeigen, wie man Brennspiegel konstruiert, und zwar von jeder beliebigen Größe und die fähig sind, in jeder gewünschten Entfernung zu brennen, falls nur diese Entfernung nicht eine übermäßig große ist.

Wir haben bewiesen, daß von den Strahlen, welche von einem sphärischen Hohlspiegel reflektiert werden, nur diejenigen in einem Punkt vereint werden, welche von dem Umfang eines einzigen Kreises zurückgeworfen werden.

1) Im Arabischen der Buchstabe 'Ain.

Wollen wir in einem Punkt ein Brennen erzielen, so suchen wir auf der Kugelfläche den Kreis, von dem die Strahlen nach diesem Punkt reflektiert werden. Nur ist oft die Hitze, die von den Strahlen gesammelt wird, die von dem Umfang eines einzigen Kreises zurückgeworfen sind, nicht groß genug, um ein Brennen (Entzünden) hervorzurufen, deshalb muß man diese Hitze, soweit als möglich, verstärken. Die Hitze, welche die Strahlen, die an dem Ort, wo das Brennen erfolgen soll, gesammelt sind, erzeugen, besteht in der Erwärmung (Ishân) des Teiles der Luft, der diesen Punkt umgibt; der diesen Punkt umgebende Teil hat aber eine gewisse räumliche Ausdehnung und umfaßt eine große Anzahl von Punkten. Nach jedem Punkte aber in dem Raum um den Brennpunkt werden Strahlen von dem Umfang eines Kreises, der dem ersten Kreise nahe liegt, reflektiert. Und zu beiden Seiten des ersten Kreises liegt eine große Anzahl anderer, welche Strahlen nach Punkten reflektieren, die in dem Teile der Luft liegen, welcher den Brennpunkt umgibt, welchen die von dem ersten zurückgeworfenen Strahlen erwärmen, und jeder Strahl, der nach einem dieser Punkte zurückgeworfen wird, erwärmt die ihn umgebende Luft. Dies ist aber die Luft, welche den Brennpunkt umgibt, da sie alle Punkte umgibt.

Jeder einzelne Strahl, der nach einem der erwähnten Punkte reflektiert wird, erwärmt die Luft in der Umgebung des Brennpunktes. Vervielfachen wir diese Strahlen, so vervielfachen wir auch die Hitze, welche an dem gegebenen Punkt entsteht. Wollen wir die Hitze in dem Brennpunkt vervielfachen, so zeichnen wir auf beiden Seiten des ersten Kreises zwei ihm parallele Kreise. Zwischen ihnen liegt dann eine Strecke, welche nach dem Brennpunkt eine große Menge von Strahlen zurückzuwerfen vermag, da auf der Fläche, welche sich zwischen den beiden Kreisen befindet, eine große Anzahl von Kreisen vorhanden ist. Von jedem derselben werden Strahlen nach einem Punkt der Luft, welche den Brennpunkt umgibt, reflektiert.

Jeder derselben erwärmt diese Luft und dadurch wird die Hitze bei der Brennstelle gesteigert. Eine Vergrößerung des Abstandes zwischen beiden Kreisen ruft aber nicht stets eine Vermehrung der Wärme entsprechend der Vergrößerung des Abstandes hervor, sondern, wenn die Breite eine gewisse Grenze erreicht, nicht mehr, denn nur dann nimmt durch die reflektierten Strahlen die Hitze zu, wenn ihr Vereinigungspunkt in der Nähe des ersten Punktes gelegen ist. Dann erwärmen sie alle den kleinen Teil der Luft, der um den ersten Punkt gelegen ist.

Wir wenden uns nun zu der Betrachtung davon, was eintritt, wenn der Abstand größer wird. Die von Kreisen, welche von dem ersten entfernt sind, reflektierten Strahlen werden nach Punkten reflektiert, die von

dem ersten entfernt sind. Dann wird die Luft erwärmt, welche von dem Teil entfernt ist, der den Brennpunkt umgibt, und in diesem trifft keine größere Anzahl von Linien zusammen. Deshalb ist es nötig, daß der zum Sammeln der Strahlen im Brennpunkt genügende Teil der Kugeloberfläche eine ringförmige Fläche sei, die nicht gar zu breit ist. Der Spiegel, der dazu dienen soll, die Strahlen nach einem Punkte zusammenzureflektieren, muß also die Gestalt eines Ringes haben, dessen Fläche den inneren Teil einer Kugeloberfläche bildet und dessen Breite klein ist. Derjenige Kreis, von dem die Strahlen nach dem gegebenen Punkte reflektiert werden, muß zwischen den beiden Kreisen liegen, welche den Ring begrenzen, sodaß der gegebene Punkt, nach dem dieser Kreis die Strahlen zurückwirft, zwischen den Enden der Strecke liegt, nach der die ganze Ringfläche die Strahlen reflektiert. Diese Strecke ist eine gerade Linie und ein Stück der Achse des Spiegels. Es ist ja gezeigt, daß die reflektierten Strahlen von jedem Kreise der Kugel nach einem Punkte auf der Achse reflektiert werden. Die Länge dieser Linie entspricht der Breite des Ringes. Ist der Ring schmal, so ist auch diese Linie klein, und sie ist der Bereich der Luft um den Brennpunkt, welchen die reflektierten Strahlen erwärmen.

Wollen wir einen Brennspiegel herstellen, dessen Brennpunkt an einer bestimmten Stelle in bezug auf den Spiegel gelegen ist, so nehmen wir eine Platte aus Stahl (Fülâd) von passender Dicke und machen ihre Fläche so eben, wie möglich. Dann zeichnen wir auf sie einen Kreisbogen und ziehen seinen Durchmesser. Dann verzeichnen wir die zwei Punkte der Reflexion, der eine ist auf dem Bogen gelegen, der andere auf der Achse. Ihre Lage ist diejenige, welche aufgesucht wird.

Soll das Brennen in dem Mittelpunkt des Kreises [an dem wir die Strahlen reflektieren lassen] stattfinden, so tragen wir auf dem Kreise ein Achtel [von 360°] ab, und dies ist der Punkt, der, wenn er gedreht wird, einen Kreis erzeugt, welcher in seinem Mittelpunkt brennt, wie wir das in dem Vorhergehenden bewiesen haben.

Wollen wir, daß das Brennen an einem anderen Punkt als dem Mittelpunkt statfinde, und zwar in einer Entfernung vom Mittelpunkte, die gegeben ist, so werden wir, wie in folgendem angegeben ist, verfahren.

Haben wir dann den gesuchten Punkt gefunden, so tragen wir auf beiden Seiten des Punktes einen kleinen Bogen ab und fällen von seinen Enden zwei Senkrechte auf die Achse und zerschneiden das Blech längs dieser Linien und längs des Bogens. Dann machen wir die hohe Kante der Schnittfläche des Stückes, die an den Bogen anliegt, zu einer Feile.¹⁾

1) d. h. es werden Zähne in sie eingeschlagen.

Hierauf machen wir einen Ring aus Stahl, dessen halber Durchmesser gleich dem Lote ist, das von der Mitte des Bogens auf die Achse gefällt wird. Seine innere Fläche bearbeiten wir mit der Feile, die entsprechend dem Bogen hergestellt ist, bis daß sie seine Fläche vollkommen berührt, und wir werden die vollkommene Behandlung auseinandersetzen. Die Prüfung dieser Fläche folgt nachher.

Der Kreis $[\beta]^1)$, der in einem gegebenen Abstand²⁾ $[\mu]$ von seinem Mittelpunkt brennt, und dessen Durchmesser bekannt ist, wird, wie ich beschreiben will, hergestellt.

Der auf der Platte gezogene Kreis (α) sei [Fig. 6] abg , und wir nehmen nach der Methode die Analyse³⁾ an, daß d der Punkt auf dem Kreise β ist, der gesucht wird. Wir fällen das Lot dz und nehmen an, daß hz die gegebene Entfernung ist. Da nun der Durchmesser des Kreises β eine bekannte Größe ist, so ist auch dz bekannt, es ist ja die Hälfte des Durchmessers des Kreises (β) , welchen der Punkt d beschreibt. Ferner ist hz bekannt, da es der gegebene Abstand ist. Nun ist $\angle dzh = 90^\circ$. Also ist $dh = \sqrt{dz^2 + hz^2}$ bekannt. Nun ist $dh = eh$, also ist eh bekannt und hz ist bekannt, also ist ze bekannt und ebenso ist dz bekannt, also ist auch $ed = \sqrt{dz^2 + ze^2}$ bekannt und dieses ist der halbe Durchmesser des Kreises α , also ist der Kreis abg bekannt. Also ist die Linie eb bekannt und ez ist bekannt, daher ist der Punkt z bekannt und dz ist ein Lot, also ist der Punkt d bekannt, und er ist es, welcher den gesuchten Kreis β beschreibt.

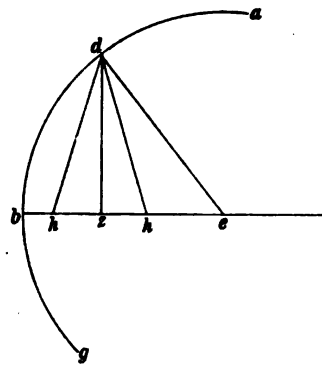


Fig. 6.

Nach der Methode der Synthese finden wir die Linie $[r = dh = he]$, welche als Hypotenuse der Hälfte des Durchmessers des Kreises β und dem gegebenen Abstand $[zh]$ als Katheten gegenüberliegt.

Zu ihr $[he]$ fügen wir den Abstand $[zh]$, oder ziehen ihn von ihr ab. Aus der Summe $[\sigma]$ oder aus dem Rest $[\rho]$ finden wir dann die Linie $[l]$, welche ihr $(\rho$ bzw. $\sigma)$ und der Hälfte des Durchmessers (von $\beta)$ gegenüberliegt.⁴⁾ Wir beschreiben einen Kreis, dessen Radius diese Linie l ist. Er sei z. B. der Kreis abg . Wir ziehen seinen halben Durchmesser; er sei eb und

1) β und μ stehen nicht im Text.

2) Der Abstand ist entweder nach dem Mittelpunkt der Kugel oder in entgegengesetzter Richtung gerechnet.

3) Hier heißt „Methode“ „Giha“; in der Schrift über den parabolischen Hohlspiegel „Tariq“.

4) Es ist de die dz und ze gegenüberliegende Hypotenuse.

wir nehmen an, daß die Linie eh ($=hd$) diejenige ist, welche dem Abstand μ und dem Radius des Spiegels (β) als Hypotenuse gegenüberliegt. Wir machen hz gleich dem Abstand (μ) und ziehen in z das Lot zd , dann behaupte ich, daß der Punkt d den verlangten Kreis beschreibt.

Beweis: Wir ziehen ed und hd , und de als Hypotenuse den beiden Linien ez und zd gegenüber. $eh^1)$ ist entweder die Summe der gegebenen Entfernung μ und der Hypotenuse zu dieser Entfernung und dem Kreisradius (von β), oder es ist die Differenz dieser Linie und der gegebenen Entfernung. ed ist die Linie, welche einer dieser beiden Linien und dem halben Durchmesser des Kreises (β) nach der Angabe als Hypotenuse gegenüberliegt; daher ist zd der gesuchte Radius von β , d. h. der Radius des Spiegels, daher beschreibt der Punkt d einen Kreis (β^1), dessen Radius der gesuchte Radius ist.

Ferner ist hd Hypotenuse zu hz , d. h. dem Abstand (μ) und der Linie zd , d. h. dem Radius, daher ist die Linie $hd = eh$; und die Strahlen, welche an dem Punkt d reflektiert werden, gelangen nach dem Punkt h , und so werden alle Strahlen, die an dem vom Punkt d beschriebenen Kreise reflektiert werden, bei dem Punkt h vereinigt und zh^2) ist der gegebene Abstand Das wollten wir beweisen. Zu beiden Seiten von d tragen wir einen kleinen Bogen ab und vollenden das Werk, wie wir früher es geschildert haben.

Soll das Brennen im Innern der Kugel stattfinden, so brauchen wir die Breite des Bogens nicht zu bestimmen, soll aber das Brennen in

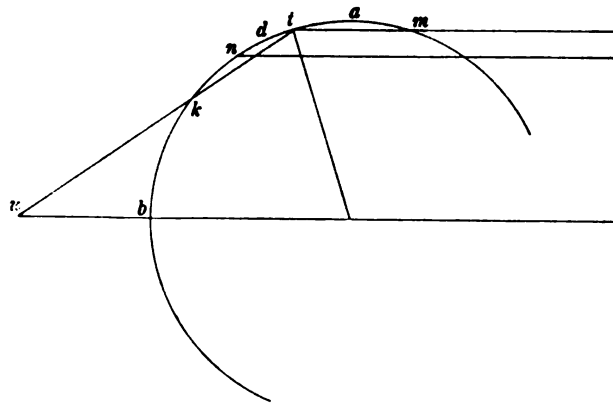


Fig. 7.

einem Punkt außerhalb der Kugel stattfinden, so bestimmen wir [Fig. 7] den Bogen auf beiden Seiten des Punktes d , nämlich nt . Der Punkt d liegt in der Mitte dieses Bogens. Von dem Punkt t ziehen wir den Strahl tm parallel zu der Achse. Er werde nach u reflektiert und schneide den Bogen in k . Nun muß

der Punkt k^s) unterhalb des Punktes n liegen, denn, wenn die Linie tu den Bogen tn träfe, so könnte sie nicht fortschreiten und gelänge nicht nach dem Brennpunkt. Der Bogen tk muß also größer sein als der Bogen tn . Wir verlängern nun den Bogen tm , bis er die Gerade trifft.

1) Im Text ez.

2) Im Text steht *hd.*

3) Im Text falsch t.

ab sei ein Viertel des Kreises. Da die Gerade tm parallel zu der Achse ist, so ist der Bogen ta gleich dem Bogen am , der Bogen mt ist also doppelt so groß, wie der Bogen at . Nun ist der Bogen $kt = mt$, da die Reflexion nach gleichen Winkeln erfolgt. Daher ist der Bogen tk doppelt so groß als der Bogen at , und der Bogen tk ist größer als der doppelte Bogen td , da tn gleich dem doppelten Bogen dt und tk größer als tn ist. So ist der Bogen at größer als der Bogen td . Der Bogen ad ist aber bekannt. Machen wir nun den Bogen td kleiner als den Bogen ta und den Bogen dn gleich dem Bogen dt , so treffen die Strahlen, die von dem Punkt t reflektiert werden, nicht auf den Bogen tn . Treffen aber die Strahlen, die von dem Punkt t reflektiert werden, nicht auf den Bogen tn , so treffen die übrigen, von dem ganzen Bogen tn reflektierten Strahlen erst recht nicht den Bogen tn . Wenn dies aber der Fall ist, so gelangen die übrigen Strahlen, die von dem Bogen tn reflektiert werden, sämtlich nach dem Punkte u^1) und die ihn auf beiden Seiten umgebenden Stellen. Solange nicht der Bogen at größer ist, als der Bogen td , werden einige der Strahlen, die von dem Bogen tn reflektiert werden, wieder auf den Bogen tn treffen und an dem Weiterschreiten gehindert werden und nicht nach dem Brennpunkt gelangen.

Nach dieser Art geschieht im allgemeinen die Konstruktion der Brennspiegel aus der Kugeloberfläche.

Wir zeigen nun, wie man die Richtigkeit der Herstellung derselben untersucht. Der Beweis dafür ist bei dem Kugelspiegel, daß der Durchmesser die angegebene Länge hat, und daß das Brennen in der gegebenen Entfernung eintritt.

Es sei zunächst die Entfernung klein. Die Herstellung dieses Spiegels ist leicht möglich und bequem und wird oft ausgeführt. Es ist klar, daß der kugelförmige Hohlspiegel in einer gewissen Entfernung brennt, falls sie klein ist. Die Entfernung sei groß. Es ist fast unmöglich, ein Brennen in so großer Entfernung hervorzurufen, denn der reflektierte Strahl wird jedesmal bei einer Zunahme der Entfernung geschwächt und kann nicht eine Hitze hervorbringen, die genügt, um Feuer zu entzünden.

Daher muß man darauf denken, die Kraft dieser Strahlen bis zu dem Grade zu vermehren, daß sie imstande sind, ein Brennen zu erzeugen.

Der Bogen des Kreises, der infolge seiner Größe nicht die Kraft hat [Feuer zu entzünden], sei ab . Der Mittelpunkt des Kreises sei [Fig. 8, 9] g . Sein halber Durchmesser sei gd . Die von dem Bogen ab reflektierten Strahlen werden nach der Linie ez reflektiert. ez sei klein. Wir wollen

1) Im Text steht h .

nun zeigen, wie nach der Linie ez so viel Strahlen reflektiert werden, als wir wollen.

Zunächst liege [Fig. 8] ez innerhalb des Kreises. Wir ziehen az , be und ae . be ist der vom Punkte b nach dem Punkte e reflektierte Strahl.

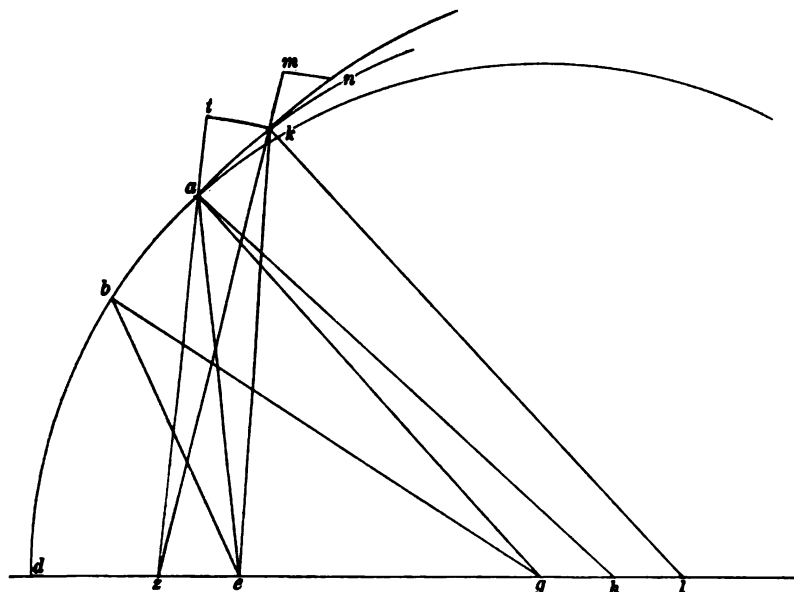


Fig. 8.

Er ist gleich der Linie eg . Aber ae ist größer als be . Wir machen nun eh gleich ea und verbinden h und a . Dann schlagen wir um h als Mittelpunkt mit der Entfernung ha einen Kreisbogen. Er sei ak .

Ferner ist $az = zg$. Wir machen $zt = zh$ und schlagen um z mit dem Radius (Entfernung $Bu'd$) zt einen Bogen tk und verbinden k und a . Dann ist $kz = zh$, und die Strahlen, die von dem Bogen ak reflektiert werden, werden nach ez reflektiert. Wir ziehen nun ke . ke ist größer als ea , da der Punkt e auf dem Durchmesser¹⁾ des Bogens ak gelegen ist. ae ist gleich eh und ke ist größer als eh . Wir machen nun el gleich ek und zeichnen lk und beschreiben um l als Mittelpunkt mit lk einen Bogen kn . Wir ziehen zk und machen zm gleich zl und beschreiben um z als Mittelpunkt einen Bogen mit dem Radius zm , und zwar den Bogen mn . Wir beweisen wie vorher, daß die von dem Bogen kn reflektierten Strahlen nach der Linie ez reflektiert werden. In derselben Weise ziehen wir kleine Bogen, so viele als wir wollen, von denen allen die Strahlen nach der Linie ez reflektiert werden.

Nun liege [Fig. 9] die Linie ez außerhalb des Kreises. Wir ziehen az , be und bz . Die Linie az ist der im Punkte a reflektierte Strahl. Er ist gleich der Linie gz und größer als die Linie bz . Wir tragen hz gleich bz ab. Wir ziehen hb und beschreiben um h mit hb als Radius einen Bogen bk . eb ist gleich eg und größer als eh . Wir nehmen et

1) d. h. dem Durchmesser des Kreises $ka\ bd$

gleich eh und beschreiben mit et als Radius um e den Bogen tk und ziehen ek , es ist gleich eh . Die Strahlen, welche von dem Bogen bk reflektiert werden, werden auf der Linie ez gesammelt. Wir ziehen ferner kz und machen zl gleich ak , ziehen kl und beschreiben um l mit dem Radius lk einen Bogen kn . Wir ziehen ke ; dies ist gleich et und et ist

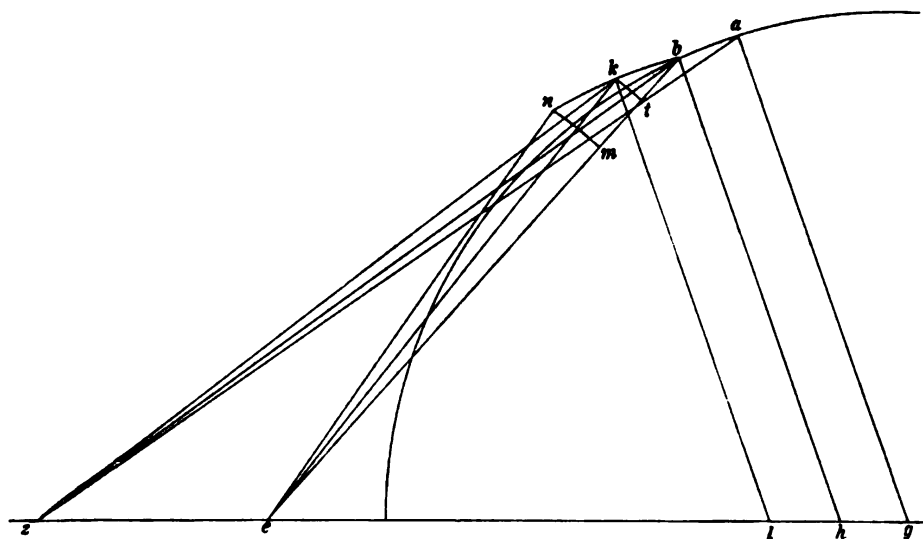


Fig. 9.

gleich eh . Also ist ke größer als el . Wir nehmen nun em gleich el und beschreiben um e mit em einen Kreisbogen mn und ziehen en . Dies ist gleich el . Die Strahlen, welche von dem Bogen kn reflektiert werden, werden daher auf der Linie ez gesammelt. In derselben Weise ziehen wir beliebig viele kleine Bogen, die sämtlich die Strahlen nach der Geraden e reflektieren.

Drehen wir diese Bogen um die Achse, so erzeugt jeder derselben eine ringförmige Fläche, von der die Strahlen nach der Linie ez reflektiert werden. Die Linie ez ist der Bereich der Luft, welche den Brennpunkt umgibt, und jeder Strahl, der von dieser ringförmigen Fläche reflektiert wird, erzeugt auf dieser Linie etwas Hitze. Wenn man diese Ringe vervielfältigt, so verstärkt man die an dem Brennpunkt gesammelte Hitze. Auf diese Weise ist es möglich, die Kraft der nach dem Brennpunkt reflektierten Strahlen so zu vervielfachen, daß jede beliebige Grenze der Hitze erreicht wird, und das wollten wir zeigen.

Wollen wir nun einen Spiegel herstellen, der in irgendeiner gewünschten Entfernung brennt, und dessen Durchmesser ein von uns gewünschter ist, so nehmen wir Scheiben aus Stahl von passender Dicke und ebener Oberfläche und ermitteln in der früher dargelegten Weise aus

dem Abstand und der Größe des Durchmessers des Spiegels den Durchmesser des Kreises, aus dem die reflektierende Fläche ein Stück ist. Auf jedem Blech zeichnen wir den gesuchten Bogen dieses Kreises.

Liegt der Brennpunkt außerhalb des Kreises, so kann der Durchmesser des Kreises (α) der Kugel nicht viel größer sein als der halbe Durchmesser¹⁾ des Spiegels, und zwar aus folgendem Grunde. Der Halbmesser des Kreises (α) ist die Hypotenuse zu dem Spiegeldurchmesser und der Differenz der folgenden zwei Linien $a-b$, nämlich a , der Hypotenuse zu dem Spiegeldurchmesser und der gegebenen Entfernung und b der gegebenen Entfernung. Diese Differenz ist nun stets kleiner als der Spiegeldurchmesser.

Es liege der Brennpunkt im Innern des Kreises und der Durchmesser entspreche einem sehr großen Kreise. Die Herstellung der Spiegel nach der ersten Art ist eine vielfache. Wollen wir sie so herstellen, so haben wir in unserem Buche über das Zeichnen großer Kreise gezeigt, wie wir leicht anwendbare Instrumente konstruieren.²⁾ Mit ihnen zeichnen wir einen Bogen von einem äußerst großen Kreise. Dann legen wir an den Bogen, den wir auf das Blech gezeichnet haben, in der geschilderten Art so viele Bogen an, als wir wollen, bis die Kraft des Brennens die Höhe erreicht hat, die wir wollen. Die einzelnen Bogen machen wir möglichst klein, damit die aus ihnen zusammengesetzte Linie nicht übermäßig groß werde. Von den Enden dieser Linie ziehen wir zwei Senkrechte auf die Achse. Dann werden diese Bleche längs der gezogenen Linien ausgeschnitten. Von ihnen bleibt eines zurück [d. h. wird direkt weiter behandelt]. Bei einigen werden die Kanten, welche an die Bogen anstoßen, nun eingraviert (naqasch), so daß sie Feilen darstellen, aber so, daß die (Schärfe der Feilen) Rauheit gradweise verschieden ist, dabei sind die einen rauher als die anderen. Die Kanten der übrigen werden so lange zugeschärft, bis die am Bogen anstoßenden Kanten so scharf als möglich geworden sind. Dann nimmt man einen Ring aus Stahl, dessen innerer Durchmesser etwas kleiner als die Achse der Feile ist. Diesen Ring befestigt man auf der Drehbank und bearbeitet ihn zuerst mit der rauhesten (gröbsten) dieser Feilen, dann mit der sich an diese anschließenden usw., bis ihre Fläche die innere Fläche des Ringes berührt. Hierauf wird mit den übrigbleibenden zugeschärften Blechen diese Fläche bearbeitet. Dabei verwenden wir Sorgfalt; so oft eines derselben stumpf geworden ist (kall), bearbeiten wir sie mit den anderen, bis

1) Der Text hat aus Versehen Kreisdurchmesser usw.; zu den Ausführungen vgl. oben; de liegt gegenüber dz und ze , $ze = he - hz$, $he = hd$, liegt also hz und zd gegenüber.

2) Vgl. E. WIEDEMANN, Zeitschrift für Vermessungswesen 39, 1910.

das letzte die ganze Fläche so vollkommen als möglich berührt und die Länge der beiden inneren Durchmesser des Ringes gleich den Längen der Pfeile¹⁾ der Bleche werden. Wenn es nach der Bearbeitung durch das letzte Blech dem Bogen entspricht, welcher auf dem zurückgelegten Blech sich befindet und sich vollständig mit ihm deckt, so wird es nicht mehr verändert und nicht mehr weiter mit einem anderen Blech bearbeitet.

So haben wir auf dem Ringe eine Fläche hergestellt, von der alle Strahlen nach einem gegebenen Punkt reflektiert werden. Wir machen diese Fläche, soweit es irgend möglich ist, glatt, und damit ist das Werk vollendet.

So können wir einen Brennspiegel herstellen, der in jeder beliebigen Entfernung brennt, wenn sie nicht übermäßig groß ist, und mit jeder festgesetzten Kraft. Das wollten wir beweisen.

Wollen wir einen Spiegel herstellen, der an zwei Orten brennt, deren Abstände gegeben sind, von denen der eine innerhalb, der andere außerhalb des Kreises liegt, so zeichnen wir mit dem Durchmesser des Spiegels und jeder der beiden Abstände die zwei Durchmesser der Kreise, die der Kugel entsprechen; dann zeichnen wir die beiden Bogen der beiden Kreise, die von einem Punkte ausgehen. Dann tragen wir an jeden derselben Bogen an, soviel wir wollen, bis man zu dem Ziel gekommen ist, das erstrebt wurde. Mittels dieser zusammengesetzten Linie konstruieren wir den Spiegel in der früher beschriebenen Weise. Das Brennen findet an den beiden gegebenen Stellen statt. Das, was wir erläutert haben, genügt in bezug auf die Brennspiegel.

Vollendet ist das Buch über die sphärischen Brennspiegel.

Es betet Allah über Muhammed und seine Familie insgesamt und spendet seinen Gruß.

Einige der Sätze von IBN AL HAIṬAM und die Abhängigkeit der Leistungen ROGER BACOS von ihm habe ich früher²⁾ mitgeteilt. Nachzutragen wäre, daß der Hohlspiegel als Brennspiegel auch in dem bekannten Werk über den autodidakten Philosophen HAIJ BEN JAQẒÂN von IBN ṬUFAIL im 6. Abschnitt erwähnt wird.

Zum Schluß möchte ich noch den Herren Dr. W. EBERT und Dr. J. WÜRSCHMIDT für die Kontrolle der Beweise usw. bestens danken.

1) Es sind dies die oben erwähnten Lote.

2) Annalen der Physik [WIEDEMANN-Reihe] 39, 1890, S. 116.

Eine Legende von dem eisernen Fleiße Leonhard Eulers.

Von G. ENESTRÖM in Stockholm.

I.

Die wichtigsten rein biographischen Notizen über LEONHARD EULER, die wir besitzen, sind von N. FUSS in seinem *Eloge de Monsieur LÉONARD EULER*¹⁾ zusammengestellt worden, und alle folgenden Biographen EULERS scheinen diese Schrift als vollständig zuverlässig betrachtet zu haben, auch wenn es sich um Ereignisse handelt, die N. FUSS nur vom Hörensagen haben konnte. In der Tat war ja N. FUSS als vieljähriger Gehilfe EULERS in der Lage, private Mitteilungen über das Leben des berühmten Mathematikers zu bekommen. Indessen deuten gewisse Stellen des *Eloge* darauf hin, daß sein Verfasser diese Mitteilungen entweder unkritisch benutzt oder unrichtig wiedergegeben hat, und in den folgenden Zeilen werde ich mich mit einem Falle dieser Art beschäftigen.

Aus authentischen Quellen²⁾ weiß man, daß EULER im Jahre 1735 eine Mittagsverbesserungstafel berechnet hat, und über die Berechnung dieser Tafel berichtet N. FUSS in dem *Eloge*³⁾:

Le grand nombre des mémoires qui M. EULER avoit présentés à l'Académie . . . font foi de sa fécondité surprennante, de sa grande facilité à traiter les questions les plus difficiles, et de son extrême application. Il en fournit un exemple bien plus frappant, lorsqu'il s'agissoit en 1735 de faire un Calcul qui exigeoit de la hâte, et pour lequel les autres Mathématiciens avoient demandé quelques mois de tems. M. EULER s'engagea à le faire en trois jours; et il le fit au grand étonnement de l'Académie. Mais que ce travail lui coûta cher! il lui attira une fièvre chaude qui le mit au bord du tombeau. Il en revint pourtant, mais avec la perte de l'œil droit que lui ravit un abcès survenu pendant la maladie.

1) N. FUSS, *Eloge de Monsieur LÉONARD EULER, lu à l'académie le 23 octobre*; Nova acta acad. sc. Petrop. 1 (1783), 1787, Histoire S. 159—212. Sonderabdruck: St. Pétersbourg 1783, (8) + 124 S. 2) Siehe unten S. 310.

3) N. FUSS, a. a. O. S. 166—167; im Sonderabdruck befindet sich die Stelle S. 12—13.

Wesentlich denselben Bericht hatte N. Fuss schon in einer drei Jahre früher veröffentlichten Arbeit: *Adumbratio eruditorum Basiliensium*¹⁾ mitgeteilt, und ich gebe hier unten die fragliche Stelle wörtlich wieder:

Cum a. 1735 calculatio quaedam gravissima intra paucos dies absolvenda academiae committeretur, eam EULERUS ultro suscepit solus, & intra triduum, perdius atque pernox laborans, perfecit, summo quidem suo honore, sed infortunio praegrandi. Febri nempe acuta correptus diu jacuit miserrimus, ut de salute desperaretur. Sanitate quidem tandem suis restitutus, sed oculorum dextrum prorsus amisit.

Noch eine dritte Redaktion desselben Berichtes brachte N. Fuss 1786 in der deutschen Übersetzung²⁾ seines *Eloge*, und der Vollständigkeit halber bringe ich auch den wichtigsten Teil dieser Redaktion zum Abdruck:

Von seinem eisernen Fleiße gab er noch ein auffallenderes Beyspiel; als im Jahr 1735 eine Berechnung (c) gemacht werden sollte, die Eile hatte, zu der verschiedene Akademiker einige Monate Zeit haben wollten, und die er in drey Tagen vollendete.

(c) Es waren Tafeln, die Mittagsgleichung aus zwei beobachteten gleichen Sonnenhöhen, für jeden Grad Abweichung der Sonne, von einer bis achtzehn Stunden Unterschied der Beobachtungszeiten, bis auf Terzien, für die St. Petersburgische Polhöhe zu finden.

Wie man sieht, ist der Bericht von N. Fuss im Laufe von sechs Jahren teilweise modifiziert worden. Nach dem ältesten Berichte sollte „die Akademie“ die Berechnung „in wenigen Tagen“ fertig haben, aber in den zwei anderen wird nur gesagt, daß die Berechnung Eile hatte, ohne daß die Akademie ausdrücklich genannt wird. Nach dem ältesten Berichte arbeitete EULER Tag und Nacht, nach dem *Eloge* versprach EULER ausdrücklich in drei Tagen die Berechnung zu machen, und in der *Lobrede* wird nur erzählt, daß er die Berechnung in drei Tagen vollendete. Auch in betreff der Anfrage an die Akademiker drückt sich die *Lobrede* etwas unbestimmter als das *Eloge* aus; dieses spricht von „den

1) Der vollständige Titel lautet: *Adumbratio eruditorum Basiliensium meritis apud exteros olim hodieque celebrium. Adpendicis loco Athenis Rauricis addita*, Basiliae 1780. Diese Arbeit ist von J. W. HERZOG verfaßt, der aber ausdrücklich angibt, daß er N. Fuss die biographischen Notizen über EULER zu verdanken habe. Die zitierte Stelle steht S. 36.

2) N. Fuss, *Lobrede auf Herrn LEONHARD EULER, in der Versammlung der Kayserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg den 23. Octob. 1783 vorgelesen. Von dem Verfasser selbst aus dem französischen übersetzt und mit verschiedenen Zusätzen vermehrt, nebst einem vollständigen Verzeichnis der EULERSchen Schriften*, Basel 1786, S. 23—24. — *Lobrede auf LEONHARD EULER, in der Versammlung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg den 23. Octob. 1783 vorgelesen*, Basel 1797, S. 18.

anderen Mathematikern“, jene nur von verschiedenen Akademikern und läßt also unentschieden, ob wirklich alle Mathematiker der Akademie befragt wurden.

II.

Durch die oben zum Abdruck gebrachte Fußnote (c) der *Lobrede* werden wir in den Stand gesetzt, den Bericht von Fuss zu kontrollieren. Während er in den zwei älteren Berichten nur von einer sehr schwierigen Berechnung spricht, ohne die geringste Auskunft über den Gegenstand derselben zu bringen, gibt er in der *Lobrede* ausdrücklich an, daß es sich um die bekannte Mittagsverbesserungstafel handelte, und über die Berechnung dieser Tafel besitzen wir authentische Notizen, teils von LEONHARD EULER selbst in der Abhandlung *Methodus computandi aequationem meridiei*¹⁾, teils durch die Protokolle der Petersburger Akademie; übrigens befindet sich die Tafel selbst noch handschriftlich in Petersburg.

Wann und von wem die Verfertigung einer Mittagsverbesserungstafel angeregt wurde, habe ich nicht mit Sicherheit ermitteln können, aber höchstwahrscheinlich rührte der Plan von JOSEPH NICOLAS DELISLE, Direktor der Petersburger Sternwarte, her, und vielleicht bezieht sich folgender Passus des Protokolles vom 21. Dezember 1734²⁾ auf diesen Plan:

Herr DE L'ISLE producirte die astronomischen Tabellen de Mons.

DE LA HIRE. Sind dem Hrn. Adj. WINSHEIM gegeben, um solche nach der Höhe des hiesigen Horizonts zu corrigiren.

Die fraglichen Tabellen enthalten nämlich u. a. auch eine Mittagsverbesserungstafel für die Polhöhe von Paris. Aber erst das Protokoll vom 20. Januar 1735³⁾ bringt bestimmtere Auskunft über den Plan, und zwar unter folgender Form:

Das von obengedachtem Hrn. Prof. DE L'ISLE angefertigte und producirte Project, wie die wahren Mittagszeiten den sämtlichen Petersburgerischen Einwohnern täglich bekannt gemacht werden können, haben des Würcklichen Camerherrn Excellenz [d. h. J. A. VON KORFF] zu sich genommen.

Hieraus ersieht man, für welchen Zweck DELISLE die Tafel zu haben wünschte.⁴⁾

1) L. EULER, *Methodus computandi aequationem meridiei*; Comment acad. sc. Petrop. 8 (1736), gedruckt 1741, S. 48—65.

2) *Procès-verbaux des séances de l'académie impériale des sciences depuis sa fondation jusqu'à 1803*, 1, St. Pétersbourg 1897, S. 130.

3) *Procès-verbaux* 1, S. 139.

4) Über diesen Vorschlag von DELISLE findet sich in der Geschichte der Petersburger Akademie von G. F. MÜLLER und J. G. STRITTER folgende Notiz: „Von herrn NICOL. DE L'ISLE rührte der vorschlag her, welchen er den 20 januar [1735] that, die

Wann EULER begann, sich mit der Frage zu beschäftigen, weiß ich nicht; hier unten bringe ich zum Abdruck, was die Protokolle¹⁾ darüber mitteilen.

[27. Jan. 1735.] Hr. Prof. EULER produciret seine angefertigte Zeitberechnung, vermöge welcher man auf diesem Horizont allemal wissen könne, in welcher Stunde des Tages man lebe, wenn man nur den einen festen Satz der Sonnen-Höhe inne hat. Weil diese Piece anstatt Anmerkung gedruckt werden soll, als nimmt sie Hr. Autor, der Accuratesse der Zahlen wegen selbst copiren zu lassen, wieder mit sich nach Haus.

[31. Jan. 1735.] Hr. Prof. DE L'ISLE nahm des Hrn. Prof. EULER's angefertigte und producirt *Methodum brevem et facilem computandi tabulas aequationis meridiei*, sub praesentato, um solche durchzusehen, nach sich. Idem Hr. Prof. DE L'ISLE nimmt noch ejusdem Hrn. Prof. EULER's angefertigte „Tabulam aequationis meridiei ex duabus aequalibus solis altitudinibus ante et post meridiem observatis in minutiis [tertiis] temporis computatam“.

Aus dem ersten Passus scheint hervorzugehen, daß EULER schon am 27. Januar eine Berechnung in betreff der Mittagsverbesserung ausgeführt hatte; freilich verstehe ich nicht den Ausdruck: „wenn man nur den einen festen Satz der Sonnen-Höhe inne hat“, denn dieser scheint ja auf Zeitbestimmung durch eine einzige Höhe hinzudeuten, und soviel ich weiß, hat EULER nie dieses Verfahren benutzt. Unklar ist ebenfalls der Ausdruck: „Weil diese Piece anstatt Anmerkung gedruckt werden soll.“²⁾ Dagegen ist der zweite Passus vollständig deutlich, und daraus geht hervor, daß EULER am 31. Januar 1735 teils die Abhandlung *Methodus computandi aequationem meridiei*, teils die dazu gehörende Tafel der Akademie vorgelegt hatte. Die Abhandlung wurde 1741 im 8. Bande der *Commentarii* gedruckt³⁾, und darin gibt EULER Auskunft nicht nur über sein Verfahren, sondern auch über die Umstände bei der Berechnung der Tafel.

Nach einigen einleitenden Bemerkungen erwähnt EULER, daß PH. DE LAHIRE in der zweiten Auflage seiner astronomischen Tafeln eine Methode

wahre mittagszeit in St. Petersburg durch einen kanonenschuß anzuzeigen. Und damit man selbigen an allen orten der stadt desto besser hören möchte, sollte solches von der academischen sternwarte geschehen. Weil dieses aber für selbige wegen der jedesmaligen erschütterung hätte können gefährlich werden, so unterblieb dieser sonst ganz gute vorschlag (Материалы для истории императорской академии наукъ 6, Санктпетербургъ 1890, S. 368).

1) *Procès-verbaux* 1, S. 142, 146.

2) Wenn man annehmen darf, daß „anstatt“ ein Schreibfehler für „als“ wäre, könnten die Worte bedeuten, daß die Tafel in den von der Akademie veröffentlichten „Anmerkungen zu den Zeitungen“ veröffentlicht werden sollte.

3) Siehe oben S. 310, Fußnote 1.

die Mittagsverbesserung zu berechnen angegeben und eine kurze Tabelle für die Polhöhe von Paris mitgeteilt hat. Indessen sei die Methode so verwickelt, daß ein fleißiger Rechner mehrere Monate brauchen würde, wenn er auf diese Weise eine vollständige Tafel fertigstellen wollte. Dazu komme noch, daß die gewöhnlichen Sinus- und Tangententafeln nicht genügen, um die Werte der Verbesserungen mit der nötigen Annäherung zu berechnen. Darum habe EULER, als eine Mittagsverbesserungstafel für die Petersburger Sternwarte gebraucht wurde, eine andere leichte Methode ausgedacht, deren Anwendung keine neuen trigonometrischen Tafeln erfordere. Ferner gibt EULER eine ausführliche Herleitung der Formel, die dieser Methode zum Grunde liegt, sowie Aufschlüsse über die beste Anwendung derselben und fährt dann fort:

Allerdings scheint dieses Verfahren recht verwickelt und zeitraubend zu sein, aber wer ein wenig in Rechnungen geübt ist, sieht sofort, daß es nicht nötig ist, die ganze Berechnung für jede Verbesserung auszuführen, sondern daß viele der schon berechneten Zahlen bei den folgenden Operationen zur Anwendung kommen können. Was mich selbst betrifft, kann ich behaupten, daß ich nicht vier ganze Tage gebraucht habe, um die Tafel vollständig fertig zu stellen.¹⁾

Zum Schluß erläutert EULER an einem Beispiel die Anwendung der von ihm hergeleiteten Formel.

III.

Vergleichen wir jetzt den Bericht von Fuss mit den oben angeführten authentischen Aufschlüssen, und nehmen wir vorläufig an, daß alles, was Fuss ausdrücklich angibt, um den eisernen Fleiß EULERS zu belegen, richtig sei, so finden wir sofort, daß der Beleg wertlos wird, wenn man nicht voraussetzt, daß die befragten Akademiker eine neue Methode zur Berechnung der Mittagsverbesserung kannten. EULER hebt nämlich selbst hervor, daß die Berechnung nach der alten LAHIREschen Methode mehrere Monate in Anspruch nehmen mußte. Nun äußert ja Fuss kein einziges Wort hierüber, und schon aus diesem Grunde muß sein Bericht ein wenig verdächtig erscheinen. Noch verdächtiger wird der Bericht dadurch, daß er im Laufe von sechs Jahren zweimal modifiziert wurde. Aber auch wenn man von diesem Umstand absieht und den letzten Bericht als den

1) A. a. O. S. 61: „Videtur quidem haec regula satis prolixa, et multum temporis requirere ad tabulam aequationis meridiei computandam; sed qui paulisper in calculando est exercitatus, statim videbit non opus esse pro singulis aequationibus totam operationem repetere; sed plures numeros unius operationis in reliquis retineri. De me saltem asseverare possum, me haud quatuor dies integros ad totam tabulam huic loco inservientem impendisse “

endgültigen betrachtet, bekommt man keinen hohen Gedanken von der Zuverlässigkeit Fusses, denn von den drei Angaben, die den großen Fleiß EULERS begründen sollen, nämlich 1. daß die Berechnung Eile hatte, 2. daß verschiedene Mathematiker für die Berechnung einige Monate Zeit verlangten, 3. daß EULER die Berechnung in drei Tagen vollendete, ist die letzte nachweislich entweder falsch oder ungenau und die erste sehr unzuverlässig. EULER gibt ja selbst an, daß er für die Berechnung weniger als vier ganze Tage angewandt hatte, und die Form des Ausspruchs deutet darauf hin, daß er sich nicht ohne Unterbrechung mit der Arbeit beschäftigt hatte. Aber auch wenn man den Ausspruch auf die für Fuss vorteilhafteste Weise deutet, steht es fest, daß es richtiger wäre, „in vier Tagen“ statt „in drei Tagen“ zu setzen. Daß die Angabe in betreff der Eile höchst unwahrscheinlich sein muß, versteht man ja schon daraus, daß nur ein sehr kleiner Teil der Tafel sofort gebraucht werden konnte, so daß man gute Zeit bei der Berechnung der ganzen Tafel hatte. EULER selbst sagt kein Wort über die angebliche Eile der Berechnung, und ebenso wenig geben die Protokolle Auskunft darüber. Im Gegenteil ersieht man aus denselben, daß EULER am 17. Februar 1735 noch nicht die vom Kopisten gefertigte Abschrift der Tafel kontrolliert hatte; erst am 21. Februar bekam DELISLE die Abschrift, und am 28. Februar erhielt WINSHEIM, der andere Astronom der Petersburger Sternwarte, das Original.¹⁾

Anderseits kann man natürlich nicht mit Sicherheit behaupten, daß die zweite Angabe von Fuss keine Beweiskraft besitzt, nur weil die erste und die dritte unzuverlässig oder unrichtig sind, und ich werde darum besonders untersuchen, welche die Akademiker sein konnten, die nach Fuss befragt wurden, und ob man annehmen darf, daß diese ein anderes Verfahren als das LAHIREsche kannten.

IV.

Unter den Akademikern der Petersburger Akademie am Anfang des Jahres 1735 konnten 5 oder höchstens 6 als Mathematiker oder Astronom bezeichnet werden²⁾, nämlich GOLDBACH, DELISLE, EULER, KRAFFT, WINSHEIM und möglicherweise LEUTMANN. Aber von diesen kann hier weder GOLDBACH noch DELISLE noch LEUTMANN in Betracht kommen. GOLDBACH war Sekretär der Akademie, und es wäre unangezeigt gewesen, ihm vorzuschlagen, sich mit numerischen Rechnungen für die Sternwarte zu beschäftigen. DELISLE war Direktor der Sternwarte und hatte als solcher die Berechnung angeregt, und LEUTMANN war fast ausschließlich Physiker. Außer EULER konnte DELISLE also nur KRAFFT und WINSHEIM

1) *Procès-verbaux* 1, S. 155, 157, 162.

2) Vgl. *Procès-verbaux* 1, S. 221.

befragt haben. Jener war aber seit 1733 Professor der theoretischen und Experimental-Physik und hatte sicherlich keine Lust, eine Arbeit zu übernehmen, die mit seinem damaligen Amt nichts zu tun hatte. Dagegen war WINSHEIM, wie oben bemerkt wurde, der andere Astronom der Petersburger Sternwarte, und es lag also nahe, ihm die Berechnung aufzutragen. Indessen ist es höchst unwahrscheinlich, daß WINSHEIM, der kein Mathematiker war¹⁾, eine neue Methode für diese Berechnung ausgedacht hätte. Übrigens konnte er am Anfang des Jahres 1735 mit anderen Arbeiten beschäftigt gewesen sein, so daß er nicht sofort die Berechnung nach der EULERSchen Formel beginnen konnte, auch wenn ihm diese Formel mitgeteilt gewesen wäre, was meines Erachtens wenig wahrscheinlich ist. Aus der Abhandlung EULERS geht nämlich hervor, daß dieser auf seine Formel großen Wert legte, und es ist sehr natürlich, daß er selbst die Richtigkeit dieser Bewertung praktisch nachweisen wollte. Wie dem auch sei, muß ich in Abrede stellen, daß die Befragung der Akademiker, auch wenn sie stattgefunden hat, als Beleg für den großen Fleiß EULERS gelten kann.

Einen solchen Beleg könnte dagegen die Tafel selbst möglicherweise bieten, und wie ich oben erwähnt habe, befindet sie sich noch handschriftlich in Petersburg. Freilich habe ich sie nicht gesehen, aber aus der Überschrift²⁾ und aus der EULERSchen Formel kann man ja Auskunft über die Zahl und die Art der ausgeführten Rechnungen bekommen. Da die größte Deklination der Sonne etwa $23^{\circ} 28'$ beträgt, und da die Rechnungen nach der Überschrift für jeden Grad der Deklination sowie für 18 verschiedene Beobachtungsmomente ausgeführt worden sind, kann die Zahl der Rechnungsergebnisse nicht $18 \cdot (24 + 1 + 24) = 882$ überschreiten. Nach seiner eigenen Aussage hat EULER bei der Berechnung weniger als 4 ganze Tage verwendet, und wenn wir 8 Arbeitsstunden

1) In der schon zitierten Geschichte der Petersburger Akademie von MÜLLER und STRITTER wird von WINSHEIM gesagt, daß er „nicht unerfahren in der mathematik, wie solches auf universitäten gelehrt wird“, war (Матеріалы 6, S. 223), und dies ist wohl das Höchste, das man von seinen mathematischen Kenntnissen sagen kann. Die zwei rein mathematischen Abhandlungen, die er in den Petersburger Denkschriften veröffentlicht hat, nämlich *De interpolatione simplici meditationes* (Comment. acad. sc. Petrop. 13 [1741—1743], gedruckt 1751, S. 312—335) und *De numeris perfectis* (Novi comment. acad. sc. Petrop. 2 [1749], gedruckt 1751, S. 68—99) zeigen auch, daß WINSHEIM kein Mathematiker von Fach war.

2) Die Überschrift lautet: „Tabula aequationis meridiei ex duabus aequalibus solis altitudinibus ante et post meridiem observatis in minutis tertiis temporis computata pro singulis gradibus declinationis Solis ab intervallo observationum unius horae usque ad octodecim ad elevationem poli in observatorio Petropolitano quae est $59^{\circ} 57'$.“

pro Tag annehmen, kann die Zahl der Stunden annäherungsweise gleich 30 gesetzt werden, so daß jedes Rechnungsergebnis etwa 2 Minuten in Anspruch nahm. Nun ist die EULERSche Formel bekanntlich

$$\frac{\text{ang} \cdot SPT \cdot dt}{720^\circ} \left(\frac{\text{tang} \cdot ZE}{\sin \cdot \frac{1}{2} SPT} - \frac{\text{tang} \cdot OE}{\text{tang} \cdot \frac{1}{2} SPT} \right).$$

In dieser Formel ist ZE (die Polhöhe) konstant, der numerische Wert von OE (die Deklination der Sonne) kann, abgesehen von dem Zeichen, höchstens 25 Werte haben, von denen einer Null ist, und SPT (die Differenz der Stundenwinkel der zwei korrespondierenden Beobachtungen) kann höchstens 12 Werte haben, deren in der Formel vorkommende trigonometrischen Funktionen, abgesehen von dem Zeichen, voneinander verschieden sind. EULER hat also vollständig recht, als er ausdrücklich hervorhebt, daß nicht jedes Rechnungsergebnis eine durchaus neue Rechnung mit sich führt, und aus der Tafel selbst dürfte man keinen Beleg für den ungeheuren Fleiß bekommen, der angeblich nötig gewesen wäre, um dieselbe in drei oder vier Tagen fertig zu stellen.

V.

Die ganze Frage in betreff der Umstände, unter denen EULER seine Mittagsverbesserungstafel berechnete, ist an sich von untergeordneter Bedeutung, aber sie bekommt ein besonderes Interesse durch die Angabe von FUSS über die verhängnisvollen Folgen der Rechnungsarbeit. Allein wenn diese Arbeit gar nicht kolossal genannt werden kann, wie steht es denn mit der angeblichen Überanstrengung EULERS, die nach FUSS erst eine schwere Krankheit und dann den Verlust des rechten Auges veranlaßte? Ich muß bekennen, daß mir der Bericht von FUSS auch in diesem Punkte wenig glaubwürdig scheint. Daß EULER am Anfange des Jahres 1735 oder möglicherweise schon am Ende des Jahres 1734 gefährlich krank war, wissen wir mit Sicherheit aus einem Briefe DANIEL BERNOULLIS an ihn vom 4. Mai 1735, in dem folgender Passus vorkommt¹⁾: „Wie mir Herr MOULA schreibt, so war nicht nur Jedermann bei Ihrer Krankheit um Sie bekümmert, sondern sogar auch ohne Hoffnung, Sie wiederum von derselben restituiert zu sehn.“ Auf Grund der Protokolle können wir mit großer Wahrscheinlichkeit den Zeitpunkt dieser Krankheit ziemlich genau bestimmen. Laut den Protokollen²⁾ war EULER in der Sitzung vom 23. Dezember 1734 anwesend, aber abwesend in allen folgenden Sitzungen bis zum 24. Januar 1735 inklusive. Dann war er

1) *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^{ème} siècle* publiée par P. H. FUSS 2, St. Pétersbourg 1843, S. 419.

2) *Procès-verbaux* 1, S. 131—193.

anwesend am 27. Januar und in allen folgenden Sitzungen Januar—April 1735, für welche in den Protokollen die anwesenden Akademiker notiert werden; überdies wird er am 24. Januar ausdrücklich als krank erwähnt, aber auf eine Weise, woraus man schließen kann, daß die Krankheit beinahe vorüber war. Es ist also mit großer Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß die Krankheit EULERS um den 1. Januar 1735 begann und um den 25. Januar 1735 aufgehört hatte. Aber erst am 31. Januar legte EULER der Akademie seine Tafel vor, und wenn die Angabe von FUSS in betreff der Überanstrengung und ihrer Folgen richtig ist, muß also die Berechnung schon Ende Dezember 1734 oder spätestens Anfang Januar 1735 stattgefunden haben. Unmöglich ist dies natürlich nicht, und dadurch würde wenigstens die wichtigste Angabe von Fuss richtig sein können, aber persönlich bin ich der Ansicht, daß auch diese als verdächtig betrachtet werden soll¹⁾ Will man die Krankheit EULERS mit der Mittagsverbesserungstafel in Verbindung setzen, wäre es meines Erachtens besser, anzunehmen, daß die Überanstrengung nicht durch die Berechnung der Tafel, sondern durch die Aussinnung der Formel veranlaßt wurde, und daß EULER erst als Konvaleszent die ziemlich leichte Rechnungsarbeit vollendete. Aber dann wird die ganze Rede von dem „eisernen Fleiße“ EULERS hinfällig, und in dem Fuss'schen Bericht werden fast alle Angaben falsch.

Das Ergebnis der vorangehenden Untersuchung ist also:

Es ist richtig, daß EULER am Anfang des Jahres 1735 in kurzer Zeit eine Mittagsverbesserungstafel berechnete, deren Anfertigung nach der einzigen damals bekannten Methode viele Monate erfordert hätte, aber EULER hat selbst hervorgehoben, daß seine Rechnungsarbeit nicht besonders zeitraubend war, weil er sich einer neuen Methode bediente. Es ist auch richtig, daß EULER am Anfang des Jahres 1735 gefährlich krank war, aber es ist zum mindesten höchst unsicher, ob diese Krankheit auf irgendeine Weise durch die fragliche Rechnungsarbeit veranlaßt wurde. Jedenfalls hat Fuss in seiner Lobrede auf EULER das Material, das er zur Verfügung hatte, in dem jetzt behandelten Falle entweder unkritisch benutzt oder auf eine Weise bearbeitet, die seine Darstellung unzuverlässig macht.

1) Vgl. was EULER selbst in seinem Briefe an GOLDBACH vom 21. August 1741 bemerkt (*Correspondance mathématique et physique* 1, St. Pétersbourg 1843, S. 102): „Die Geographie ist mir fatal. Ew. wissen, dass ich dabei ein Aug eingebüsst habe . . . diese Arbeit [mit den Karten], da man genöthiget ist immer einen grossen Raum auf einmal zu übersehen, greift das Gesicht weit heftiger an, als nur das simple Lesen oder Schreiben allein.“

Historical sketch of the development of the theory of groups of finite order.

By G. A. MILLER in Urbana.

Group theory as an autonomous science may be said to have been founded by CAUCHY during the years 1844—1846. A number of fundamental concepts and theorems are, however, much older. "In fine, the principal foundation of EUCLID's demonstrations is really the existence of the group and its properties. Unquestionably he appeals to other axioms which it is more difficult to refer to the notion of group. An axiom of this kind is that which some geometers employ when they define a straight line as the shortest distance between two points. But it is precisely such axioms that EUCLID enunciates. The others, which are more directly associated with the idea of displacement and with the idea of groups are the very ones which he implicitly admits and which he does not even deem necessary to enunciate. This is tantamount to saying that the former are the fruit of later experience, that the others were first assimilated by us and that consequently the notion of group existed prior to all others".¹⁾

Not only is the group concept dominant in many early geometric developments but it also enters into the early arithmetic processes. It is perhaps impossible to establish that this concept is really at the base of the Egyptian unit-fractions but the later "theory of congruences bases itself upon a fundamental concept of mathematics, which is already the foundation of POINCARÉ's method, the concept of group".²⁾ The works of LAGRANGE and VANDEMONDE (about 1770) gave a new impetus to the study of the group concept and the former practically established a theorem which is now in constant use in the theory of groups; viz., the theorem that the order of a group is divisible by the order of each of its subgroups. This theorem is known as *LAGRANGE'S theorem* although its first

1) H. POINCARÉ, *The monist* 9, 1898, p. 34

2) P. BACHMANN, *Die Elemente der Zahlentheorie*, vol. 1 (1892), Preface.

complete and satisfactory proof was given about thirty years later by the Italian ABBATI. Neither LAGRANGE nor ABBATI employed the language of abstract group theory, but they studied primarily the values which a function may assume when its elements are permuted in every possible manner.

The three most prominent sources of the theory of groups of finite order are: geometric transformations, theory of numbers, and theory of algebraic equations. As regards the first two of these sources we have already referred to two quotations relating to EUCLID's Elements and to POINSOT's method respectively. The group concept is so fundamental in some of EULER's work on power residues that it has been suggested by PEROTT to name the groups in which multiplication is commutative eulerian instead of abelian.¹⁾ The group concept enters, however, still more prominently into some of the work of GAUSS. In particular, GAUSS proves that any abelian group is the direct product of groups whose orders are relatively prime.²⁾

Notwithstanding the great importance of abelian groups their properties are so simple compared with those of nonabelian groups that these important developments by EULER, GAUSS and POINSOT had comparatively little influence on the development of the general theory. Moreover, the abstract group properties implied in these works called for a deeper mental penetration than the development of a concrete subject in which the group concept plays the prominent rôle. The theory of substitutions is eminently adapted to serve as a medium for the apprehension of general group properties, since it is not only concrete but it also involves comparatively little that does not convey group notions and it has a simple notation.

The formal study of substitution groups was begun by RUFFINI in his well known *Teoria generale delle equazioni* (Bologna 1799). He also established a very important negative theorem; viz., that a group does not necessarily involve a subgroup whose order is an arbitrary divisor of the order of the group. RUFFINI established this theorem by proving that there is no three or four valued rational function on five letters. In view of its fundamental importance, it seems proper to call this theorem *RUFFINI's theorem* and to associate it with LAGRANGE's theorem as two great corner stones prepared before CAUCHY's epoch making work.

Another fundamental theorem which antedates the founding of group theory as given above is due to GALOIS, and establishes the fact that

1) Americ. Journ. of mathem. 11, 1889, p. 99.

2) Mss. written in 1801 and published in *Werke*, vol. 2, p. 266.

every invariant subgroup may be used as a modulus in the study of the group. In other words, every invariant subgroup gives rise to a quotient group which exhibits many fundamental properties of the group. The value of this important theorem was not sufficiently appreciated by CAUCHY and his immediate disciples. The works of JORDAN, however, exhibit its true significance as an instrument of work and as a thought saving device.

While the three theorems, due respectively to LAGRANGE, RUFFINI and GALOIS, which have been mentioned above, constitute the chief theoretic developments up to 1844, they did not furnish the main incentives for the further vigorous developments of the subject under consideration. These incentives were furnished by ABEL's use of substitution groups to prove that it is not possible to solve, by rational processes combined with root extraction, the general equation whose degree exceeds four, and by GALOIS' use of substitution groups to obtain general criterions for the solvability, by the given operations, of algebraic equations in general. These epoch making discoveries called emphatic attention to the instruments by means of which they were achieved, and hence they furnished lasting incentives for the further development of substitution groups.

The capital discoveries of ABEL and GALOIS were preceded and aided by developments as regards the necessary and sufficient conditions that functions can be expressed rationally in terms of each other. These developments were largely due to LAGRANGE, and exhibited the fact that substitution groups furnish very important criterions as regards the classification of rational functions in a large number of variables. A natural outgrowth of this work and the work of RUFFINI was the question as regards the smallest number of values a rational non-alternating function of n variables can assume when these variables are permuted in every possible manner. This problem attracted the attention of CAUCHY about thirty years before he did his epoch making work in substitution groups.

The main theorem established by CAUCHY at this early date is that the number of values of such a function cannot be greater than two and less than the largest prime which divides n .¹⁾ This was an extension of the result, obtained by ABBATI, that there cannot be a three or four valued rational function on n letters whenever $n > 4$; and it, in turn, formed the basis of further extensions in the hands of BERTRAND and others. These extensions redirected the attention of CAUCHY to this field of his early study, while HERMITE's work on the noted six valued function of

1) Journ. de l'éc. polytechn. 10, 1815, p. 9.

degree 6 intensified this attention, and resulted in the first didactic work on substitution groups. This work appeared in the third volume of CAUCHY's *Exercices d'analyse et de physique mathématique* (1844); and in a long series of memoirs published in the Paris *Comptes rendus des séances de l'académie des sciences* (1845—1846). Although these publications are marred by a number of errors, they produced such a decided advance along various lines that it seems just to consider them as constituting the foundation of the subject under consideration.

The most important single theorem proved by CAUCHY in this series of papers is the one generally known in group theory literature as *CAUCHY's theorem*. It establishes the fundamental fact that every group whose order is divisible by a given prime number p must contain at least one subgroup of order p .¹⁾ A simplified and elegant proof of the main theorem upon which his proof of this theorem was based was CAUCHY's last contribution to the general subject of group theory. About thirty years later the latter theorem was materially extended by SYLOW, and in this extended form it is generally known as *SYLOW's theorem*, and it constitutes one of the most general and most useful theorems in the entire domain of groups of finite order.²⁾

CAUCHY's developments were sufficiently extensive to determine at least the orders of the possible substitution groups whose degrees do not exceed six, and he was the first to make an enumeration of these possible orders. While his results were not complete, they pointed to the possibility of such enumerations, as well as to the need of further extensive developments in order to bring all such enumerations under general theorems. Probably CAUCHY's greatest contribution to the subject under consideration was his method of work in fixing attention on the substitution groups and even on abstract group properties without an immediate concern as regards applications. This separation of the subject from its immediate applications was naturally not as complete even in the hands of CAUCHY as it became later when the theory became more extensive and internal applications became matters of greater interest.

CAUCHY's final paper on substitution groups is an instance of his tendency to divorce the study of substitution groups from other subjects. In this article no mention whatever is made of functions or any other direct applications of the substitution groups in question. As an instance of his approach to abstract group theory we may mention his two notes entitled: *Mémoire sur un nouveau calcul qui permet de simplifier et d'étendre*

1) This fundamental theorem was stated by GALOIS but without proof (*Manuscripts de ÉVARISTE GALOIS* publiés par J. TANNERY, Paris 1908, p. 39).

2) Cf. Bulletin of the Americ. mathem. soc. 16, 1910, p. 510.

la théorie des permutations and *Sur la résolution des équations symboliques non linéaires*.¹⁾

Some writers have attributed the concepts of transitivity and intransitivity to CAUCHY. This is, however, a mistake since these concepts together with the concepts of primitivity and imprimitivity are found in the works of RUFFINI.²⁾ CAUCHY was the first to employ the terms transitive and intransitive and he made such extensive use of these concepts as to exhibit their true importance and usefulness. Instead of imprimitive function CAUCHY said transitive complex function, and he announced a fundamental theorem as regards imprimitive groups which is, however, not true. This supposed theorem may be stated as follows: If G_1 is the subgroup which is composed of all the substitutions which omit a given letter of a simply transitive group G , then G is imprimitive unless all of the transitive constituents of G_1 are of the same degree. In particular, if G_1 is of a prime degree G must always be imprimitive.³⁾

It is very easy to prove, as follows, that this supposed theorem is not true. Consider the symmetric group of degree 9. It involves the direct product of the symmetric groups of degrees 3 and 6 as a maximal subgroup. Hence it may be represented as a primitive group of degree 84.⁴⁾ As its order is not divisible by 83 this primitive group is simply transitive, and G_1 is of the prime degree 83. Hence this contradicts the supposed theorem in question. As this supposed theorem relates to a somewhat difficult subject, it constitutes one of the most serious errors in CAUCHY's works on substitution groups.

During the same year in which CAUCHY concluded his series of articles published in the Paris Comptes rendus, LIOUVILLE directed the attention of mathematicians to the fundamental investigations of GALOIS, by publishing in the Journal de mathématiques, the works of GALOIS together with an appreciative introduction. Although the group theory work done by GALOIS was fragmentary, it exhibited the penetrating power of this instrument of thought and contributed largely to the interest in the developments which had been so successfully started by CAUCHY. Henceforward this subject continued to be well known and we find that, at least as early as 1848, J. A. SERRER taught it at Paris as a member of the "Faculté des Sciences", since he mentioned in a note published in Journal de l'école polytechnique, cahier 32, page 147 that he had taught the subject there.

1) Comptes rendus de l'acad. d. sc. [de Paris] 22, 1846.

2) BURKHARDT, Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 6, 1892, p. 133.

3) CAUCHY, Comptes rendus de l'acad. d. sc. [de Paris] 21, 1845, p. 1199.

4) DYCK, Mathem. Annalen 22, 1883, p. 94.

The year 1858 is especially important in the history of the development of group theory. In this year the Institute of France proposed for "Le grand prix des sciences mathématiques" a subject based upon the theory of substitutions. The exact title of this subject was as follows: "Quels peuvent être les nombres de valeurs des fonctions bien définies qui contiennent un nombre donné de lettres, et comment peut-on former les fonctions pour lesquelles il existe un nombre donné de valeurs." Although none of the memoirs which were presented was adjudged worthy of the prize, the offer had a good influence in directing attention to the importance and the difficulty of the subject.¹⁾

The year 1858 is also important in the history of the theory of groups because during this year BERTRAND gave a course at the "College de France" which was devoted to the principal works of CAUCHY. In this course BERTRAND emphasized the theory of substitutions. The course was followed by C. JORDAN and E. MATHIEU and was the starting point of two important theses on substitution groups, the one published by MATHIEU in 1859 and the other by C. JORDAN in 1860.

This thesis by JORDAN was the first of a long series of publications which constitute a new epoch in the development of the theory of groups. These publications culminated in the great *Traité des substitutions et des équations algébriques* in 1870, but this magistral work did not terminate the contributions by JORDAN towards the development of the subject under consideration. In fact, several of his most important publications, including those which appeared in the first volume of the Bulletin de la société mathématique de France, were subsequent to the publication of the *Traité*.

But JORDAN's contributions are not confined to his valuable and penetrating publications. Beginning in the year 1877 he has given a number of different courses on the theory of substitutions at the "College de France", and thus he started a number of younger men in this field. Among these MAILLET, whose extensive and important contributions are so well known, deserves especial mention. While it is difficult to measure these indirect contributions, the direct contributions in the publications by JORDAN are varied and of very great importance. Among other important theorems his thesis gives the first proof of the fundamental theorem that the total number of substitutions on n letters which are commutative with every substitution of a regular group G on the

1) In England this prize attracted the attention of J. J. SYLVESTER; cf. Philosophical magazine 21, 1861, p. 377; and especially that of T. P. KIRKMAN; cf. Memoirs of the philos. soc. of Manchester 1, 1862, p. 274. The latter expressed his disappointment due to the withdrawal of the prize.

same n letters constitute a group which is similar to G . JORDAN's earliest work on group theory was in close touch with the work done by CAUCHY but he soon entered into the fundamental concepts sketched by GALOIS, and these concepts dominate in a large part of his later work.

Among the many fundamental concepts introduced by JORDAN are those of class of a substitution group, and constancy of the factors of composition. As regards the former of these concepts he proved that there is a finite number of primitive groups whose class is a given number greater than 3, and he also made an approximately true determination of all the possible primitive groups whose class is greater than 3 but less than 14.¹⁾ He utilized the constancy of the factors of composition to establish the theorem that the necessary and sufficient condition that a group be solvable is that all its factors of composition are prime numbers. JORDAN knew how to fill in the many gaps as well as how to extend the penetrating outlines of his great country-man GALOIS, so as to secure a logically complete theory of the solvability of algebraic equations. As we shall see later BETTI also deserves much credit for his earlier work along this line.

The year 1858 marks also the beginning of group theory in Germany, since DEDEKIND gave a course of lectures on higher algebra, especially the GALOIS theory, at the University of Göttingen in 1857—1858. This course was very significant and it influenced the work of WEBER to a large extent, although DEDEKIND communicated the substance of the lectures to WEBER at a much later period.²⁾ A few Germans were probably acquainted with the GALOIS theory before this course of lectures by DEDEKIND. KRONECKER may have first become acquainted with it during his visit to Paris in 1853 as he mentions GALOIS' name in a letter to DIRICHLET in 1856, and he had become intimately acquainted with HERMITE, BERTRAND, and other leading French mathematicians during his Paris visit.³⁾

Beginning with this course by DEDEKIND, it has become customary to devote a considerable part of the courses on higher algebra, in the German universities, to substitution groups and to the GALOIS theory of equations. A course under the special title of substitution groups was given by NETTO in 1879—1880 at Strassburg. In the winter semester 1908/9 NETTO gave his first course on the theory of abstract groups at Giessen. In all the larger German universities there are also special courses devoted to groups of finite order, and to discontinuous groups,

1) JORDAN, *Comptes rendus de l'acad. d. sc. [de Paris]* 15, 1872, p. 1754.

2) WEBER, *Lehrbuch der Algebra* I, 1895, preface p. 7.

3) PIERPONT, *Bulletin of the Americ. mathem. soc.* 4., 1898, p. 343

which attract a considerable number of students.¹⁾ The publication in 1882 of NETTO's *Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra* was a very significant factor in the further development of this subject not only in Germany but also in other countries, as may be partly inferred from the fact that it was translated into Italian by BATTAGLINI in 1885 and into English by COLE in 1892.

The emphasis placed on the group concept by KLEIN and LIE, and the very important results from their work dominated by this concept, awakened in Germany an unusually wide interest also in the further development of the abstract basal theory. This interest led to a large number of contributions to the theory of the abstract groups of finite order. Moreover, the older work of GAUSS, KRONECKER, and DEDEKIND exhibited the importance of the group concept and attracted investigators to this field. FROBENIUS has been especially successful in the discovery of fundamental theorems relating to abstract groups of finite order, and his theory of group characters proved a powerful instrument of work not only in Germany but also in other countries. The first publication by FROBENIUS along the line of abstract group theory was a joint paper with STICKELBERGER on the abelian groups, which is still to be regarded as one of the best papers on this subject. The main results of the paper were implied in the earlier researches of GAUSS, SCHERING, and KRONECKER (to whom due credit is given), but they are stated with much greater clearness and precision in the paper under consideration.

The second paper by FROBENIUS was devoted to a new proof of SYLOW's theorem, in which no direct use is made of substitution groups. Hence this fundamental theorem of abstract groups was freed from the need of a knowledge of substitution groups, and this was a great step forward towards building up an independent abstract theory of groups. SYLOW's theorem in its modern form therefore involves important direct contributions by GALOIS, CAUCHY, SYLOW, and FROBENIUS. Among the later contributions of FROBENIUS, those relating to the extension of SYLOW's theorem and the solvable groups deserve especial mention. Although the present brief sketch does not permit us to enter into details, the fundamental work of BOCHERT, NETTO, DYCK, HÖLDER, SCHUR, and LOEWY cannot be passed without a reference.

About two years after DEDEKIND gave his course at Göttingen, ENRICO BETTI gave a course on substitutions and algebraic equations in the University of Pisa. This was the first course on the subject in question in any Italian university and it was given during the years 1859—1861.

1) BURNSIDE, Proceedings of the London mathem. soc. 7, 1909, p. 2.

BETTI was probably the first to have fully mastered the profound theory outlined by GALOIS and he published the first commentary on GALOIS theory of equations¹⁾ twenty years after the death of GALOIS. From this time forward the GALOIS theory was accessible to the general public in an intelligible form, but the works of JORDAN and others cleared up many additional points and contributed much towards making the subject more attractive.

BATTAGLINI gave a course on this subject in the University of Rome in 1875—1876, and one of his students, A. CAPELLI, wrote a remarkable thesis on substitution groups which was published in 1878 in the *Giornale di matematiche* under the title *L'isomorfismo dei gruppi di sostituzioni*. In this thesis CAPELLI rediscovered the fundamental theorem known as SYLOW's theorem and he develops the general notion of the isomorphisms which are now sometimes called homomorphisms. At the University of Naples G. JANNI lectured on the theory of substitutions before the publication of his *Esposizione della teorica delle sostituzioni* in 1873, and A. CAPELLI gave several courses on the same subject beginning with 1885. Since 1884 L. BIANCHI has given almost every year a course on groups and the GALOIS theory for the students of the "Scuola normale" of Pisa, and a number of courses have been given occasionally in the other Italian universities.

Although no single recent Italian mathematician has contributed as largely towards the development of our subject as JORDAN of France, FROBENIUS of Germany, and BURNSIDE of England, yet the total contributions on the part of the Italians has been very considerable. The pioneer work of RUFFINI and ABBATI was followed by the fundamental work of BETTI in simplifying the results of GALOIS, by JANNI's exposition of JORDAN's *Traité* in the articles published in *Giornale di matematiche* during the years 1871—1873, by BATTAGLINI's translation of NETTO's *Substitutionentheorie* in 1885, and by BIANCHI's very clear *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni* in 1900. In addition, some of the numerous Italian periodical articles exhibit real advances along important lines.

The early courses in the theory of substitution groups and their applications to algebraic equations were not confined to France, Germany, and Italy. A very significant course was given by SYLOW in Christiania in 1862—1863 which was followed by SOPHUS LIE and started him in his very important work of applying the group concepts to domains in which this concept had not explicitly dominated before his time. While this sketch is confined to the development of groups of finite order, it is important to observe that the theory of continuous groups started

1) *Annali di sc. matem. e fis.* 3, 1852, p. 49—115.

from the theory of groups of finite order and that many of the theorems of the former are modeled on the latter. As POINCARÉ remarked in his address before the Rome International congress of mathematicians, it may be time for the theory of groups of finite order to model, in turn, after that of continuous groups with a view to further advances.

In his presidential address before the London Mathematical Society in 1908, BURNSIDE compared England with some other European countries and with America as regards the teaching of group theory in the universities, and pointed out that much less attention had been given in England to the teaching of this subject than in these other countries. He concluded that this was largely due to the fact that in the teaching of junior students opportunities which occur for familiarising them with the ideas that are fundamental in group theory, when those ideas present themselves in simple form, are not taken advantage of. It is the results, and not the processes which lead to the results, on which their attention is mainly fixed.¹⁾

While the teaching of group theory has received little attention in England it is here where abstract group theory may be said to have started in 1854 with CAYLEY's article entitled *On the theory of groups as depending on the symbolic equation $\Theta^n = 1$* . It should, however, be emphasized that the growth from substitution groups to abstract groups was gradual, so that it is difficult to say where the latter really begins. CAYLEY's article, which has just been noted, cannot be regarded as entirely abstract, since the formal definition of an abstract group did not exist at this time. If such formal definitions were regarded as the starting point of the abstract theory of groups, the beginnings of this theory would belong to Germany and would be found in the works of KRONECKER, WEBER, and FROBENIUS.²⁾

While the commonly accepted view that CAYLEY should be regarded as the founder of abstract group theory is open to objections, there seems to be much less room for objection to the assertion that England produced the first treatise on abstract group theory in the form of BURNSIDE's *Theory of groups of finite order*, published at Cambridge in 1897. Although the theory of substitution groups occupies a considerable portion of this work yet in the proofs of most of the fundamental theorems "the notation and methods of substitution groups have been rigorously excluded", although this notation has been used, whenever convenient, for the

1) BURNSIDE, Proceedings of the London mathem. soc. 7, 1909, p. 3.

2) L. KRONECKER, Monatsber. d. preuß. Akad. d. Wissensch. 1870, p. 882; H. WEBER, Mathem. Annalen 20, 1882, p. 302; G. FROBENIUS, Journ. für die reine und angew. Mathem. 100, 1887, p. 179.

purposes of illustration. The presence of so many theorems dealing with the notation of substitution groups is justified, in the preface, by the statement that "in the present state of our knowledge, many results in the pure theory are arrived at most readily by dealing with properties of substitution groups".

Although BURNSIDE's *Theory of groups* includes a number of interesting results which are due to its author, the most important contributions of BURNSIDE have been made since the appearance of his valuable treatise. Among these the proofs of the theorems that every group of degree p , p being a prime number, which involves more than one subgroup of order p must be multiply transitive, and that every group whose order is not divisible by more than two distinct prime numbers is solvable¹), deserve especial mention.

In view of the fact that America is so young from the standpoint of mathematical contributions, it may be of interest to enter into somewhat greater details as regards the development of a general interest in the theory of groups in this country. J. J. SYLVESTER, the founder of the first school of modern mathematicians in this country, was the first to lecture in any American university on the subject of group theory. During the first half year of 1882—1883 he gave at Johns Hopkins University a course of lectures, two hours weekly, on the theory of substitutions.²) This course was followed by nine students including three docents in mathematics in Johns Hopkins University; viz., CRAIG, FRANKLIN, and STORY. A few years later, 1885—1886, F. N. COLE gave a public course of twenty lectures, on the same subject, in the Lowell Free Lecture Courses at the Massachusetts Institute of Technology. This course was followed by about thirty listeners. In 1889 O. BOLZA, at the suggestion of SIMON NEWCOMB, gave a course of twenty lectures entitled "Theory of substitutions" at Johns Hopkins University and the following year he announced a course on the "Theory of substitutions and its applications to algebraic equations" in Clark University.

The year 1892, ten years after SYLVESTER gave his first course on the theory of substitutions, is especially significant in extending in America an interest in the subject under consideration. During this year F. N. COLE published at Ann Arbor, Michigan, an English translation of NETTO's *Substitutionentheorie* together with some additions by the author. Chicago University opened its doors during the same year and its first Annual Register 1892—1893 announces two courses on group theory; viz., one

1) BURNSIDE, Proceedings of the London mathem. soc. 1., 1904, p. 388.

2) Tenth Annual Report of the President of Johns Hopkins University, 1885, p. 49.

by BOLZA entitled "Theory of substitutions and its application to algebraic equations", and the other by MASCHKE, entitled "Finite groups of linear substitutions". The following Annual Register of Chicago University announces an additional course on this subject by MOORE. This course had the abstract title "Groups", and it was announced that it had contact with the theory of numbers as well as with the theory of substitutions.

Another very significant factor in developing a wide interest in America as regards the subject under consideration was KLEIN's presence as Imperial Commissioner of Germany to attend the World's Congress in connection with the World's Columbian Exposition, held at Chicago in 1893. Both during the meetings of the mathematical section of this Congress and especially during the Evanston Colloquium which followed them, KLEIN was very active in disseminating modern mathematical concepts. Among these, the theory of groups occupied a prominent place; and the mathematicians from various parts of the country, who attending these meetings and the colloquium, carried to the leading universities of the land a high appreciation of the importance of this subject.

The subject seemed to be well adapted to the virgin American mathematical soil, especially in the didactic form of the NETTO-COLE *Theory of substitutions*. It was simple and made comparatively little demand as regards other mathematical subjects, and yet it was novel and offered innumerable openings for the investigator. Hence it soon became a favorite subject for doctor's theses. The first American thesis which was entirely devoted to this subject is the one by J. W. A. YOUNG entitled *On the determination of groups whose order is a power of a prime*, published in the American journal of mathematics in 1893, but earlier theses employed the subject fairly extensively. Among these the one by F. N. COLE entitled *A contribution to the theory of the general equation of the sixth degree*, published in the American journal of mathematics in 1886, deserves especial mention.

With a host of young instructors who were better prepared to teach the theory of groups than any other advanced subject, while their seniors in the department were generally not prepared to teach any modern mathematical subject, it is not difficult to see why the theory of groups gained ground so rapidly in the American universities. SYLVESTER, KLEIN, and many young men trained abroad had succeeded in creating a general feeling that a respectable mathematical department of a large university must offer research courses. As many of the older mathematicians were honest enough to acknowledge their inability to offer courses leading up to important problems of research, they naturally encouraged the younger men of the department to offer all the advanced courses. This accounts

for the rapid transition and also for the relatively undue emphasis on a few subjects.

The desirability of a broader and saner mathematical development was soon recognized by several of the leading mathematicians. Their program did not call for less interest in group theory, but rather for more interest in the many other subjects which offer equally attractive fields for research. While this greater diversity of interests makes it still more difficult for a large number mathematicians to understand each other at the meetings, it will doubtless contribute to the improvement of the whole mathematical output and to a more harmonious development of the entire subject. The present situation in America is one looking towards a wider range of mathematical work, especially with a view to applications; and the rapidly increasing number of workers make it possible to maintain and even to increase the general interest in the theory of groups, as is implied by the large number of courses on this subject in the various American universities. In fact, "all the leading universities offer regular courses in the theory of groups of finite order, with the exception of Harvard, where a course is given on the GALOIS theory of equations".¹⁾

1) BURNSIDE, Proceedings of the London mathem. soc. 7, 1909, p. 2. For details as regards the development of various theorems the reader should consult the three reports on recent progress in the theory of groups of finite order (G. A. MILLER, Bulletin of the Americ. mathem. soc. 5, 1899, p. 227; 9, 1902, p. 106; 14, 1908, p. 78 and 124), and the report on recent progress in the theorie of linear groups (L. E. DICKSON, Ibid. 6, 1899, p. 13). Many of the facts as regards the early teaching of group theory, stated above, are due to the kindness of correspondents, and I desire to express hereby my cordial thanks for their willingness to look up records as regards their own work or the work of local institutions.

Giovanni Schiaparelli¹⁾ quale storico dell' antica astronomia.

Di GINO LORIA a Genova.

I.

Il 19 febbrajo 1873 in tutto il mondo civile venne solennemente ricordata la quarta ricorrenza centenaria della nascita di NICOLÒ COPERNICO. Fra tutte le nazioni si distinsero, nel rievocare il ricordo delle alte benemeritenze del creatore della moderna astronomia, la Polonia, che gli diede i natali, e l'Italia, che lo vide, giovinetto pensoso, fra i discepoli di due fra i suoi maggiori atenei: non solo Padova e Bologna, sedi di tali istituti, quella per bocca di GIOVANNI LORENZONI, questa per opera di EUGENIO BELTRAMI, ne fecero rifulgere in tutta la sua grandezza la gloriosa figura; ma anche Milano non volle lasciar trascorrere inosservata una data così memorabile. Oratore di circostanza fu GIOVANNI SCHIAPARELLI. Lo designavano a tale ufficio, non soltanto la carica di Direttore dell' Osservatorio di Brera, che egli occupava da undici anni, ma anche il fatto che, sin dal 1865, egli erasi rivelato per acuto e diligente investigatore dell' evoluzione storica dell' astronomia, leggendo all' Istituto Lombardo un lavoro (primo di una serie di *Studj cosmologici*)²⁾ intorno alle opinioni ed alle ricerche degli antichi sulle distanze e sulle grandezze dei corpi celesti e sopra le loro idee riguardo all' estensione dell' universo visibile.

1) Nato a Savigliano (Provincia di Cuneo) il 14 Marzo 1835; morto a Milano il 4 Luglio 1910. Chi desidera conoscere con precisione la vita e le opere del grande astronomo sino all' anno 1900, ricorra all' importante pubblicazione giubilare intitolata *All' astronomo G. V. SCHIAPARELLI — Omaggio — 30 Giugno 1860 — 30 Giugno 1900*, dovuta al lavoro concorde di tutti i cultori dell' astronomia esistenti in Italia. Ci sia lecito esprimere il voto che ad essa venga fatta un' addizione relativa all' ultimo decennio della vita del sommo scienziato; così saranno adunati tutti gli elementi per una sua completa biografia.

2) *Opinioni e ricerche degli antichi sulle distanze e sulle grandezze dei corpi celesti. Loro idee sull' estensione dell' universo visibile. Memoria letta all' Istituto Lombardo nell' adunanza del 18 maggio 1865* (Mem. dell' Ist. Lombardo; Classe di scienze mat. e nat. 10, 1867). Un sunto di essa si legge nei Rendiconti di quell' Istituto 2, 1865, p. 173—175. — Va notato che alla serie degli *Studj cosmologici* appartiene una posteriore memoria, che però non è d' indole storica (Mem. dell' Ist. Lombardo 10:2, 1873).

Questa dotta e profonda memoria aveva mostrato a tutti come colui che, studiando le proprietà aritmetiche delle trasformazioni geometriche¹⁾ aveva fatto intuire quel mezzo per studiare geometricamente la teoria dei numeri che trent' anni dopo, nelle mani del compianto MINKOWSKI, doveva subire una radicale trasformazione e raggiungere una straordinaria potenza, e che, scoprendo il pianeta Esperia, erasi palesato in grado di aumentare notevolmente le nostre nozioni sopra gli abitatori del cielo, disponeva eziandio di tutte le qualità che sono necessarie per fare un ottimo storico della scienza: infaticabile diligenza nello studio diretto delle fonti, vasta e solida cultura letteraria e scientifica, acutezza e serenità di giudizio ed infine uno stile lucido e serrato, in cui il fren dell' arte impedisce che l'entusiasmo dello scienziato ottenebri quella fredda serenità di giudizio che può ben dirsi la Musa tutelare del vero storico.

II.

Sono queste le doti che in grado eminente si ritrovano in tutti gli scritti storici del più grande astronomo che l'Italia abbia prodotto nella seconda metà del Secolo XIX. In particolare si notano in quello che, come dicemmo, egli lesse all' Istituto Lombardo addì 20 febbrajo 1873 in occasione del quattrocentesimo anniversario della nascita di COPERNICO.²⁾ „Ho scelto di narrarvi“ (disse egli esordendo) „per quali difficili e recondite vie, negli aurei secoli dell' antica coltura greca, l'ingegno umano tentò di avvicinarsi alla cognizione del vero sistema del mondo; e per quali ostacoli la potenza speculativa degli Elleni, dopo di aver raggiunto il concetto fondamentale di COPERNICO, non ha potuto tramandare ai nipoti, invece d'un monumento durevole, altro che un debole eco di sì ardito pensiero. Rammentando questi tentativi degli antichi padri della scienza sulla via da COPERNICO percorsa, e mostrando le difficoltà che in essa incontrarono, si renderà maggior onore a Lui, che seppe vincerle colla sola forza del proprio ingegno.“ Fedele a tale programma egli passa in rivista anzitutto gli scritti che serbarono notizia delle concezioni cosmologiche dei Pitagorici (in particolare di FILOLAO ed ICETA), a cui devesi la nozione del moto rotatorio diurno della terra; si volge quindi a delineare le varie fasi per cui passò PLATONE ne' suoi studi sopra la meccanica celeste, per notare poi

1) *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica* (Mem. della R. Acc. delle scienze di Torino 21, 1862).

2) *I precursori di COPERNICO nell' antichità. Ricerche storiche lette all' Istituto lombardo nell' adunanza del 20 febbrajo 1873 in occasione del 400° anniversario della nascita di COPERNICO* (Mem. dell' Ist. Lombardo 12, 1873). Tradotta in tedesco col seguente titolo: *Die Vorläufer des COPERNICUS im Alterthum. Historische Untersuchungen von G. V. SCHIAPARELLI, unter Mitwirkung des Verfassers in's Deutsche übertragen von MAXIMILIAN CURTZE* (Altpreußische Monatsschrift 18, 1876).

come ERACLIDE Pontico abbia mosso il primo passo verso il sistema eliocentrico, quando per spiegare le apparenze di Venere e di Mercurio, propose di considerare il Sole come centro dei loro movimenti; il passo seguente, veramente decisivo, verso il sistema copernicano, cioè la proposta di considerare il Sole come centro dei movimenti di tutto il nostro sistema planetario, fu pure compiuto dai Greci, per merito di un ignoto contemporaneo di ALESSANDRO Magno; tale ardita concezione venne tosto accettata da ARISTARCO Samio e SELEUCO Caldeo; ma, sgraziatamente, l'invenzione degli epicicli, avvenuta poco dopo e sanzionata dall'imponente autorità d'un APOLLONIO Pergeo e di un IPPARCO, soffocò sul nascere quel germe fecondissimo, ne impedì lo sviluppo ulteriore durante un grande numero di secoli e lo fece cadere in una dimenticanza che non sarà mai abbastanza deplorata. A complemento di tale quadro lo SCHIAPARELLI esamina quanto si fece, si seppe, si congetturò sulle rive del Gange, senza però riuscire a scoprire nelle antiche opere Indiane alcuna idea che non fosse il riflesso del pensiero greco.

III.

Un naturale proseguimento, o meglio un indispensabile complemento, all'Orazione copernicana dello SCHIAPARELLI, è una memoria ancor più originale ed importante che egli lesse all'Istituto Lombardo il 24 Novembre 1874 e con cui egli volle e seppe compiere una riabilitazione completa ed inoppugnabile di EUDOSSO da Cnido come astronomo.¹⁾ Per una ingiustizia di tutti gli storici dell'astronomia (l'IDELER eccettuato) questo grande scienziato era stato oggetto di scherno e di risa; fenomeno questo che trova probabilmente la sua spiegazione in alcune sagge parole del FRÉRET, che lo SCHIAPARELLI scelse come epigrafe al suo terzo lavoro storico e che a noi piace di quì riferire: „Par quelle bizzarrerie le progrès que nous avons fait dans les mathématiques et dans certaines parties de la physique a-t-il inspiré à nos philosophes un mépris pour l'histoire des anciennes opinions, qui leur fait croire, que ces hommes et ces nations, qui se sont rendus célèbres dans l'antiquité, on été plongés dans les ténèbres philosophiques les plus épaisses?“ A sentimenti diametralmente differenti da quelli che animavano i suoi predecessori ispiravasi lo SCHIAPARELLI, il quale scrisse le seguenti parole che dovrebbero costituire il „credo“ di qualunque storico della storia antica: „Nel prendere a meditare su quei monumenti dell'antico sapere, ispiriamoci, . . . , a quel rispetto ed a quella venerazione che si devono avere per coloro, che, precedendoci in un'ardua strada, ne hanno

1) *Le sfere omocentriche di EUDOSSO, di CALIPPO e di ARISTOTELE. Memoria letta all'Istituto lombardo nell'adunanza del 26 novembre 1874 (Mem. dell'Ist. Lombardo 18, 1877).*

a noi aperto ed agevolato il cammino. Con questi sentimenti impressi nell' animo ben ci avverrà d' incontrare osservazioni imperfette e speculazioni lontane dalla verità come oggi è conosciuta; ma non troveremo mai nulla nè di assurdo, nè di ridicolo, nè di ripugnante alle regole del sano ragionare. Se oggi noi, tardi nipoti di quegli illustri maestri, profittando dei loro errori e delle loro scoperte, e salendo in cima dell' edificio da loro elevato, siamo riusciti ad abbracciare collo sguardo un più vasto orizzonte, stolta superbia nostra sarebbe il credere per questo d'aver noi la vista più lunga e più acuta della loro. Tutto il nostro merito sta nell' esser venuti al mondo più tardi."

Se volessimo esporre per intero il contenuto della splendida memoria che il Nostro dedicò ad Eudosso (e che a noi sembra il capolavoro de' suoi scritti storici) dovremo seguirlo quando traccia le origini del problema astronomico-geometrico che fu stimolo alle ricerche del matematico da Cnido, quando espone le eleganti considerazioni di pura geometria formanti il nerbo della divinazione da lui concepita per la costruzione eudossiana e quando aduna e coordina tutte le testimonianze sparse nelle opere lasciateci in eredità dall' antichità classica per stabilire la grande verosimiglianza della sua geniale ricostruzione. Ma ciò ne trarrebbe ad oltrepassare i limiti imposti al presente scritto, senza far dividere al lettore quel piacere che lo SCHIAPARELLI dichiara di aver provato in tali indagini e che tutto pervade chi ne segue le serrate argomentazioni; le quali ebbero e tuttora hanno il potere di trasfondere nel lettore la convinzione che il sistema delle sfere omocentriche di Eudosso è un vero miracolo di simmetria e di sottile speculazione geometrica. D'altronde il riprodurre oggi una nuova volta le idee dello SCHIAPARELLI (al cui trionfo giovò indubbiamente un' ottima versione tedesca¹⁾) sembra ormai superfluo, dopo che esse furono da tutti accettate²⁾; e così l'illustre astronomo ha il vanto di aver fatto scomparire dalla storia della scienza la stridente contraddizione che esisteva pel fatto che il grande geometra, a cui siam debitori della sostanza del V Libro di EUCLIDE e di molti fondamentali teoremi della classica stereometria, fosse quell' infelice astronomo che ci dipinsero BAILLY, MONTUCLA e DELAMBRE.

IV.

Quattordici anni dovevano passare prima che il sommo astronomo desse qualche nuova *pubblica* manifestazione delle sue elucubrazioni intorno

1) *Die homocentrischen Sphären des EUDOXUS, des KALIPPUS und des ARISTOTELES. Mémoire, gelesen im lombardischen Institut zu Mailand am 26. November 1874 von G. V. SCHIAPARELLI, ins Deutsche übersetzt von W. HORN* (Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 1, 1877).

2) A mostrar ciò basti citare i nomi di P. TANNERY, T. H. MARTIN e H. KÜNNSSBERG; cfr. G. LORIA, *Le scienze esatte nell' antica Grecia*, Libro III, Modena 1900, n. 13—17.

alla evoluzione storica dell' antica astronomia; anni di intenso lavoro scientifico in cui egli fu assorbito da molteplici e gravi incarichi ufficiali, dalla pubblicazione del carteggio ORIANI-PIAZZI e delle osservazioni fatte da ETTORE DEMBOWSKI, dal riordinamento dell' Osservatorio di cui era a capo e dalle assidue osservazioni intorno alle stelle doppie, Marte, Venere, Mercurio ed Urano, che valsero a collocarlo in prima linea fra gli astronomi di tutto il mondo.

Ma se in questo periodo della sua vita egli non ebbe il tempo per coltivare con le proprie mani la storia della scienza, manifestò l'intenso interesse che per essa provava sempre pubblicando recensioni ed annunci d'importanti pubblicazioni del genere¹⁾ e promovendo quell' edizione definitiva di ALBATEGNO che è imperituro titolo di benemerita per C. A. NALLINO.

Non senza intenzione scrivemmo che durante il suindicato intervallo di tempo lo SCHIAPARELLI non si occupò *pubblicamente* della storia dell'astronomia; chè gli scritti da lui dati in luce nel 1898 porgono una prova irrefragabile che, anche allora, egli non ha mai cessato di meditare sopra tale soggetto e mai ha perduto di vista lo scopo che egli era proposto, cioè di mettere in chiaro le varie fasi di sviluppo delle conoscenze dei Greci sopra la geometria e la meccanica del cielo, adoperando tutti i mezzi offerti, non soltanto dalla critica storica e filologica, ma anche di „un' altra critica non meno necessaria, di cui l'abito si può acquistare soltanto colla diuturna e meditata osservazione di quegli stessi fenomeni, che agli antichi sapienti servirono già a stabilire le loro ipotesi astronomiche“; ora chi mai, meglio dell' astronomo di Brera, conosceva la struttura ed il maneggio di questo mirabile strumento d'indagine storica? Ed egli, pur senza trascurare lo studio microscopico dei testi, se ne servì per dimostrare²⁾ — a complemento delle sue indagini intorno alla cosmologia dei Greci — che questi eran giunti per conto loro ai sistemi astronomici che portano il nome di Ticone Brahe e Copernico ed a trovare una plausibile spiegazione dello strano fenomeno che il grandioso concetto, base della moderna astronomia, non abbia trovato sotto il cielo dell' Ellade terra ed aria propizie a porre salde e profonde radici, sicchè appena annunziato scompare. A tal fine egli prese le mosse dallo studio dell' opera scientifica di ERACLIDE Pontico, investigò, tanto dal punto di vista dottrinale quanto storicamente, il celebre sistema degli epicicli e degli eccentrici ed esaminò a fondo il sistema eliocentrico, vuoi come ipotesi geometrica possibile vuoi

1) *Cenno dei recenti studi del dott. CANTOR sulla storia dell' agrimensura* (Rend. dell' Ist. Lombardo 9., 1876); *Intorno alcune lettere inedite di LAGRANGE ad EULERO, recentemente pubblicate da S. E. il Principe BONCOMPAGNI* (Id. 10., 1877).

2) *Origine del sistema planetario eliocentrico presso i Greci* (Mem. dell' Ist. Lombardo 18, 1898).

come ipotesi fisica probabile. Da ciò egli trasse questa „conseguenza singolare, ma pur vera: che se i matematici greci, colle loro forme astratte di movimento per eccentrici ed ep cicli intorno a punti ideali non fossero intervenuti nella questione e l'avessero lasciata alla pura speculazione dei fisici, i Greci non avrebbero avuto da scegliere, che fra l'ipotesi di Ticone e quella di COPERNICO, o se si vuole, fra quella di ERACLIDE e quella di ARISTARCO; e quindi più presto sarebbero giunti alla verità . . . Cessa così la meraviglia, che in noi destava il fenomeno in apparenza inesplicabile del regresso avvenuto dopo ARISTARCO nelle idee dei Greci sul sistema del mondo. Le idee di ARISTARCO vissero ancora per qualche tempo in discepoli oggi ignoti; e quantunque il suo nome fosse in tutta l'antichità celebratissimo, le sue dottrine furono ricordate soltanto come opinioni bizzarre e singolari, facili ad essere confutate con argomenti allora in apparenza invincibili, e di cui soltanto diciannove secoli dopo si cominciò ad apprezzare giustamente la totale insufficienza“.¹⁾

Di questo importante lavoro lo SCHIAPARELLI diede preliminare notizia nel *Bullettino della Società per la diffusione e l'incoraggiamento degli studi classici*²⁾, assicurando per tal modo alle proprio idee più vasta sfera d'influenza. Ma non si può non lamentare che a lui siano mancato tempo ed agio per comporre in un tutto organico le sue profonde ricerche sopra l'astronomia greca; sepolte (sia ciò detto senz' alcuna intenzione di offesa per la benemerita Accademia avente la propria sede nel cuore della regione ove io pure son nato!) come sono nei monumentali, ma clandestini volumi delle Memorie dell'Istituto Lombardo, i loro risultati non conseguirono la notorietà nè esercitarono il benefico influsso che se ne poteva ragionevolmente attendere; se, come è da augurare, i numerosi e valenti discepoli ed ammiratori del sommo astronomo si faranno iniziatori di un' Edizione completa delle sue opere, si assicureranno un considerevole titolo di benemerenza, preparando a tali ricerche un nuovo periodo di florida giovinezza.

V.

A quella desiderata opera d'insieme egli avrebbe forse volta la mente ove la luce, che proveniva o desideravasi giungesse dall' Oriente, non lo

1) Ci sia lecito di notare con P. DUHEM (*Un précurseur français de COPERNIC: NICOLE ORESME*, in *Revue générale des sciences* del 15 Novembre 1909) che il ritorno alle idee eliocentriche fu fatto, prima dell' immortale polacco, da un prelado francese, le cui fatiche vennero compensate con un vescovato; l'epoca galileiana era tuttora lontana!

2) Veggasi il bellissimo articolo *Come i Greci arrivarono al primo concetto del sistema planetario eliocentrico detto oggi COPERNICANO* (Atene e Roma, Anno 1, N. 2. Marzo — Aprile 1908).

avesse attratto irresistibilmente, assorbendone tutte le forze per un intero decennio, quello con cui si chiuse la sua gloriosa carriera.¹⁾

La messe da lui raccolta nel primo dei nuovi campi di cui imprese la cultura, lo studio, cioè, delle nozioni astronomiche sparse nella Sacra Scrittura²⁾, non fu così abbondante e brillante quanto quella che compensò le fatiche da lui spese attorno alla letteratura astronomica dei Greci. Tuttavia essi sono meritevoli della più alta considerazione quando si tenga presente la scarsità dei documenti superstiti e si misurino esattamente le enormi difficoltà che s'incontrano nell'interpretare e nello spremere il succo da uno scritto, qual è la Bibbia, che, sotto un solo nome ed in un solo volume, comprende molti scritti di epoche l'una dall'altra separate da lunghi intervalli di tempo. Nè è da nascondere come egli non si facesse illusioni in proposito, ben sapendo che „al popolo Ebreo non toccò in sorte la gloria di creare i principii delle scienze, e nemmeno quella di levare ad alto grado l'esercizio delle belle arti: l'una e l'altra delle quali cose fu grande ed imperitura lode del popolo Greco“. Ciò non ostante egli giudicò prezzo dell'opera lo studiare da astronomo gli antichi Libri Sacri ritenendo „che nulla ci può essere indifferente nella vita di questo popolo straordinario «(il popolo ebreo)», del quale l'importanza storica non fu certamente per noi inferiore a quella dei Greci e dei Romani“. A tale studio egli si accinse con l'animo baldanzoso di chi, pieno di coraggio e di fede, si avventura in una terra ancor vergine, chè tale poteva ben dirsi l'astronomia ebraica, dal momento che essa non era stata giudicata degna di considerazione nè dal BAILLY, tutto infervorato nel suo sogno intorno ad un popolo ipotetico che tutto ci ha insegnato all'infuori del suo nome e della sua esistenza³⁾, nè del DELAMBRE, pel quale era indiscutibile postulato che gli è soltanto presso i Greci che deve cercarsi l'origine ed i monumenti di una scienza che essi hanno creato e che essi soli erano in grado di creare⁴⁾, e nemmeno fra gli storici moderni quali R. WOLF ed A. BERRY.

Ora per ricostruire la cosmologia di un popolo che ci ha tramandate soltanto incidentali notizie intorno alle proprie idee sopra la struttura del mondo, fa d'uopo investigarne la vita intima in tutte le sue manifestazioni religiose, civili, letterarie e, possibilmente, scientifiche; onde lo SCHIAPARELLI, non solo si procurò completa familiarità con gli antichi testi, ma si assimilò tutta la vasta letteratura avente per protagonista il Popolo Eletto, porgendo così un prezioso argomento a favore della tesi che è

1) A tali studi egli si preparò studiando a fondo la lingua degli Ebrei e la scrittura degli Assiri e dei Babilonesi.

2) *L'astronomia nell' Antico Testamento* Manuale Hoepli N. 332 (Milano 1903).

3) Così si esprime D'ALEMBERT in una lettera a VOLTAIRE.

4) *Histoire de l'astronomie ancienne* (Paris 1817), p. IX.

vano sperare di penetrare nelle più riposte latebre del pensiero scientifico di un popolo se non si conoscono tutte le condizioni nelle quali esso si è manifestato e svolto. Per esporre con ordine quanto gli Ebrei sapevano di astronomia, lo SCHIAPARELLI, con piena ragione, distingue ciò che è puramente teorico (ed a ciò consacra i Capitoli II, III, IV e V del suo bel volumetto) da quanto concerne le applicazioni di quella scienza alla cronologia ed alle pratiche religiose (Capitoli VI, VII e VIII).

La prima parte si apre con un Capitolo d'ordine generale ove l'illustre Autore insegna il concetto complessivo che gli Ebrei eransi formati del mondo in cui vivevano, compendiando ed esprimendo lucidamente tale concetto con una curiosa figura schematica, assai espressiva. Segue un riassunto delle loro nozioni intorno al Sole, alla Luna ed a gli altri corpi costituenti la „milizia celeste“; da ciò il Nostro è condotto a paragonare la superstizione imperante fra gli Assiri ed i Babilonesi con l'attitudine schiettamente anti-astrologica assunta sempre dal popolo d'Israele, osserva essere „non piccolo onore per questa nazione di avere saputo vedere l'inermità di quella e tutte le altre specie di divinazione“ e si chiede: „di quale altra fra le nazioni civili si può dire altrettanto?“ Quali gruppi di stelle abbiano attratta l'attenzione degli Ebrei si apprende dal Capitolo dell' opera in discorso che appunto s'intitola *Le costellazioni*¹⁾; sgraziatamente le notizie attendibili e chiare sopra l'uranografia degli Ebrei date dalla Bibbia sono estremamente scarse, sicchè, malgrado l'acume esegetico ed il sapere astronomico spiegati dallo SCHIAPARELLI, non gli riuscì di scoprire che la designazione sicura di sei costellazioni, che egli identifica con quelle oggi designate così: Orsa Maggiore, Orsa Minore, Hyadi con Aldebarano, Orione, Plejadi e i così detti penetrati dell' Austro. A tali spinose questioni si connette quella spinosissima di determinare il significato da attribuirsi alla biblica parola Mazzaroth o Mazzaloth; fra le numerose interpretazioni, che vennero proposte e che il Nostro espone e discute, dopo maturo esame, egli propone di eleggere quella secondo cui con quel nome designerebbesi il pianeta „che ad amar conforta“; ed appunto la desinenza plurale di quella parola sarebbe stata scelta per ricordare quella doppia apparenza di Venere, che si esprime in Occidente mediante i due nomi di Espero e Lucifero, con cui si chiama quell' astro secondochè lo si considera di sera o al mattino.

La seconda parte del volume che percorriamo è consacrato ai metodi per computare e dividere il tempo adottati dagli antichi Ebrei; cioè a far conoscere donde facevasi cominciare il giorno e quali parti distinguevansi

1) Maggiori sviluppi intorno ad una questione relativa alle costellazioni note agli Ebrei si trovano nell' articolo dello SCHIAPARELLI *Interpretazione astronomica di due passi del libro di GIOBBE*, inserito nel vol. 4 della Rivista di fisica, matematica e scienze naturali (Pavia 1903).

in esso, come si eseguiva la divisione in mesi ed in anni ed infine a mostrare in che cosa consistevano i celebri periodi settennari, che esercitarono una così decisiva influenza sopra tutta la vita sociale di quell' antico popolo. Da questi brevi cenni emerge che, se la I parte del volume discorso sarà consultata con interesse e profitto dagli astronomi, gli storici, pei quali la cronologia è un inapprezzabile ausiliare, non possono lasciare inosservata la II.

Ancora più che in Italia — ove gli studi biblici trovano scarsi cultori e pubblico indifferente — questo volume dello SCHIAPARELLI ottenne festosissime accoglienze in Germania ed in Inghilterra, ove gli studiosi di storia delle religioni sono legione: ne sono inconfutabili attestazioni due traduzioni che ne furon fatte¹⁾ (ed a cui l'Autore collaborò con la stessa diligenza spiegata nelle analoghe contingenze di più antica data) e la circostanza che, nel breve giro di pochi anni, della versione inglese si fa già sentire il bisogno di una nuova edizione, per la quale il Nostro astronomo preparava varianti ed aggiunte, che, non v' ha dubbio, verranno pietosamente raccolte e debitamente utilizzate.

VI.

Le assidue ricerche dello SCHIAPARELLI sopra l'astronomia nell' Antico Testamento non portarono alla ricostruzione di un vero e proprio corpo di dottrina celeste; ciò era da prevedersi, perchè esse concernevano un popolo che, da un lato, concepiva l'Essere Supremo, non come autore di un codice di leggi naturali universali ed eterne, ma dotato di tale illimitato potere da essere in grado di sconvolgere a suo bell' agio l'andamento di tutti i fenomeni, e che, d'altra parte, era dominato e guidato da una casta sacerdotale che disapprovava e combatteva gli studi astronomici come minaccioso avviamento verso l'astrologia e l'astrojatria. Era questo un pericolo tutt' altro che immaginario, dati gli svariati e continui contatti che avevano luogo tra gli Ebrei ed i Babilonesi, quell' antico popolo che, sin dalle epoche più remote, teneva gli occhi costantemente rivolti al cielo, meno per lo spassionato desiderio di stabilire le leggi delle apparenze celesti, che sotto l'assillo di scoprire segni rivelatori dei futuri destini di re e di nazioni.

Ed è a questo popolo così interessante per l'alto grado di civiltà raggiunto, la cui vita va svelandosi di mano in mano che si procede negli scavi da qualche tempo iniziati nella terra bagnata dal Tigri e dall' Eufrate, che volse la propria attenzione il Nostro astronomo, giunto che fu al

1) *Die Astronomie im Alten Testament, deutsch von WILLY LÜDTKE* (Gießen, 1904); *Astronomy in the Old Testament, with many corrections and additions by the Author* (Oxford 1905).

tramonto della sua vita. Lo scienziato che tante fruttifere investigazioni aveva compiute intorno al pianeta Venere, divenuto storico volle prendere esatta notizia delle osservazioni e dei calcoli che su di esso avevano fatti i Babilonesi¹⁾ e così potè assodare come, negli ultimi anni che precedettero la distruzione di Ninive, essi avevano registrati con gran cura lo scomparire ed il ricomparire di quell' astro, ne avevano dedotto una determinazione — a dir vero abbastanza grossolana — dei periodi in cui avvengono siffatti fenomeni ed avevano compilate delle tavole mediante cui, dalla data di una scomparsa, si poteva calcolare con facilità e sicurezza sufficienti, le date dei due fenomeni successivi; tutto ciò a solo scopo di pratica astrologica; ma l'assenza di ricerche teoriche sopra il corso di quel pianeta conferma che in tali studi i Babilonesi non erano mossi dall' amore disinteressato del vero, ma soltanto dall' invincibile brama di squarciare il velo che nasconde il futuro.

Tratto così ad occuparsi del popolo, a cui una tradizione non traditrice attribuisce una spiccata attitudine per le ricerche astronomiche, lo SCHIAPARELLI non se ne staccò più e ne fece argomento delle sue due ultime pubblicazioni storiche.²⁾ Nelle quali egli descrisse le varie fasi per le quali è passata l'astronomia babilonese, presentando un quadro del massimo interesse, dal momento che la scienza celeste non presentò in antico che due sistemi, nati e cresciuti fra genti diverse, in modo originale e fino ad un certo segno indipendente, cioè il sistema Babilonese ed il sistema Greco.

Nella storia dei Babilonesi lo SCHIAPARELLI distingue due periodi, il cui punto di separazione è contrassegnato dalla catastrofe di Ninive (607 a. C.). Nel primo egli rileva i metodi che essi usavano per delineare le meridiane e per designare i punti cardinali, i procedimenti per contare e dividere il tempo, le osservazioni astronomiche compiute e le costellazioni avvertite. A proposito dell' astronomia solare egli fa l'importante osservazione che il principio motore degli scienziati babilonesi fu quello di ridurre il calcolo dei moti e dei fenomeni celesti alla formazione di progressioni aritmetiche di primo o second'ordine e talora al calcolo di progressioni geometriche. Tacendo delle osservazioni fatte sopra la Luna ed i cinque Pianeti, rileveremo collo SCHIAPARELLI, come, negli ultimi anni della potenza Assira, gli astronomi di Babilonia e di Ninive fossero in grado di predire con qualche successo le eclissi di Luna; nè manca di far cenno dell' influenza suggestiva esercitata dall' astrologia,

1) *Venus-Beobachtungen und Berechnungen der Babylonier* (Vorträge und Abhandlungen, herausgeg. von der Zeitschrift „Das Weltall“ 16, Treptow-Berlin 1906).

2) *I primordi dell' astronomia presso i Babilonesi* (Rivista di scienza 3, 1908) e *I progressi dell' astronomia presso i Babilonesi* (Id. 4, 1908).

influenza che può ben paragonarsi a quella che l'alchimia medioevale esercitò sopra la creazione della chimica moderna.¹⁾

Nel secondo stadio di sviluppo l'astronomia babilonese si è svolta parallelamente e contemporaneamente all'astronomia greca, ma non in modo del tutto indipendente; lo SCHIAPARELLI fa notare le analogie e le differenze di quei due indirizzi, porgendo un' idea sommaria, ma lucida, della dovizia di osservazioni, della originalità di concetti adombrati e dei complicati artifici di calcolo mediante cui i Babilonesi tentarono di risolvere i più importanti problemi astronomici. Egli però non si dissimula, nè tenta nascondere, l'inferiorità intellettuale di quel popolo rispetto ai Greci; e dal paragone dell' una schiatta con l'altra, egli è indotto, per uno strano ricorso, a ritornare sopra le idee cosmologiche ed i sistemi astronomici del popolo elleno, che aveva studiati, con fervido amore, agli inizi della sua carriera: onde si sarebbe tentati di ritenere che, con le ultime pagine da lui scritte, il sommo astronomo abbia inteso di chiudere il ciclo delle proprie meditazioni storiche!

Contemplando ora nel suo insieme l'opera storica di GIOVANNI SCHIAPARELLI si vede che essa abbraccia l'astronomia di tutti i popoli di più antica civiltà, esclusi soltanto i Cinesi²⁾; ed è da deplorare profondamente che egli non abbia trovato il tempo per porre nel crogiuolo della sua critica irresistibile ed impeccabile gli sbalorditivi racconti di sapere immenso ed antichissimo che ci giungono dall' estremo Oriente con ogni sorta di strabilianti particolari. Ove gli fosse stato concesso di farlo, sarebbe riuscita completa la raccolta degli ingredienti per una "Storia dell' antica Astronomia", veramente corrispondente allo stato odierno delle nostre cognizioni sull' argomento. Ma se anche, sciaguratamente, la sua mano vigorosa cadde stanca prima di avere scritta la parola fine a tale opera importantissima, a Lui resta la gloria imperitura di avere spianata la via che guida a questa splendida mèta e di avere lasciati dei modelli di critica storica, la cui perfezione, di sostanza e di forma, forse potrà venire ancora raggiunta, ma superata mai.

Chamonix (Alta Savoia), Agosto 1910.

1) Per porgere un' idea dell' importanza che i Babilonesi attribuivano all' influsso degli astri basti dire che, presso di essi, veniva punito col taglio di entrambe le mani quel chirurgo che avesse operato, senza prima propiziarsi le stelle, con apposita invocazione; cfr. S. GÜNTHER, *Geschichte der Naturwissenschaften* (Leipzig, Reclam 1909), p. 10.

2) Degli Egiziani il nostro si occupò incidentalmente nel corso de' suoi studi sul periodo greco-alessandrino e degli Indiani nei suoi due primi lavori storici; al lettore desideroso di più minuti ragguagli intorno all' astronomia indiana va consigliato la monografia di G. THIBAUT, *Astronomie, Astrologie und Mathematik* che fa parte del *Grundriß der Indo-arischen Philologie und Altertumskunde* (Straßburg 1899).

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage¹⁾ von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“.

BM = Bibliotheca Mathematica.

1^s: 12, 15, 22, siehe BM **8**, 1907/8, S. 61. — **1^s: 33**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 307. — **1^s: 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 61—64. — **1^s: 163—165**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 64, 173—174. — **1^s: 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 64—65. — **1^s: 198, 201**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 237. — **1^s: 202**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 307—309. — **1^s: 203**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 65, 309. — **1^s: 206**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 237—238. — **1^s: 213, 225, 236**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 65.

1^s: 244. Da Herr CANTOR hier die Art, wie man vor APOLLONIOS die drei Kegelschnitte hervorbrachte, erwähnt, benutze ich die Gelegenheit, um zu bemerken, daß man meiner Meinung nach keinen Grund hat, diese Hervorbringung als die einzige vor APOLLONIOS angewandte zu betrachten, wie gewöhnlich mehr oder weniger ausdrücklich behauptet wird (siehe besonders J. L. HEIBERG, *Die Kenntnisse des ARCHIMEDES über die Kegelschnitte*; Zeitschr. für Mathem. **25**, 1880, Hist. Abt. S. 43). Von den drei Stellen, die als Belege für die Behauptung zitiert werden, besagen ja zwei (siehe *PAPPI Collectionis quae supersunt*, ed. F. HULTSCH **2**, Berlin 1877, S. 672; *ARCHIMEDIS Opera omnia*, ed. J. L. HEIBERG **3**, Leipzig 1881, S. 154) nur, daß die älteren griechischen Mathematiker die drei Kegelschnitte bzw. spitzwinkligen, rechtwinkligen und stumpfwinkligen Kegelschnitt nannten. Nicht einmal die dritte Stelle (*APOLLONII Quae graece exstant*, ed. J. L. HEIBERG **2**, Leipzig 1893, S. 168—170) ist entscheidend, auch wenn man zugibt, daß GEMINUS in der Lage gewesen war, sich zuverlässige Auskunft über die Frage zu verschaffen. Der von EUTOXIOS zitierte Ausspruch des GEMINUS kann nämlich meiner Ansicht nach sehr wohl dahin gedeutet werden, daß „die Alten“ bei der Behandlung der Theorie der Kegelschnitte von einer gewissen Art der Hervorbringung ausgingen, die also als Definition benutzt wurde; die Frage, ob sie auch andere Weisen, die Kegelschnitte hervorzubringen, kannten, hatte GEMINUS keinen bestimmten Anlaß zu berühren. Nun wissen wir ja aus der bekannten Stelle der „Phainomena“ des EUKLIDES, die Herr CANTOR S. 292 zitiert, daß jener nicht immer, um einen Kegelschnitt zu bekommen, die schneidende Ebene senkrecht auf eine Seitenlinie des Kegels legte. Diese Stelle bestätigt also die Richtigkeit meiner Deutung des Ausspruches des GEMINUS. G. ENESTRÖM.

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

1^s: 245, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 65. — **1^s: 252**, siehe BM **10₃**, 1909/10, S. 164.
 — **1^s: 257**, siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 139. — **1^s: 270, 287, 297**, siehe BM **S₃**,
 1907/8, S. 66. — **1^s: 298**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 66; **10₃**, 1909/10, S. 53—54. —
1^s: 310, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 66. — **1^s: 335, 339—340, 344, 348**, siehe BM **S₃**,
 1907/8, S. 174—176. — **1^s: 351**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 66. — **1^s: 365, 368**, siehe
 BM **S₃**, 1907/8, S. 177. — **1^s: 372**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 411—412; **9₃**, 1908/9,
 S. 238. — **1^s: 374, 376**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 412—418. — **1^s: 380**, siehe
 BM **S₃**, 1907/8, S. 66—67. — **1^s: 383—384**, siehe BM **10₃**, 1909/10, S. 164—165. —
1^s: 388, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 177. — **1^s: 394**, siehe BM **10₃**, 1909/10, S. 165. —
1^s: 401—402, siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 239. — **1^s: 406, 409**, siehe BM **S₃**, 1907/8,
 S. 177—178. — **1^s: 409**, siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 239. — **1^s: 410**, siehe BM **S₃**, 1907/8,
 S. 178. — **1^s: 429**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 67. — **1^s: 431**, siehe BM **S₃**, 1907/8,
 S. 67; **9₃**, 1908/9, S. 139—140. — **1^s: 432**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 67, 178—179.
 — **1^s: 433**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 179. — **1^s: 447, 448**, siehe BM **9₃**, 1908/9,
 S. 239—240. — **1^s: 452**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 179. — **1^s: 459**, siehe BM **S₃**,
 1907/8, S. 309—310. — **1^s: 464**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 179. — **1^s: 470**, siehe
 BM **S₃**, 1907/8, S. 311. — **1^s: 471**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 413. — **1^s: 476**, siehe
 BM **9₃**, 1908, S. 71—72. — **1^s: 488**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 67. — **1^s: 498**, siehe
 BM **S₃**, 1907/8, S. 180. — **1^s: 500**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 67; **9₃**, 1908/9, S. 321—322. —
1^s: 502, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 67. — **1^s: 503—504**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 180—
 181; **9₃**, 1908/9, S. 240—241. — **1^s: 509, 510**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 67. — **1^s: 512**,
 siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 140—141. — **1^s: 513, 515, 528, 545**, siehe BM **S₃**, 1907/8,
 S. 68—69. — **1^s: 551**, siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 141—142. — **1^s: 556**, siehe BM **10₃**,
 1909/10, S. 54. — **1^s: 563—564**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 69. — **1^s: 567**, siehe BM **9₃**,
 1908/9, S. 241. — **1^s: 576**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 69—70, 181; **9₃**, 1908/9, S. 142. —
1^s: 580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 70. — **1^s: 706**, siehe
 BM **S₃**, 1907/8, S. 70, 181. — **1^s: 710**, siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 241. — **1^s: 713**, siehe
 BM **S₃**, 1907/8, S. 70. — **1^s: 715**, siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 241. — **1^s: 715—716**,
 siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 70—71, 181. — **1^s: 717**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 71, 182—
 183. — **1^s: 718**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 71; **9₃**, 1908/9, S. 242. — **1^s: 719**, siehe
 BM **S₃**, 1907/8, S. 183—184. — **1^s: 720**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 71. — **1^s: 730**,
 siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 71, 184—185. — **1^s: 734**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 71. —
1^s: 736, siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 242. — **1^s: 736—737**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 71
 — 72, 185. — **1^s: 738**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 72. — **1^s: 742**, siehe BM **9₃**, 1908/9,
 S. 242. — **1^s: 743, 748, 750**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 72. — **1^s: 763**, siehe BM **9₃**,
 1908/9, S. 242. — **1^s: 764**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 185. — **1^s: 766**, siehe BM **9₃**,
 1908/9, S. 143. — **1^s: 770**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 185. — **1^s: 771**, siehe BM **9₃**,
 1908/9, S. 143. — **1^s: 779**, siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 243. — **1^s: 780, 781**, siehe
 BM **S₃**, 1907/8, S. 72. — **1^s: 792**, siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 143—144. — **1^s: 794**,
 siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 72. — **1^s: 795**, siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 243. — **1^s: 798**,
 siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 144. — **1^s: 800**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 73; **9₃**, 1908/9,
 S. 144—145. — **1^s: 801**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 185—186; **9₃**, 1908/9, S. 145. —
1^s: 802, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 73, 186—187, 414—415. — **1^s: 805—806**, siehe
 BM **S₃**, 1907/8, S. 73. — **1^s: 809—810**, siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 243. — **1^s: 815**,
 siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 73. — **1^s: 838**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 415. — **1^s: 842**,
 siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 243. — **1^s: 854**, siehe BM **10₃**, 1909/10, S. 55. — **1^s: 855**,
 siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 73. — **1^s: 857**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 73; **9₃**, 1908/9,
 S. 243—244. — **1^s: 859, 862, 863**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 73—74. — **1^s: 867**,
 siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 74, 187. — **1^s: 869, 875—876, 877, 878**, siehe BM **S₃**,
 1907/8, S. 74—76. — **1^s: 881**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 415—416. — **1^s: 882, 889**,
893, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 77—78. — **1^s: 900**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 78, 187—
 188. — **1^s: 901**, siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 145—146; **10₃**, 1909/10, S. 261. — **1^s: 902**,
 siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 78—79. — **1^s: 906**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 79, 188—189;
9₃, 1908/9, S. 244. — **1^s: 908**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 79; **9₃**, 1908/9, S. 146—147.
 — **1^s: 909**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 79. — **1^s: 910**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 79, 416. —
1^s: 911, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 79—80.

2^s: 5, siehe BM **7₃**, 1906/7, S. 286; **S₃**, 1907/8, S. 80. — **2^s: 7**, siehe BM **2₃**,
 1901, S. 351. — **2^s: 8**, siehe BM **1₃**, 1900, S. 501; **6₃**, 1905, S. 309. — **2^s: 9**, siehe
 BM **9₃**, 1908/9, S. 147. — **2^s: 10**, siehe BM **1₃**, 1900, S. 502; **9₃**, 1908/9, S. 147—148.
 — **2^s: 11**, siehe BM **S₃**, 1907/8, S. 189. — **2^s: 14—15**, siehe BM **2₃**, 1901, S. 144;

5₃, 1904, S. 200; 6₃, 1905, S. 208—209. — 2:17, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 189. — 2:20, siehe BM 1₃, 1900, S. 502; 3₃, 1902, S. 239. — 2:25, siehe BM 1₃, 1900, S. 274; 9₃, 1908/9, S. 148. — 2:26, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 244—245. — 2:30, siehe BM 6₃, 1905, S. 105; 10₃, 1909/10, S. 166—167. — 2:31, siehe BM 2₃, 1901, S. 351—352; 3₃, 1902, S. 239—240; 6₃, 1905, S. 309—310. — 2:32, siehe BM 6₃, 1905, S. 105. — 2:34, siehe BM 2₃, 1901, S. 144; 6₃, 1905, S. 310; 8₃, 1907/8, S. 190. — 2:37, siehe BM 1₃, 1900, S. 502; 6₃, 1905, S. 105. — 2:38, siehe BM 2₃, 1901, S. 352; 9₃, 1908/9, S. 148. — 2:39, siehe BM 1₃, 1900, S. 502; 6₃, 1905, S. 209; 9₃, 1908/9, S. 245. — 2:41, siehe BM 2₃, 1901, S. 352; 8₃, 1907/8, S. 80—81; 9₃, 1908/9, S. 72—73. — 2:45, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 148—150. — 2:46, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 81. — 2:51, siehe BM 6₃, 1905, S. 106; 9₃, 1908/9, S. 150. — 2:52, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 190—191. — 2:53, siehe BM 5₃, 1904, S. 201. — 2:57, siehe BM 2₃, 1901, S. 352. — 2:59, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 207—208; 10₃, 1909/10, S. 262. — 2:59—60, siehe BM 1₃, 1900, S. 502; 6₃, 1905, S. 310—311. — 2:61, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 85—86, 208—209, 286—287; 9₃, 1908/9, S. 150. — 2:63, siehe BM 4₃, 1903, S. 206. — 2:65, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 151. — 2:67, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 209—210. — 2:70, siehe BM 1₃, 1900, S. 417. — 2:73, siehe BM 1₃, 1900, S. 502. — 2:77, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 152. — 2:82, siehe BM 1₃, 1900, S. 502. — 2:87, siehe BM 1₃, 1900, S. 502; 9₃, 1908/9, S. 323. — 2:88, siehe BM 1₃, 1900, S. 503; 6₃, 1905, S. 395. — 2:89, siehe BM 1₃, 1900, S. 503; 9₃, 1908/9, S. 245—246. — 2:90, siehe BM 1₃, 1900, S. 503. — 2:91—92, siehe BM 1₃, 1900, S. 503; 5₃, 1904, S. 409—410; 6₃, 1905, S. 395—396; 8₃, 1907/8, S. 191; 9₃, 1908/9, S. 152. — 2:94, 96, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 167—168. — 2:97, siehe BM 3₃, 1902, S. 406. — 2:98—99, siehe BM 1₃, 1900, S. 269—270; 6₃, 1905, S. 106—107; 7₃, 1906/7, S. 210. — 2:100, siehe BM 3₃, 1902, S. 140; 8₃, 1907/8, S. 81; 9₃, 1908/9, S. 78—74. — 2:101, siehe BM 3₃, 1902, S. 325; 6₃, 1905, S. 396; 9₃, 1908/9, S. 152—153. — 2:103, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 262—263. — 2:104, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 168—169. — 2:104—105, siehe BM 1₃, 1900, S. 503; 4₃, 1903, S. 397—398; 9₃, 1908/9, S. 153. — 2:106, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 380. — 2:111, siehe BM 2₃, 1901, S. 352. — 2:112, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 56. — 2:112—113, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 56—57. — 2:114, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 153; 10₃, 1909/10, S. 57. — 2:116, siehe BM 3₃, 1902, S. 406; 9₃, 1908/9, S. 153—154. — 2:117—118, siehe BM 6₃, 1905, S. 107, 311. — 2:122, siehe BM 1₃, 1900, S. 503—504; 6₃, 1905, S. 397. — 2:126, siehe BM 3₃, 1902, S. 406; 6₃, 1905, S. 210. — 2:127, siehe BM 3₃, 1902, S. 406. — 2:128, siehe BM 1₃, 1900, S. 504; 8₃, 1907/8, S. 191—192. — 2:129, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 287. — 2:132, siehe BM 1₃, 1900, S. 515—516. — 2:143, siehe BM 1₃, 1900, S. 504. — 2:144, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 381. — 2:145, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 287. — 2:148, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 381—382. — 2:150—151, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 288. — 2:155, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 323—325. — 2:155—156, siehe BM 5₃, 1904, S. 410—411; 7₃, 1906/7, S. 86—87. — 2:157, 158, siehe BM 2₃, 1901, S. 352. — 2:160—162, siehe BM 6₃, 1905, S. 311—312; 7₃, 1906/7, S. 87—88; 9₃, 1908/9, S. 154. — 2:163, siehe BM 1₃, 1900, S. 504; 6₃, 1905, S. 312. — 2:164, siehe BM 6₃, 1905, S. 313. — 2:165, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 382; 9₃, 1908/9, S. 246—247. — 2:166, siehe BM 1₃, 1900, S. 504. — 2:171, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 58. — 2:175, siehe BM 3₃, 1902, S. 140. — 2:178—179, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 192—193; 10₃, 1909/10, S. 58. — 2:206, siehe BM 6₃, 1905, S. 313. — 2:208, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 247. — 2:210, siehe BM 2₃, 1901, S. 352—353. — 2:218, siehe BM 4₃, 1903, S. 284. — 2:219, siehe BM 2₃, 1901, S. 353. — 2:222, siehe BM 6₃, 1905, S. 397—398. — 2:224—226, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 155. — 2:228, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 193. — 2:229, siehe BM 1₃, 1900, S. 504—505; 8₃, 1907/8, S. 194; 10₃, 1909/10, S. 263. — 2:230, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 195—196; 9₃, 1908/9, S. 155—157. — 2:232, 234, 237, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 196—198. — 2:238, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 198; 10₃, 1909/10, S. 59, 169. — 2:240, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 198—199; 10₃, 1909/10, S. 59. — 2:242, siehe BM 1₃, 1900, S. 505; 8₃, 1907/8, S. 199—200. — 2:243, siehe BM 1₃, 1900, S. 505; 6₃, 1905, S. 398; 7₃, 1906/7, S. 382; 8₃, 1907/8, S. 200. — 2:245, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 383. — 2:246, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 283; 8₃, 1907/8, S. 200. — 2:247, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 383—384; 9₃, 1908/9, S. 247. — 2:249, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 200—201. — 2:250, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 82. — 2:253,

siehe BM 2₃, 1901, S. 353. — 2:272, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 247. — 2:273, siehe BM 1₃, 1900, S. 505. — 2:274, siehe BM 3₃, 1902, S. 325. — 2:281, siehe BM 5₃, 1904, S. 411. — 2:282, 283, siehe BM 1₃, 1900, S. 506; 2₃, 1901, S. 353—354. — 2:284, siehe BM 1₃, 1900, S. 506; 9₃, 1908/9, S. 157—158. — 2:286, 287, 289, 290, 291, siehe BM 1₃, 1900, S. 506—507. — 2:296, siehe BM 2₃, 1901, S. 354. — 2:304, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 201. — 2:305, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 88. — 2:306, 308, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 248. — 2:318, siehe BM 1₃, 1900, S. 507. — 2:314, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 288—289. — 2:317, siehe BM 5₃, 1904, S. 69; 7₃, 1906/7, S. 384. — 2:318, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 158. — 2:319, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 201—202. — 2:320, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 88—89; 9₃, 1908/9, S. 248. — 2:322, siehe BM 6₃, 1905, S. 399; 8₃, 1907/8, S. 202—203. — 2:325, siehe BM 6₃, 1905, S. 313—314. — 2:327, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 248—249. — 2:328, siehe BM 3₃, 1902, S. 140; 4₃, 1903, S. 285. — 2:334, siehe BM 1₃, 1900, S. 507. — 2:339, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 82. — 2:341, 343, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 170. — 2:351, siehe BM 6₃, 1905, S. 399. — 2:353, siehe BM 1₃, 1900, S. 507; 4₃, 1903, S. 87. — 2:355, 357, siehe BM 6₃, 1905, S. 399—400. — 2:358, siehe BM 4₃, 1903, S. 87; 8₃, 1907/8, S. 203. — 2:360, siehe BM 4₃, 1903, S. 87. — 2:371, siehe BM 6₃, 1905, S. 314. — 2:375, siehe BM 9₃, 1908, S. 75. — 2:379, siehe BM 6₃, 1905, S. 400; 7₃, 1906/7, S. 384. — 2:380, siehe BM 6₃, 1905, S. 400—401. — 2:381, siehe BM 1₃, 1900, S. 507. — 2:382, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 60. — 2:385, siehe BM 3₃, 1902, S. 81; 4₃, 1903, S. 207; 7₃, 1906/7, S. 289; 10₃, 1909/10, S. 170. — 2:386, siehe BM 1₃, 1900, S. 507; 5₃, 1904, S. 306. — 2:388, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 289. — 2:392, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 82; 10₃, 1909/10, S. 171. — 2:395, siehe BM 1₃, 1900, S. 507—508. — 2:396, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 82. — 2:397, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 211. — 2:398, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 204; 9₃, 1908/9, S. 158—160. — 2:399, siehe BM 6₃, 1905, S. 107—108; 8₃, 1907/8, S. 204—205.

2:399. Hierher sollte die Notiz S. 423 (Z. 6—7) über ANDREAS ALEXANDER versetzt werden, da dieser 1502—1504 Lehrer der Mathematik an der Universität in Leipzig war (siehe C. R. WALLNER, *Über den deutschen Mathematiker ANDREAS ALEXANDER*; Biblioth. Mathem. 4₃, 1903, S. 403). Außer dem dort erwähnten *Mathemalogium* (1504) hat ALEXANDER noch eine andere Schrift veröffentlicht, nämlich eine Ausgabe der *Perspectiva JOANNIS PISANI* (Leipzig 1504, 64 Seiten Folio), die von A. G. KASTNER (*Geschichte der Mathematik* 2, Göttingen 1797, S. 271—273) ausführlich beschrieben worden ist. Nach KASTNER drucke ich hier einige Zeilen von ALEXANDER selbst ab, die Notizen über mathematische Vorlesungen in Leipzig am Anfange des 16. Jahrhunderts bringen:

Optima itaque ordinatione instituistis [es ist eine Zuschrift an die Lehrer an der Universität in Leipzig], ut primum et tertium EUCLIDIS geometriae elementa publice ad scholarium artibus philosophiae studentium fructum, et universitatis Liptzensis famam, laudem et incrementum legerem, Deinceps subalternatas aggredere disciplinas, perspectivam praecipue et musicam. Ceteris mixtis jam omissis steriometria, planimetria et altimetria. Nec non arte algebra. de ponderibus. ingeniis (?) et ysoperimetralibus, quibus subalternatarum publica studia non utuntur.

Außer den von WALLNER erwähnten Vorlesungen hat also ALEXANDER solche über die Bücher 1 und 3 der Elemente gehalten oder wenigstens angekündigt, dagegen scheint er nie über Algebra gelesen zu haben.

Auf Grund eines Mißverständnisses gibt WALLNER an, daß ALEXANDER 1504 zum Professor der Mathematik an der Universität in Köln ernannt wurde. In Wirklichkeit bedeuten die von WALLNER zitierten Worte nur, daß

ALEXANDER in Köln promoviert hatte; man hat übrigens keinen Anlaß, anzunehmen, daß am Anfang des 16. Jahrhunderts in Köln über Mathematik gelesen wurde (vgl. S. GÜNTHER, *Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter*, Berlin 1887, S. 212).
G. ENESTRÖM.

2: 401, 405, siehe BM **1**, 1900, S. 507. — **2: 410**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 290. — **2: 411, 412**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 89. — **2: 413**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 205. — **2: 419**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 205—206; **9**, 1908/9, S. 249—250. — **2: 420**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 83, 206.

2: 420. Über die Bezeichnung „Ziffern“ für die zehn Zahlzeichen wurde BM **8**, 1907/8, S. 83 bemerkt, daß sie KÖBEL schon in den älteren Auflagen seines Rechenbuches anführt und dem gemeinen Manne zuschreibt, während er selbst zwischen den neun „bedeutlichen Figuren“ und der „zyffer“ unterscheidet. Noch drastischer nennt STIBORIUS in der Vorrede zu der Ausgabe der *Tabulae eclipsium* FEUERBACHS (1514) die zehn Zahlzeichen „figuræ significativæ, quas iners popellus cyphras vocat“.
A. STURM.

2: 421, 422, siehe BM **8**, 1907/8, S. 206.

2: 423. Siehe oben die Bemerkung zu **2: 399**.

2: 425, siehe BM **1**, 1900, S. 507. — **2: 426**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 207; **10**, 1909/10, S. 60—61. — **2: 427**, siehe BM **6**, 1905, S. 314—315; **8**, 1907/8, S. 207. — **2: 428**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 208; **9**, 1908/9, S. 160. — **2: 429**, siehe BM **5**, 1904, S. 201—202; **8**, 1907/8, S. 208—209. — **2: 430**, siehe BM **2**, 1901, S. 145. — **2: 434**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 160—161. — **2: 437—438**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 209—210. — **2: 440**, siehe BM **4**, 1903, S. 285. — **2: 441**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 161. — **2: 442**, siehe BM **3**, 1902, S. 325. — **2: 444**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 210. — **2: 446**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 250. — **2: 449**, siehe BM **3**, 1902, S. 140; **10**, 1909/10, S. 171. — **2: 452**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 210. — **2: 454**, siehe BM **3**, 1902, S. 242. — **2: 457**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 250—251. — **2: 471**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 161. — **2: 474**, siehe BM **3**, 1902, S. 140—141; **9**, 1908/9, S. 161. 251. — **2: 476**, siehe BM **9**, 1908, S. 75. — **2: 479—480**, siehe BM **3**, 1902, S. 141; **7**, 1906/7, S. 290—291, 385; **9**, 1908, S. 75, 251. — **2: 481**, siehe BM **1**, 1900, S. 508; **8**, 1907/8, S. 83. — **2: 482**, siehe BM **1**, 1900, S. 508; **2**, 1901, S. 354; **3**, 1902, S. 240; **6**, 1905, S. 401. — **2: 483**, siehe BM **7**, 1906/7, S. 291. — **2: 484**, siehe BM **3**, 1902, S. 141. — **2: 486, 489**, siehe BM **1**, 1900, S. 509. — **2: 490**, siehe BM **1**, 1900, S. 509; **7**, 1906/7, S. 385—386.

2: 493. Hier sollten am Ende der Seite etwa 5 Zeilen („Der Umschwung . . . gestellt hatte“) gestrichen oder auf andere Weise redigiert werden. Wenn man wirklich der Ansicht ist, daß eine Geschichte der Mathematik zu ermitteln hat, warum sich TARTAGLIA am 16. Juni 1548 zu der bisher von ihm abgelehnten öffentlichen Disputation bereit erklärte, soll man nicht ausschließlich die Erklärung des Gegners erwähnen. Im März 1548 war TARTAGLIA nach Brescia übersiedelt, und der Abstand zwischen Mailand und Brescia ist nur etwa 80 km, der Abstand zwischen Mailand und Venedig dagegen etwa 260 km; dieser Umstand könnte ja allein genügen, den Umschwung TARTAGLIAS zu erklären. Überdies hat TARTAGLIA selbst in seinen *Ragionamenti sopra la sua travagliata inventione* (Venedig 1551; siehe die Ausgabe in den *Opere*, Venedig 1606, S. 43) einen anderen Grund angegeben, nämlich

daß Ende Juli die meisten seiner Zuhörer in Brescia um der Ernte willen nach ihren Landhäusern fuhren, so daß er gute Zeit zu einer Reise nach Mailand hatte. Daß TARTAGLIA auch andere Gründe haben konnte, diese Reise vorzunehmen, ist ja möglich, aber wenn man die Vermutung FERRARIS erwähnt, soll man nicht unterlassen, mitzuteilen, daß TARTAGLIA nach seiner eigenen Aussage (a. a. O. S. 43—44) von den Brescianern ausdrücklich abgeraten wurde, nach Mailand zu fahren.

G. ENESTRÖM.

2: 494. Über den Verlauf des öffentlichen Zusammentreffens in Mailand am 10. August 1548 gibt es zwei gedruckte Berichte von TARTAGLIA; der erste wurde schon 1551 in der Schrift *Ragionamenti sopra la sua travagliata invention* veröffentlicht (in den von Herrn CANTOR zitierten *Opere TARTAGLIAS* findet sich der Bericht S. 43—44). Dieser ältere Bericht ist viel kürzer als der andere, und in betreff des Abschlusses der Zusammenkunft sagt TARTAGLIA nur: „io gli [d. h. FERRARI] disse, che me douesse dar tai sue solutioni in scritto, et con questa leuata fu posto fine alla cosa, et mene ritornai à Bressa“; daß er etwas von den Freunden FERRARIS zu fürchten gehabt hätte, deutet er hier gar nicht an, und ebensowenig, daß er aus diesem Grunde auf einem anderen Wege nach Brescia zurückkehrte. — Wer nähere Auskunft über die von Herrn CANTOR Z. 28—37 erwähnten Streitigkeiten zwischen TARTAGLIA und den Brescianern wünscht, kann a. a. O. S. 42—52 alle Einzelheiten kennen lernen.

G. ENESTRÖM.

2: 497, siehe BM 1., 1900, S. 509; 4., 1903, S. 87; 7., 1906/7, S. 291, 386. — 2: 503, 505, siehe BM 7., 1906/7, S. 292. — 2: 506, 507, siehe BM 9., 1908/9, S. 162—163. — 2: 508, siehe BM 10., 1909/10, S. 264—265. — 2: 509, siehe BM 1., 1900, S. 270, 509. — 2: 510, siehe BM 1., 1900, S. 509. — 2: 512, siehe BM 3., 1902, S. 141. — 2: 514, 516, 517, siehe BM 1., 1900, S. 509. — 2: 524, siehe BM 7., 1906/7, S. 90; 10., 1909/10, S. 171—172. — 2: 525, siehe BM 10., 1909/10, S. 172. — 2: 527, siehe BM 7., 1906/7, S. 387. — 2: 529, siehe BM 7., 1906/7, S. 91. — 2: 530, siehe BM 2., 1901, S. 354—355; 3., 1902, S. 141. — 2: 531, siehe BM 7., 1906/7, S. 212. — 2: 532, siehe BM 1., 1900, S. 509; 7., 1906/7, S. 292; 8., 1907/8, S. 84; 9., 1908/9, S. 163—164. — 2: 535, siehe BM 1., 1900, S. 509. — 2: 536, siehe BM 7., 1906/7, S. 212—213. — 2: 537, siehe BM 7., 1906/7, S. 387. — 2: 539, siehe BM 7., 1906/7, S. 293; 9., 1908/9, S. 252. — 2: 541, siehe BM 1., 1900, S. 509. — 2: 547, siehe BM 8., 1907/8, S. 84. — 2: 548, siehe BM 1., 1900, S. 510; 9., 1908, S. 76. — 2: 549, siehe BM 1., 1900, S. 510; 6., 1905, S. 401. — 2: 550, siehe BM 2., 1901, S. 355; 9., 1908, S. 76. — 2: 554, siehe BM 1., 1900, S. 510. — 2: 555, siehe BM 4., 1903, S. 285; 6., 1905, S. 322. — 2: 558, siehe BM 9., 1908, S. 76. — 2: 561, siehe BM 7., 1906, S. 91. — 2: 565, siehe BM 4., 1903, S. 285. — 2: 566, siehe BM 8., 1907/8, S. 85. — 2: 567, 568, siehe BM 4., 1903, S. 286. — 2: 569, siehe BM 1., 1900, S. 510. — 2: 572—573, siehe BM 1., 1900, S. 510; 3., 1902, S. 141. — 2: 576, siehe BM 2., 1901, S. 355—356. — 2: 579, siehe BM 2., 1901, S. 145. — 2: 580—581, siehe BM 4., 1903, S. 207; 8., 1907/8, S. 85—86; 9., 1908/9, S. 326—327. — 2: 582, siehe BM 1., 1900, S. 510. — 2: 583, siehe BM 1., 1900, S. 270; 2., 1901, S. 356. — 2: 585, siehe BM 5., 1904, S. 69—70. — 2: 592, siehe BM 2., 1901, S. 146. — 2: 593, siehe BM 7., 1906/7, S. 387. — 2: 594, siehe BM 1., 1900, S. 270. — 2: 597, siehe BM 1., 1900, S. 270; 2., 1901, S. 146. — 2: 599—600, siehe BM 2., 1901, S. 146. — 2: 602, siehe BM 1., 1900, S. 270. — 2: 603—604, siehe BM 1., 1900, S. 270—271; 6., 1905, S. 108; 8., 1907/8, S. 211. — 2: 605, siehe BM 8., 1907/8, S. 86. — 2: 610, siehe BM 7., 1906/7, S. 388. — 2: 611, siehe BM 2., 1901, S. 356—357. — 2: 612, siehe BM 1., 1900, S. 277; 2., 1901, S. 146; 8., 1907/8, S. 212. — 2: 612—613, siehe BM 7., 1906/7, S. 91—92. — 2: 613,

siehe BM 2₃, 1901, S. 357; 5₁, 1904, S. 306; 7₃, 1906/7, S. 294, 388—389. — 2:614, siehe BM 3₃, 1902, S. 141. — 2:617, 619, siehe BM 6₃, 1905, S. 108—109. — 2:620, siehe BM 3₃, 1902, S. 141. — 2:621, siehe BM 1₃, 1900, S. 277; 2₃, 1901, S. 146; 6₃, 1905, S. 402; 7₃, 1906/7, S. 214, 389; 8₃, 1907/8, S. 86—87; 9₃, 1908, S. 77. — 2:622, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 87. — 2:623, siehe BM 1₃, 1900, S. 277; 2₃, 1901, S. 146—147. — 2:624, 625, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 87—88. — 2:626, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 389—390. — 2:632, siehe BM 6₃, 1905, S. 109. — 2:634, 637, siehe BM 6₃, 1905, S. 315—316. — 2:638, siehe BM 2₃, 1901, S. 147. — 2:639, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 77. — 2:641, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 253. — 2:642, siehe BM 1₃, 1900, S. 271. — 2:643, siehe BM 1₃, 1900, S. 271; 7₃, 1906/7, S. 391. — 2:644, siehe BM 6₃, 1905, S. 402—403.

2:652. Das Werk des SEMPILIUS (Z. 18) besitzt tatsächlich einen Anhang von 15 alphabetischen Verzeichnissen von Autoren der verschiedenen mathematischen und für verwandt gehaltenen Disziplinen. Gemäß der Vorrede soll dieser „Index auctorum“ den Weg eröffnen für ein ausführliches vom Verfasser geplantes „Dictionarium mathematicum“.

A. STURM.

2:655, siehe BM 2₃, 1901, S. 357; 10₃, 1909/10, S. 265—266. — 2:656, siehe BM 4₃, 1903, S. 286. — 2:659, 660, siehe BM 2₃, 1901, S. 147—148. — 2:661, siehe BM 6₃, 1905, S. 403. — 2:665, siehe BM 1₃, 1900, S. 271. — 2:666, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 88—89; 9₃, 1908/9, S. 164—165. — 2:667, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 89. — 2:669, siehe BM 5₃, 1904, S. 203. — 2:670, siehe BM 6₃, 1905, S. 403; 7₃, 1906/7, S. 391. — 2:674, siehe BM 4₃, 1903, S. 88. — 2:683, siehe BM 2₃, 1901, S. 148; 9₃, 1908/9, S. 328. — 2:687, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 294. — 2:689, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 391; 8₃, 1907/8, S. 89; 9₃, 1908/9, S. 253. — 2:693, siehe BM 4₃, 1903, S. 287; 7₃, 1906/7, S. 394—395. — 2:699, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 165—166. — 2:700, 701, siehe BM 1₃, 1900, S. 271. — 2:703, siehe BM 1₃, 1900, S. 271—272; 8₃, 1907/8, S. 212. — 2:704, 705, siehe BM 1₃, 1900, S. 272—273. — 2:712, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 212—213. — 2:713, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 254. — 2:714, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 89—90. — 2:715, siehe BM 5₃, 1904, S. 412. — 2:716, siehe BM 6₃, 1905, S. 404. — 2:717, 718, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 92—93. — 2:719, siehe BM 2₃, 1901, S. 357. — 2:720, siehe BM 4₃, 1903, S. 287; 6₃, 1905, S. 404. — 2:721, siehe BM 1₃, 1900, S. 273; 6₃, 1905, S. 404—405. — 2:726, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 90. — 2:727, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 392. — 2:741, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 395—396. — 2:742, siehe BM 1₃, 1900, S. 273; 3₃, 1902, S. 142. — 2:746, siehe BM 1₃, 1900, S. 273. — 2:747, siehe BM 1₃, 1900, S. 173; 2₃, 1901, S. 225. — 2:749, siehe BM 4₃, 1903, S. 88. — 2:753—754, 758, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 254—255. — 2:763, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 166. — 2:765, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 90—91. — 2:766, siehe BM 3₃, 1902, S. 142; 5₃, 1904, S. 412—413. — 2:767, siehe BM 2₃, 1901, S. 148, 357—358. — 2:770, siehe BM 4₃, 1903, S. 208. — 2:772, siehe BM 2₃, 1901, S. 358; 7₃, 1906/7, S. 392—393. — 2:773, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 213; 9₃, 1908/9, S. 167. — 2:775, siehe BM 2₃, 1901, S. 358—359. — 2:777, siehe BM 2₃, 1901, S. 148; 3₃, 1902, S. 204. — 2:780, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 78, 167. — 2:783, siehe BM 2₃, 1901, S. 359; 4₃, 1903, S. 88—89. — 2:784, siehe BM 2₃, 1901, S. 148. — 2:787, siehe BM 6₃, 1905, S. 405; 7₃, 1906/7, S. 296. — 2:790, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 393; 9₃, 1908/9, S. 255; 10₃, 1909/10, S. 62—63. — 2:791, siehe BM 6₃, 1905, S. 405. — 2:793—794, siehe BM 5₃, 1904, S. 307; 6₃, 1905, S. 316—317, 405—406. — 2:795, siehe BM 6₃, 1905, S. 317. — 2:797—798, siehe BM 5₃, 1904, S. 307; 6₃, 1905, S. 317; 10₃, 1909/10, S. 63—64. — 2:799, siehe BM 5₃, 1904, S. 307. — 2:802, siehe BM 4₃, 1903, S. 208. — 2:802—803, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 367—368. — 2:812, siehe BM 4₃, 1903, S. 37. — 2:815, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 64. — 2:817, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 174. — 2:820, siehe BM 2₃, 1901, S. 148; 5₃, 1904, S. 307. — 2:825, siehe BM 2₃, 1901, S. 148. — 2:827, 830, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 256—257. — 2:832, siehe BM 5₃, 1904, S. 203—204; 6₃, 1905, S. 211. — 2:840, siehe BM 2₃, 1901, S. 148—149. — 2:843, siehe BM 3₃, 1902, S. 328.

— 2:850, siehe BM 6₃, 1905, S. 109—110. — 2:851, 852, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 174—175. — 2:856, 865, siehe BM 2₃, 1901, S. 149. — 2:876, 878, 879, siehe BM 1₃, 1900, S. 511. — 2:891, siehe BM 1₃, 1900, S. 273. — 2:897, siehe BM 6₃, 1905, S. 406. — 2:898, siehe BM 4₃, 1903, S. 37, 208; 10₃, 1909/10, S. 175—176. — 2:901, siehe BM 1₃, 1900, S. 511. — 2:902, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 329—330; 10₃, 1909/10, S. 64. — 2:911, siehe BM 9₃, 1908, S. 78—79. — 2:919, siehe BM 5₃, 1904, S. 204. — 2:VIII (Vorwort), siehe BM 3₃, 1902, S. 142. — 2:IX, X (Vorwort), siehe BM 1₃, 1900, S. 511—512.

3:1, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 268. — 3:4, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 65—67. — 3:5, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 269. — 3:5—6, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 269—270. — 3:9, siehe BM 2₃, 1901, S. 359. — 3:10, siehe BM 1₃, 1900, S. 518; 6₃, 1905, S. 211; 7₃, 1906/7, S. 393—394. — 3:11, siehe BM 4₃, 1903, S. 209. — 3:12, siehe BM 1₃, 1900, S. 512. — 3:14—15, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 296—297. — 3:15, 16, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 270—272. — 3:17, siehe BM 1₃, 1900, S. 512. — 3:18, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 168. — 3:19, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 67—68. — 3:22, siehe BM 1₃, 1900, S. 512; 4₃, 1903, S. 209. — 3:23, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 297—298; 8₃, 1907/8, S. 91. — 3:24, siehe BM 4₃, 1903, S. 209. — 3:25, siehe BM 4₃, 1903, S. 209, 399; 9₃, 1908/9, S. 168. — 3:26, siehe BM 2₃, 1901, S. 359; 7₃, 1906/7, S. 394. — 3:29, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 331. — 3:37, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 91—92. — 3:39, siehe BM 6₃, 1905, S. 407. — 3:40, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 394. — 3:45—48, 49, 50, siehe BM 1₃, 1900, S. 512—513. — 3:57, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 298—299. — 3:58, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 272—273. — 3:62, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 177. — 3:63, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 93—94. — 3:68, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 299; 9₃, 1908/9, S. 257—258. — 3:69, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 69. — 3:70, siehe BM 2₃, 1901, S. 360; 9₃, 1908/9, S. 258. — 3:78, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 92. — 3:79, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 69—71. — 3:82, siehe BM 5₃, 1904, S. 308. — 3:85, siehe BM 10₃, 1909/10, S. 273—274. — 3:97, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 394. — 3:100, siehe BM 2₃, 1901, S. 149; 7₃, 1906/7, S. 299—300. — 3:102, siehe BM 6₃, 1905, S. 318; 7₃, 1906/7, S. 300; 9₃, 1908/9, S. 169. — 3:104, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 331. — 3:112, siehe BM 4₃, 1903, S. 209—210; 6₃, 1905, S. 318. — 3:113, siehe BM 9₃, 1908/9, S. 258—259. — 3:116, siehe BM 1₃, 1900, S. 513. — 3:117, siehe BM 1₃, 1900, S. 518; 9₃, 1908/9, S. 259—260. — 3:118, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 92—93. — 3:122, siehe BM 7₃, 1906/7, S. 301. — 3:123, siehe BM 1₃, 1900, S. 513; 4₃, 1903, S. 399; 7₃, 1906/7, S. 301—302. — 3:124, siehe BM 3₃, 1902, S. 407—408; 4₃, 1903, S. 400. — 3:126, siehe BM 4₃, 1903, S. 288. — 3:129—130, siehe BM 8₃, 1907/8, S. 93. — 3:131, siehe BM 4₃, 1903, S. 210. — 3:151, siehe BM 3₃, 1902, S. 326.

3:157. Z. 17 soll „1668 in Padua“ statt „1667 in Venedig“ stehen. Der vollständige Titel der von Herrn CANTOR zitierten Schrift ist:

Geometriae pars universalis, inserviens quantitatum curvarum transmutationi et mensurae. Authore JACOBO GREGORIO Abredonensi Scoto. Patavii, MDCLXVIII. Typis Heredum Pauli Frambotti, superiorum perm. Cum privilegio.

4^o, (11) + 151 S.

Im Jahre 1667 veröffentlichte J. GREGORY wirklich eine andere Schrift, aber auch nicht diese Schrift ist in Venedig gedruckt; der Titel derselben lautet:

Vera circuli et hyperbolae quadratura, in propria sua proportionis specie, inventa, et demonstrata a JACOBO GREGORIO Abredonensi Scoto. Patavii, ex typographia Jacobi de Cadorinis. Superiorum permissu.

4^o, 62 S. + 1 Taf. — S. 59 steht das Druckjahr: „Anno Dom: 1667.“

Von diesen beiden Schriften besitze ich selber Exemplare. Im Jahre 1668 wurden sie in Padua zusammen unter dem Titel: *Vera circuli et hyperbolae*

quadratura; accedit geometriae pars universalis wieder herausgegeben (ein Exemplar in der Bibliothek der Sternwarte Pulkowa).

Es ist wahr, daß bei GREGORY im Drucke der Buchstabe *o* vorkommt, aber GREGORY definiert selbst (S. 20) dies Zeichen als „nihil seu serum“, d. h. als eine wirkliche Null. Nun bedeutet, wie Herr CANTOR richtig angibt, bei NEWTON der Buchstabe *o* eine nachmals zum Verschwinden gebrachte Größe, und es ist also nicht ganz korrekt zu sagen, daß J. GREGORY sein Zeichen *o* „in genau mit NEWTON übereinstimmender Weise“ gebraucht.

G. ENESTRÖM.

3:166, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 332. — **3:167, 172–173**, siehe BM **4**₁, 1908, S. 400. — **3:174**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 149–150. — **3:174, 181**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 71–73. — **3:183**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 432. — **3:188**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 241. — **3:195**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 311, 332–333; **10**₃, 1909/10, S. 73. — **3:196**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 333. — **3:201**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 513. — **3:207**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 519. — **3:215**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 150; **9**₃, 1908/9, S. 260–262. — **3:218**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 513. — **3:220**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 326. — **3:221**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 333. — **3:224**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 514. — **3:225**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 150. — **3:228**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 150; **9**₃, 1908/9, S. 333–334. — **3:230**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 211–212. — **3:232**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 514; **6**₃, 1905, S. 212; **7**₃, 1906/7, S. 303; **8**₃, 1907/8, S. 94; **9**₃, 1908/9, S. 334–335. — **3:244–245**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 205, 413; **7**₃, 1906/7, S. 303–304. — **3:246**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 514; **2**₃, 1901, S. 151. — **3:250**, siehe BM **1**₃, 1900, S. 514. — **3:253, 254, 258, 260**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 78–76. — **3:270**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 395. — **3:276**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 304. — **3:279**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 335–336. — **3:286**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 76. — **3:303**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 155. — **3:306**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 304. — **3:327**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 77. — **3:330–331**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 241–242. — **3:337**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 206. — **3:350**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 336. — **3:364**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 304–305. — **3:365**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 94. — **3:366**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 274–275. — **3:367**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 215. — **3:370–371**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 308. — **3:382**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 213. — **3:384**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 319. — **3:397**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 94. — **3:398**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 305–306; **8**₃, 1907/8, S. 94–95. — **3:399**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 77–78. — **3:406**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 262. — **3:408**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 213. — **3:412**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 306. — **3:427**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 169. — **3:447, 455**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 151. — **3:461**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 337. — **3:473**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 154–155; **4**₃, 1903, S. 401. — **3:475**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 79–80. — **3:476**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 169–170, 476. — **3:477, 479**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 151–152. — **3:480**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 95. — **3:481**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 79. — **3:482**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 178. — **3:496**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 337–338. — **3:497, 498**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 309. — **3:507**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 71–72. — **3:507–509, 509**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 338–339. — **3:521**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 441. — **3:527**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 95. — **3:535**, siehe BM **4**₃, 1903, S. 401. — **3:536**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 206. — **3:560**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 319–321. — **3:565**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 326–327. — **3:571**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 327; **5**₃, 1904, S. 72; **9**₃, 1908/9, S. 170. — **3:575**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 263. — **3:578**, siehe BM **3**₃, 1902, S. 327; **5**₃, 1904, S. 309. — **3:582**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 307. — **3:583**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 80. — **3:586**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 309. — **3:593**, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 214. — **3:609**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 309–310. — **3:612**, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 307–308; **9**₃, 1908/9, S. 339–340. — **3:614–615**, siehe BM **4**₃, 1903, S. 89–90; **7**₃, 1906/7, S. 308. — **3:616**, siehe BM **6**₃, 1905, S. 214, 408; **9**₃, 1908/9, S. 263. — **3:617**, siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 263; **10**₃, 1909/10, S. 80–81. — **3:636–637**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 441. — **3:646–647**, siehe BM **5**₃, 1904, S. 206–207. — **3:652**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 446; **5**₃, 1904, S. 207. — **3:655**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 275–276. — **3:660**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 441. — **3:666**, siehe BM **10**₃, 1909/10, S. 179. — **3:667**, siehe BM **2**₃, 1901, S. 441–442; **5**₃, 1904,

S. 207—208, 310. — **3:675**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 340—341. — **3:682**, siehe BM **6**, 1905, S. 408. — **3:686**, siehe BM **5**, 1904, S. 208. — **3:688**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 341; **10**, 1909/10, S. 276. — **3:689**, siehe BM **2**, 1901, S. 442; **8**, 1907/8, S. 215. — **3:692**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 215. — **3:693**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 341. — **3:695**, siehe BM **2**, 1901, S. 442. — **3:700**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 171, 342. — **3:702**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 171. — **3:703**, 705, siehe BM **9**, 1908/9, S. 342—343. — **3:722**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 172. — **3:726—728**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 343—344. — **3:736**, siehe BM **6**, 1905, S. 111. — **3:749**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 172. — **3:750**, siehe BM **2**, 1901, S. 446. — **3:753**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 172—174. — **3:754**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 344—345. — **3:758**, siehe BM **2**, 1901, S. 446; **9**, 1908/9, S. 345—346. — **3:759**, siehe BM **5**, 1904, S. 208. — **3:760**, siehe BM **2**, 1901, S. 447. — **3:762**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 346. — **3:766**, siehe BM **2**, 1901, S. 446. — **3:773**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 174—175, 346—347. — **3:774**, siehe BM **2**, 1901, S. 442—443. — **3:792**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 347. — **3:798**, siehe BM **2**, 1901, S. 443. — **3:813**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 348. — **3:819**, siehe BM **6**, 1905, S. 321. — **3:845**, siehe BM **2**, 1901, S. 447; **3**, 1902, S. 327—328. — **3:848**, siehe BM **2**, 1901, S. 443. — **3:870—871**, siehe BM **10**, 1909/10, S. 81—82. — **3:880**, siehe BM **8**, 1907/8, S. 95—96. — **3:881**, siehe BM **2**, 1901, S. 443; **9**, 1908/9, S. 264—265; **10**, 1909/10, S. 83. — **3:882**, siehe BM **2**, 1901, S. 447; **5**, 1904, S. 414. — **3:890**, siehe BM **4**, 1903, S. 401; **9**, 1908/9, S. 348—349. — **3:892**, siehe BM **3**, 1902, S. 143; **9**, 1908/9, S. 265. — **3:894**, siehe BM **9**, 1908/9, S. 349—350. — **3:897**, siehe BM **10**, 1909/10, S. 83. — **3:IV** (Vorwort), siehe BM **2**, 1901, S. 443.

Anfragen.

147. Über die Geschichte der Potenzreihe, deren Exponenten eine Potenzreihe n^{ter} Ordnung bilden. Bekanntlich hat EULER in seiner Abhandlung *De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas* (Novi comment. acad. sc. Petrop. **14** (1769), gedruckt 1770, S. 168) darauf hingewiesen, daß man die Reihe

$$f(x, 2) = x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} + \dots$$

benutzen könnte, um zu beweisen, daß jede ganze Zahl als eine Summe von höchstens vier ganzen Quadratzahlen dargestellt werden kann, vorausgesetzt, daß es möglich wäre, nachzuweisen, daß die Potenzreihe für $[f(x, 2)]^4$ alle ganzzahligen Potenzen von x enthält. Selbstverständlich würde man ebensogut die Reihe

$$f(x, r) - 1 = x^{1^r} + x^{2^r} + x^{3^r} + \dots$$

benutzen können, um den großen FERMATSchen Satz zu beweisen, wenn es möglich wäre, zu zeigen, daß die Potenzreihe für $[f(x, r) - 1]^2$ keine Glieder von der Form x^{n^r} enthält, sobald $r > 2$. Andererseits ist die Reihe $f(x, r) - 1$ eine Verallgemeinerung der Reihe für $\frac{1}{2}(\vartheta_3(0) - 1)$ und bietet also doppeltes Interesse dar.

Welche Mathematiker haben sich mit der Reihe $f(x, r) - 1$ für $r \geq 3$ beschäftigt und welches sind die wesentlichsten Ergebnisse ihrer Untersuchungen? Ist es gelungen, nachzuweisen, daß die jetzigen analytischen Hilfsmittel nicht genügen, um $[f(x, r) - 1]^2$ in eine Potenzreihe zu entwickeln, deren allgemeines Glied als eine Funktion der Ordnungszahl dargestellt ist?

G. ENESTRÖM.

Rezensionen.

G. J. Gray. A bibliography of the works of sir Isaac Newton.
 Together with a list of books illustrating his works. With notes. Second
 edition, revised and enlarged. Cambridge, Bowes 1907. (8) + 80 S. 4"
 + Bildnis. — [5 sh.]

Die erste Auflage dieser Bibliographie erschien 1888, enthielt aber nur 231 Titel, während in der neuen Auflage 412 Schriften verzeichnet sind. Die Einteilung in Abschnitte ist wesentlich unverändert, nämlich: 1. Collected editions of works (S. 1—5). 2. The „Principia“ (S. 5—35). 3. Optics (S. 35—46). 4. Fluxions (S. 46—55). 5. Arithmetica universalis (S. 56—59). 6. Minor works (S. 59—61). 7. Chronological, theological and miscellaneous works (S. 61—68). 8. Reports on coinage, etc. (S. 68—69). 9. Works edited by NEWTON. (S. 69—70). 10. Memoirs etc. (S. 70—76). Vor dem Titelblatt ist das Standbild NEWTONS in „Trinity college“ abgebildet, und am Ende (S. 76—80) befindet sich ein Namenverzeichnis.

Herr GRAY hat selbst einen großen Teil der Schriften NEWTONS, die er verzeichnet, gesehen, und die bibliographischen Beschreibungen dieses Teiles sind, soweit ich dieselben nachgeprüft habe, sehr sorgfältig. Allerdings scheint Herr GRAY in erster Linie Bücherfreund und in zweiter Linie Bibliograph zu sein, denn er nimmt z. B. S. 8 als besondere Nummer (10) einen Luxusabdruck einer schon verzeichneten Auflage der *Principia* auf, während er S. 45—46 unter ein und derselben Nummer 19 kleinere Artikel NEWTONS aufführt. Auch andere Umstände deuten darauf hin, daß Herr GRAY bei der Bearbeitung seiner Bibliographie nicht den Zweck gehabt hat, genaue und möglichst vollständige Auskunft über die von NEWTON verfaßten Schriften zu bieten, sondern daß die Beschreibung der von ihm selbst eingesehenen Bücher das Hauptziel gewesen ist. Um nur einen einzigen Beleg hierfür zu bringen, sind die soeben erwähnten 19 Artikel so unvollständig verzeichnet, daß weder die Druckjahre noch die Seitenzahlen derselben angegeben werden. Dagegen erwähnt Herr GRAY S. 16, an welchen Seiten die einzelnen Tafeln der Originalausgabe der englischen Übersetzung der *Principia* eingeheftet sind!

Leider gibt es noch einen Umstand, der bewirkt, daß die Arbeit des Herrn GRAY nicht als ein zuverlässiger Führer durch die NEWTON-Literatur benutzt werden kann, nämlich daß Herr GRAY gewisse Angaben, deren Unzuverlässigkeit man ohne besonders große Sachkunde erkennen muß, gebracht hat. In vielen Fällen ist es gewiß sehr schwierig und zuweilen sogar unmöglich zu entscheiden, ob eine Schrift wirklich erschienen ist, aber hinsichtlich der von Herrn GRAY S. 59 Z. 8—9 v. u. aufgeführten Auflage des *Tractatus de quadratura curvarum*, die als „Edited by P. R. DE MONTMORT. 1700“ be-

zeichnet wird, kann diese Bemerkung kaum geltend gemacht werden. Man weiß ja ganz bestimmt, daß der Traktat zum ersten Mal 1704 von NEWTON selbst veröffentlicht wurde, so daß die Jahreszahl 1700 jedenfalls unrichtig sein muß. Andererseits starb MONTMORT schon 1719, also vor NEWTON, und es ist an sich wenig wahrscheinlich, daß ein französischer Mathematiker zu Lebzeiten NEWTONS eine neue Auflage des Traktates herausgegeben haben würde, so daß die Nachprüfung der Richtigkeit der Angabe nicht hätte unterlassen werden sollen. Meines Wissens hat kein zuverlässiger Bibliograph diese angebliche Auflage des *Tractatus de quadratura curvarum* erwähnt.

Nun gebe ich gern zu, daß diese Angabe des Herrn GRAY für die Benutzer seiner Arbeit von untergeordneter Bedeutung ist, aber anders liegt die Sache hinsichtlich einer anderen Angabe ähnlicher Art, die schon im ersten Abschnitt vorkommt. Als erste Nummer dieses Abschnittes verzeichnet Herr GRAY die HORSLEYSche Ausgabe der Gesammelten Werke NEWTONS und dann folgt als zweite Nummer:

ISAACI NEWTONI, Equitis Aurati, Opera Mathematica, Philosophica et Philologica. Collegit partimque Latine vertit ac recensuit JOH. CASTILLIONÆUS jurisconsultus. Lausannae & Genevae, Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios. 1744. 8 volumes. 4to.

Wenn man diese Angabe sieht, wird man anfangs versucht, „Opera“ als Druckfehler statt „Opuscula“ und „8 volumes“ als Druckfehler statt „3 volumes“ anzusehen; den letzten Druckfehler hat tatsächlich CH. HUTTON in seinem *Philosophical and mathematical dictionary* (siehe II, Ausg. 2, London 1815, S. 101 Z. 2). Aber unmittelbar nachher kommt bei Herrn GRAY die verblüffende Notiz: „The Principia, 3 vols.; Arithmetica Universalis, 1 vol.; Optice et Lectiones Opticae, 1 vol.; Opuscula Mathematica, &c., 3 vols.“. Nach Herrn GRAY erschienen also 1744 nicht nur die drei Bände der *Opuscula*, sondern überdies 5 Bände der größeren Werke NEWTONS, und diese 8 Bände wurden „NEWTONI Opera“ genannt. Da mir das Erscheinen dieser 5 Bände durchaus unbekannt war, war ich begierig, nähere Auskunft über sie zu bekommen. Nun könnte Herr GRAY diese Auskunft entweder im 1. Abschnitte oder an den betreffenden Stellen der Abschnitte 2, 3, 5 gebracht haben. Allein im 1. Abschnitt gibt er nur den Inhalt der drei Bände der *Opuscula* an, und in den anderen Abschnitten habe ich vergebens die leiseste Andeutung von der Existenz der Auflage 1744 der *Principia*, der *Arithmetica universalis* und der *Optice* gesucht. Man darf wohl daraus schließen, daß Herr GRAY selbst keine weiteren Notizen über die 5 Bände geben kann, und der einfache Grund dafür ist sicherlich, daß die Bände nie existiert haben. Daß CASTILLON im Jahre 1744 nicht einmal die Absicht hatte, die größeren Schriften NEWTONS herauszugeben, geht wohl daraus hervor, daß die ausführliche Vorrede der *Opuscula* nicht ein einziges Wort hierüber enthält. Aber eine Spezialbibliographie, die in einem Falle dieser Art ohne Vorbehalt unzuverlässige Notizen bringt, kann nicht als Führer auf dem fraglichen Gebiete empfohlen werden.

Ich habe oben erwähnt, wie Herr GRAY die Schriften NEWTONS klassifiziert hat. Ein Abschnitt für Gesammelte Schriften ist ja im allgemeinen angebracht, und auf Grund der Bedeutung und der zahlreichen Auflagen oder Bearbeitungen der *Principia* ist gegen den zweiten Abschnitt nichts einzuwenden. Auch mit dem Verfahren, den optischen Schriften einen besonderen Abschnitt zu widmen, kann ich einverstanden sein. Dagegen gefällt mir weniger die

Einteilung der übrigen mathematischen Schriften in die drei Abschnitte: „Fluxions“, „Arithmetica universalis“ und „Minor works“. Für die *Arithmetica universalis* (Originalausgabe, 5 neue Auflagen, zwei Übersetzungen mit zusammen 4 Auflagen und 5 „Illustrations“) ist meines Erachtens kein besonderer Abschnitt nötig, und wie willkürlich die Abschnitte „Fluxions“ und „Minor works“ begrenzt worden sind, sieht man schon daraus, daß die zwei für die Geschichte der Fluxionsrechnung wichtigen Traktate *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* und *De quadratura curvarum* unter „Minor works“ aufgeführt worden sind. Der erste Traktat ist bekanntlich im *Commercium epistolicum* abgedruckt, und da Herr GRAY diese Schrift unter „Fluxions“ auführt, muß man die verschiedenen Auflagen jenes Traktates an zwei verschiedenen Stellen suchen. Viel besser wäre es meiner Ansicht nach, aus den drei Abschnitten 4, 5, 6 einen einzigen zu machen, und innerhalb desselben die Schriften in chronologischer Ordnungsfolge nach den Druckjahren der Originalausgaben zu vereinigen. Anderseits möchte ich dringend einen besonderen Abschnitt für die veröffentlichten Briefe NEWTONS empfehlen. Einige dieser Briefe sind ebenso wichtig wie die Traktate, und aus der GRAYschen Bibliographie, wie sie jetzt vorliegt, ist es durchaus unmöglich, genaue Kenntnis zu bekommen, wann und wo die gedruckten Briefe NEWTONS veröffentlicht wurden.

Von den übrigen Bemerkungen, die ich bei der Lektüre der Arbeit des Herrn GRAY notiert habe, bringe ich unten einige zum Abdruck, die sich auf die von NEWTON selbst verfaßten Schriften beziehen.

S. 10. In meinem Exemplar der Ausgabe 1723 der *Principia* sind auf dem Titelblatt die Worte „Naturalis“, „Equite aurato“ und „ac“ nicht, wie Herr GRAY angibt, mit Antiqua, sondern mit Kursivschriften gedruckt.

S. 11. In meinem Exemplar des 1. Bandes der Ausgabe 1739 der *Principia* sind auf dem Titelblatt die Worte „PP. Thomae Le Seur & Francisci Jacquier“ nicht wie Herr GRAY angibt, mit Kursivschriften, sondern mit Antiqua gedruckt.

S. 16. Z. 7 lies „MDCCXXIX“ statt „MDCCCXXIX“.

S. 56. In meinem Exemplar der Originalausgabe der *Arithmetica universalis* steht am Ende des Titelblattes zwischen „Academicæ“ und „MDCCVII“: *Londini, Impensis Benj. Tooke Bibliopolæ juxta Medii Templi Portam in vico vulgo vocato Fleetstreet A. D.*“.

S 56. Der richtige Titel der Ausgabe 1732 der *Arithmetica universalis* lautet:

Arithmetica universalis; | sive | de | compositione | et | resolutione |
arithmetica | liber. | Auctore Is. NEWTON, Eq. Aur. | *Lugduni Batavorum*, |
Apud Joh. et Herm. Verbeek, Bibliopolæ | MDCCXXXII.

4^o, 4 Bl., 344 S. + 13 Taf. — Die Seiten 243–344 enthalten die Anhänge.

S. 56. Die bekannte Arbeit von A. LECCHI: *Arithmetica universalis ISAACI NEWTONI*, die 1752 (nicht 1732 wie Herr GRAY angibt) erschien, dürfte kaum als eine neue Auflage der NEWTONschen Arbeit betrachtet werden können. Übrigens beschränkt sich LECCHI auf die elementarsten Abteilungen der *Arithmetica universalis* NEWTONS. Warum Herr GRAY den Verfasser „J. A. LECCHI“ nennt, weiß ich nicht. Der vollständige Name war ANTONIO GIOVANNI LECCHI; auf dem Titelblatt des Werkes steht „auctore P. [= patre] ANTONIO LECCHI“. Vielleicht ist J. ein Druckfehler statt P.

S. 57. Die hier als Nr. 282 verzeichnete Schrift ist offenbar identisch mit Nr. 287 und sollte folglich gestrichen werden.

S. 59. Der vollständige Titel der Ausgabe 1762 des *Tractatus de quadratura curvarum* lautet:

ISAACI NEWTONI Equ. Aur. | Tractatus | de | quadratura curvarum
in | usum studiosae juventutis mathematicae | explicationibus illustratus | a
DANIELE MELANDER. | astron. profess. Upsal. | Upsaliae, MDCCLXII.
Groß 4°, 112 S. + 1 Taf. — Die Seiten 2—6, 39—112 sind vom Herausgeber verfaßt.

S. 60. Die Nummer 301 hat einen unrichtigen Platz bekommen; die Schrift rührt von J. STIRLING her und soll S. 61 nach Nr. 307 stehen.

Im vorhergehenden habe ich ausschließlich auf die Schriften von NEWTON, die Herr GRAY verzeichnet, Bezug genommen, und diese machen nur einen kleinen Teil der 412 Nummern aus; beispielsweise werden im 2. Abschnitte nicht weniger als 134 Schriften über die *Principia* erwähnt, und der ganze Abschnitt 10 (52 Nummern) bezieht sich auf Schriften dieser Art. Selbstverständlich kann ein Verzeichnis solcher Schriften von großem Interesse sein, und die nicht geringe Mühe, der sich Herr GRAY unterzogen hat, um die Schriften über NEWTON zu verzeichnen, darf nicht unnütz genannt werden. Allerdings kann das Ergebnis dieser Mühe keinen besonders hohen Wert beanspruchen. Einerseits ist das Verzeichnis der Schriften über NEWTON höchst unvollständig, namentlich in betreff der deutschen Literatur, anderseits sind viele Schriften aufgeführt, die gar nichts mit NEWTON zu tun haben (z. B. S. 54: NEUMANN, C., Untersuchungen über das logarithmische und NEWTONSche Potential). Überdies enthalten die Angaben des Herrn GRAY eine nicht unbeträchtliche Zahl von Unrichtigkeiten oder Ungenauigkeiten, und die Klassifikation der Schriften ist nicht selten unbefriedigend. Eine eingehende Kritik dieses Teiles der vorliegenden Bibliographie würde indessen einen allzu großen Raum in Anspruch nehmen, so daß ich auf eine solche Kritik verzichten muß.

Betrachtet man die Arbeit des Herrn GRAY als einen Versuch, die Schriften von und über NEWTON zweckmäßig und genau zu verzeichnen, kann man, wie aus dem Vorhergehenden klar sein dürfte, diesen Versuch nicht als gelungen bezeichnen. Denkt man sich dagegen Herrn GRAY als einen Liebhaber der NEWTONSchen Schriften, der anderen Liebhabern mitteilen will, was er durch seine Forschungen ausfindig gemacht hat, so wird das Urteil wesentlich günstiger. Jedenfalls wird, wenn einmal eine wirkliche NEWTON-Bibliographie in Angriff genommen wird, die Anfertigung dieser Bibliographie durch die Vorarbeit des Herrn GRAY sehr erleichtert werden.

Stockholm.

G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

- | | | | |
|--------------------------|-----------------------------|--------------------------|-----------------------|
| Adam, 58. | Favaro, 10, 52, 53, 55, 57. | Lebon, 90—92. | Schütte, 15. |
| Ahrens, 25, 123. | Fratl, 50. | Liebmann, 22. | Simon, 19. |
| André, 121. | Galliei, 52. | Loria, 4, 7, 14, 15, 28. | Simplikios, 37. |
| Archimedes, 34, 35. | Geitel, 102. | Mansion, 72. | Smith, 12, 38. |
| Auerbach, 6. | Gray, 118. | Marcolongo, 70. | Stäckel, 66. |
| Ball, 9. | Grebe, 118. | Mehmke, 62. | Stadler, 2. |
| Bellati, 118. | Guimarães, 29. | Meyer, Kirstine, 60, 61. | Stilleke, 44. |
| Blanc, 99. | Günther, S., 23. | Mikami, 20, 27. | Sturm, 78. |
| Blaserna, 118. | Haas, 32. | Miller, 31, 94. | Sudhoff, 2. |
| Bohynin, 125. | Hammer-Jensen, Inge- | Millosevich, 104. | Tannery, J., 76. |
| Bonola, 21, 22. | borg, 36. | Mittag-Leffler, 109. | Tannery, P., 58. |
| Bosmans, 68. | Hayashi, 63. | Muir, 75, 79—85. | Teixeira, 16. |
| Boutroux, 11. | Heath, 33. | Müller, A., 56. | Vargas y Aguirre, 17. |
| Bryk, 74. | Heiberg, 34, 35, 40. | Müller, Felix, 12, 46. | Vassura, 59. |
| Buchka, 2. | Hellmann, 24. | Naccari, 111. | Vivanti, 67. |
| Burgatti, 101. | Hennig, 69. | Perry, 97. | Voss, 26. |
| Burger, 51. | Hilbert, 114. | Pittarelli, 48, 71. | Weierstrass, 86. |
| Burkhardt, 78. | Hoppe, 30. | Poincaré, 93. | Weiss, 110. |
| Cantor, 8. | Ibn al Haitam, 40. | Posse, 106. | Wiedemann, 39, 40. |
| Castelnuovo, 5. | Junge, 49. | Rayet, 108. | Wien, 118. |
| Costanzo, 118. | Karpinski, 42. | Rose, 112. | Wilhelm, 64. |
| Del Lungo, 54. | Kewisch, 30. | Nothe, 102. | Witting, 124. |
| Descartes, 58. | Königsberger, 87. | Rubens, 115. | Zeuthen, 18. |
| Du Bois-Reymond, 120. | Krazer, 77. | Rudio, 37. | Zühlke, 89. |
| Duhem, 43. | Lagrange, 71. | Sanctis, 118. | |
| Eneström, 8, 41, 45, 65. | Lampe, 86, 120. | Scheel, 105. | |
| Eukleides, 33. | Laparewicz, 88. | Schottenloher, 47. | |

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8°. [1 28 (1910). — [Rezension des Heftes 25 (1907):] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11 (1908/9), 1910, 103—104. (G. L.)

Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, herausgegeben von K. von Buchka, H. Stadler, K. Sudhoff. Leipzig. 8°. [2 2 (1910): 4—5.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [3 10, (1909/10): 3.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [4 11 (1908/9): 4. — 12 (1910): 1.

Atti del IV° congresso internazionale dei matematici (Roma 6—8 Aprile 1908). Pubblicati per cura di G. CASTELNUOVO. Volume II—III. Roma, Loescher 1909. [5 8°, 319 + 588 S. — [Rezension:] L'enseignement mathém. 12, 1910, 262—263. (G. LORIA.)

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Herausgegeben von FELIX AUERBACH (1909). — [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 25, 1910, 283. (MEITNER.) [6

Loria, G., Sur les moyens pour faciliter et diriger les études sur l'histoire des mathématiques (1909). [Wieder abgedruckt:] Atti del IV° congresso internazionale dei matematici (Roma 1908) 3, 1909, 541—548. [7

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1^a (1907). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 10, 1909/10, 260—261. (G. ENESTRÖM.) — 2^a (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 10, 1909/10, 262—263. (G. ENESTRÖM, A. FAVARO.) — 3^a (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 10, 1909/10, 268—276. (G. ENESTRÖM.) [8

- Ball, W. W. R., A short account of the history of mathematics (1908). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11 (1908/9), 1910, 99. (G. L.) [9]
- Favaro, A., A proposito di Guglielmo Libri e della sua „Historie des sciences mathématiques en Italie“. [10]
Il libro e la stampa 4, 1910, 18—24.
- Boutroux, P., L'évolution des mathématiques pures. [11]
Rivista di scienza „scientia“ 6, 1909, 1—20.
- Müller, Felix, Führer durch die mathematische Literatur (1909). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11 (1908/9), 1910, 97—99. (G. L.) — Deutsche Literatur. 31, 1910, 2230—2232. (E. LAMPE.) [12]
- Smith, D. E., Rare arithmetica (1908). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11 (1908/9), 1910, 108—109. (G. L.) [13]
- Loria, G., Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11 (1908/9), 1910, 100—101. (G. L.) [14]
- Loria, G., Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte. Deutsche Ausgabe von F. SCHÜTTE 1 (1910). [Rezension:] Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 18, 1910, 291—294. (H. BOSMANS.) [15]
- Teixeira, F. G., Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches (1908—1909). [Rezension:] Arch. der Mathem. 16, 1910, 241. (H. WIELSTNER.) — Bullet. d. sc. mathém. 34, 1910, 107—108. (M. O.) [16]
- Vargas y Aguirre, J. de, Catálogo general de curvas (1908). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11 (1908/9), 1910, 124—125. (G. L.) [17]
- Zeuthen, H. G., Sur les rapports entre les anciens et les modernes principes de la géométrie. [18]
Atti del IV° congresso internazionale dei matematici (Roma 1908) 3, 1909, 422—427. — [Rezension:] Mittell. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 9, 1910, 375. (E. WIEDEMANN.)
- Simon, M., Historische Bemerkungen über das Continuum, den Punkt und die gerade Linie. [19]
Atti del IV° congresso internazionale dei matematici (Roma 1908) 3, 1909, 385—390.
- Mikami, Y., The circle-squaring of the Chinese. [20]
Biblioth. Mathem. 10, 1909/10, 193—200.
- Bonola, R., La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica (1906). [Rezension:] New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 16, 1910, 490—491. (A. RANUM.) [21]
- Bonola, R., Die nichteuclidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung. Deutsche Ausgabe von H. LIEBMANN (1908). [Rezension:] New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 16, 1910, 490—491. (A. RANUM.) [22]
- *Günther, S., Geschichte der Naturwissenschaften. Leipzig, Reclam 1909. [23]
8°, 136 + 290 S. — [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 25, 1910, 177. (—κ.)
- *Hellmann, G., Magnetische Kartographie in historisch-kritischer Darstellung. Berlin, Behrend 1909. [24]
Folio, 61 S. — [6 Mk.] — Veröffentlichungen des preussischen meteorologischen Instituts. — [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 25, 1910, 237—239. (KRÜGER.)
- Ahrens, W., Mathematische Unterhaltungen und Spiele. I (1910). [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 19, 1910, 86—87. (H. LIEBMANN.) — Bullet. d. sc. mathém. 34, 1910, 72—73. (J. T.) — Mathesis 10, 1910, 160—161. (H. B.) [25]
- Voss, A., Über das Wesen der Mathematik (1908). [Rezension:] Mathesis 10, 1910, 186—187. (P. M.) [26]
- Mikami, Y., A short notice on the mathematics in the far east in its development. [27]
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 23, 1910, 1—14.
- Loria, G., Le tradizioni matematiche dell'Italia (1908). [Wieder abgedruckt:] Atti del IV° congresso internazionale dei matematici (Roma 1908) 3, 1909, 402—421. [28]
- Guimarães, R., Les mathématiques en Portugal (1909). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 34, 1910, 105—106. (M. O.) [29]
- b) Geschichte des Altertums.
- Kewitsch, G., Zur Entstehung des 60-Systems. [30]
Arch. der Mathem. 16, 1910, 277. — Mit Bemerkungen von E. HOPPE S. 278—279.
- Miller, G. A., The sexagesimal system and the division of the circle. [31]
Science 31, 1910, 431—432.
- Haas, A. E., Die antiken Hypothesen über das Wesen der physikalischen Grundkräfte. [32]
Archiv für Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 2, 1910, 380—386
- Heath, T. L., The thirteen books of Euclid's Elements translated. I—III (1908). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11 (1908/9), 1910, 105—107. (G. L.) [33]
- Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii. Iterum edidit J. L. HEIBERG. Volumen I. Lipsiae, Teubner 1910. [34]
8°, XI + 445 S. — [6 Mk.]
- *Archimedes, Geometrical solutions derived from mechanics. Translated by J. L. HEIBERG. London 1910. [35]
8°. — [2½ sh.]
- Hammer-Jensen, Ingeborg, Die Druckwerke Herons von Alexandria. [36]
Neue Jahrbücher für das klassische Altertum 25, 1910.
- Rudio, F., Der Bericht des Simplicius über die Quadratur des Antiphan und des Hippokrates (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11 (1908/9), 1910, 101—102. (G. L.) [37]

c) Geschichte des Mittelalters.

Smith, D. E., *The Ganita-Sara-Sangraha of Mahaviracarya* (1908). [Wieder abgedruckt] Atti del IV° congresso internazionale dei matematici (Roma 1908) 3, 1909, 428—431. [38]

Wiedemann, E., Über die Kenntnisse der Muslime auf dem Gebiete der Mechanik und Hydrostatik. [39]
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 2, 1910, 394—398.

Heiberg, J. L. und Wiedemann, E., Ibn al Haitams Schrift über parabolische Hohlspiegel. [40]
Biblioth. Mathem. 10., 1909/10, 201—237.

Eneström, G., Über die Geschichte der Sternvielecke im Mittelalter. [41]
Biblioth. Mathem. 10., 1909/10, 277. — Anfrage.

Karpinski, L. C., Jordanus Nemorarius and John of Halifax. [42]
Americ. mathem. monthly 17, 1910, 108—113.

Duhem, P., Etudes sur Léonard de Vinci. I—II (1906—1909). [Rezension:] Arch. der Mathem. 16., 1910, 215—217. (E. HOPPE.) [43]

Stilleke, Der Lehrsatz des Hippokrates und die Geometrie krummliniger Figuren des Leonardo da Vinci. [44]
Zeitschr. für mathem. Unterr. 41, 1910, 203—207.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Eneström, G., Über das angebliche Dezimalbruchzeichen einiger der ältesten gedruckten Rechenbücher. [45]
Biblioth. Mathem. 10., 1909/10, 238—243.

Müller, Felix, Über die ältesten mathematischen Druckwerke (1482—1550) in der Stadtbibliothek zu Frankfurt am Main. [46]
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 19, 1910, 163—178.

Schottenhofer, K., Jakob Ziegler (1910). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 31, 1910, 1999—2000. (O. CLEMEN.) [47]

Pittarelli, G., Luca Pacioli usurpò per se stesso qualche libro di Piero de' Franceschi? [48]
Atti del IV° congresso internazionale dei matematici (Roma 1908) 3, 1909, 436—440.

Junge, G., Von wem rührt der Name „sectio divina“ her? [49]
Zeitschr. für mathem. Unterr. 41, 1910, 207.

Fratl, L., Scipione del Ferro. [50]
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 12, 1910, 1—5.

*Burger, C. P., Amsterdamsche rekenmeesters en zeevaartkundigen in de zestiende eeuw. Amsterdam, Langenhuyzen 1908. [51]
8°, XII + 226 S.

Le opere di GALILEO GALILEI. Edizione nazionale sotto gli auspici di sua maestà il re d'Italia. Volume XX ed ultimo. Firenze, Barbera 1909. [52]
4°, 589 + (1) S. — Herausgegeben von A. FAVARO.

Favaro, A., Galileo e le edizioni delle sue opere (1910). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 9, 1910, 369—374. (J. KLUG.) [53]

Del Lungo, I., L'edizione nazionale delle opere di Galileo. [54]
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti (sc. mor.) 19:1, 1910, 7 S. — [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 9, 1910, 374—375. (J. KLUG.)

Favaro, A., Presentando il volume ventesimo ed ultimo della edizione nazionale Galileiana. Comunicazione. [55]
Venezia, Istituto Veneto 69:1, 1910, 71—74. — [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 9, 1910, 374. (J. KLUG.)

Müller, Adolph, Galileo Galilei und das kopernikanische Weltssystem (1909). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 31, 1910, 1850—1855. (J. KLUG.) [56]

Favaro, A., Per il trecentesimo anniversario dalla scoperta del nuovo aspetto di Saturno fatta da Galileo. [57]
Rivista di astronomia (Torino) 4, 1910, 18 S. — [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 9, 1910, 376—378. (J. KLUG.)

Oeuvres de DESCARTES, publiées par CH. ADAM et P. TANNERY, sous les auspices du ministère de l'instruction publique. Le monde, Description du corps humain, Passions de l'âme, Anatomica, Varia. Tome XI. Paris, Cerf 1909. [58]
4°, XXIV + 710 + VIII S. + 16 Taf. — [Rezension:] Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 18., 1910, 298—306. (G. LECHALAS.)

Vassurn, G., La pubblicazione delle opere di Evangelista Torricelli, con alcuni documenti inediti. Faenza 1909. [59]
8°, 59 S. — [1 lra.] — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11 (1908/9), 1910, 104—105. (G. L.)

Meyer, Kirstine, De quelques manuscrits d'Ole Roemer. [60]
Bullet. d. sc. mathém. 34., 1910, 73—96.

Meyer, Kirstine, Ole Römer und das Thermometer. [61]
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 2, 1910, 323—349. — Hat wesentlich denselben Inhalt wie die vorausgehende Abhandlung.

Mehmke, R., Über die neue Rechenmaschine „Euklid“. Mit einer geschichtlichen Einleitung. [62]
Mitteil. des Württemberg. Bezirksvereins des Vereins deutscher Ingenieure 1, 1910, 17—19, 26—28.

- Hayashi, T.**, The „Fukudai“ and determinants in Japanese mathematics. [63
76kyō, Sōgaku-Buturigakkwai, Kizi 5., 1910,
254—271.]
- **Wilhelm, B.**, Die Anfänge der Luftfahrt
Lana-Gusmão. Zur Erinnerung an den
200. Gedenktag des ersten Ballonauf-
stiegs (8. Aug. 1709—8. Aug. 1909).
Hamm i. W., Breer 1909. [64
8°, VIII + 204 S. + 14 Taf. — [3 Mk.] — [Re-
zension:] Deutsche Literaturz. 31, 1910, 2037—
2038. (S. GÜNTHER.)
- Eneström, G.**, Verzeichnis der Schriften Leonhard
Eulers. I (1910). [Selbstbericht:] Deutsche Ma-
them.-Verein., Jahresber. 19, 1910, 151—152. —
[Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahres-
ber. 19, 1910, 121. [65]
- Stäckel, P.**, Einteilung der sämtlichen
Werke Leonhard Eulers [66
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 19, 1910,
104—116, 129—142.]
- Vivanti, G.**, Un tentativo di Eulero di
evitare le quantità complesse nella in-
tegrazione delle equazioni differenziali
lineari. [67
Biblioth. Mathem. 10., 1909/10, 244—249.]
- Bosmans, H.**, Sur une tentative d'édition des
Oeuvres complètes de L. Euler (1909). [Rezen-
sion:] Bullet. d. sc. mathém. 32., 1909, 258—260.
(J. T.) [68]
- Hennig, R.**, Die angebliche Kenntnis des
Blitzableiters vor Franklin. [69
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Tech-
nik 2, 1910, 97—136.]
- Marcolongo, R.**, Un trattato inedito di
meccanica di Vincenzo de Filippis an-
teriore alla Mécanique analytique de
Lagrange. [70
Atti del IV° congresso internazionale dei mate-
matici (Roma 1908) 3, 1908, 485—499.]
- Pittarelli, G.**, Due lettere inedite di
Lagrange all' abate di Caluso esistenti
nell' archivio storico municipale di
Asti. [71
Atti del IV° congresso internazionale dei mate-
matici (Roma 1908) 3, 1908, 554—556]
- Mansion, P.**, Sur les premières démon-
strations de l'équivalence des figures
symétriques. [72
Biblioth. Mathem. 10., 1909/10, 278. — Anfrago.]
- Burkhardt, H.**, Entwicklungen nach oscillierenden
Funktionen (1904). [Rezension:] Bollett. di bi-
bliogr. d. sc. matem. 11 (1908/9), 1910, 107—108.
(G. L.) [73]
- **Bryk, O.**, Entwicklungsgeschichte der
reinen und angewandten Naturwissen-
schaften im XIX. Jahrhundert. Erster
Band. Die Naturphilosophie und ihre
Überwindung durch die erfahrungs-
gemäße Denkweise (1800—1850). Leip-
zig, Barth 1909. [74
8°, XL + 654 S. — [15 Mk.] — [Rezension:]
Deutsche Literaturz. 31, 1910, 1593—1594. (F.
STRUNZ.) — Naturwiss. Rundschau 25, 1910,
177. (—K.)]
- Muir, Th.**, A fourth list of writings on
determinants. [75
Quart. Journ. of mathem. 23, 1907, 237—264.]
- Tannery, J.**, Manuscrits et papiers inédits de
Galois (1908). [Résumé:] Paris, Acad. d. sc.,
Comptes rendus 146, 1908, 674—676. (J. TAN-
NERY.) [76]
- Krazer, A.**, Die Erklärung der Vieldeutig-
keit der elliptischen Integrale bei Jacobi
und Puiseux. [77
Biblioth. Mathem. 10., 1909/10, 250—259.]
- Sturm, R.**, Gudermanns Urteil über die
Prüfungsarbeit von Weierstrass (1841).
Aus den Akten der Wissenschaftlichen
Prüfungskommission in Münster. [78
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 19, 1910,
160.]
- Muir, Th.**, The theory of axisymmetric
determinants in the historical order of
its development up to 1860. [79
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 27, 1907,
135—166.]
- Muir, Th.**, The theory of orthogonants in
the historical order of its development
up to 1860. [80
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 30, 1910,
265—290]
- Muir, Th.**, The theory of Hessians in the
historical order of its development up
to 1860. [81
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 28, 1908,
413—432.]
- Muir, Th.**, The theory of bigradients in
the historical order of its development
up to 1860. [82
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 30, 1910,
396—406.]
- Muir, Th.**, The theory of persymmetric
determinants in the historical order of
its development up to 1860. [83
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 30, 1910,
407—431.]
- Muir, Th.**, The theory of compound de-
terminants in the historical order of
its development up to 1860. [84
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 28, 1908,
197—209.]
- Muir, Th.**, The theory of skew deter-
minants in the historical order of its
development up to 1865. [85
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 28, 1908,
303—310.]

- Lampe, E.**, Auszug aus einem Schreiben von Weierstrass an Paul du Bois-Reymond. [86]
Berlin, Mathem. Gesellsch., Sitzungsber. 9, 1910, 53—56. — Vom 15. Dezember 1874 datiert.
- Königsberger, L.**, Über Helmholtz's Bruchstück eines Entwurfes betitelt: „Naturforscher-Rede“. [87]
Heidelberg, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 1910, Nr. 14, 8 S.
- Laparewicz, A.**, Bibliografia nauczania przedmiotów matematyczno-fizycznych. [88]
Wiadomości matem. 14, 1910, Supplement 95—133. — *Polsische Bibliographie der elementaren Mathematik und Physik 1897—1910.*
- Zühlke, P.**, Bericht über die seit 1901 erschienenen Schulbücher der darstellenden Geometrie. [89]
Berlin, Mathem. Gesellsch., Sitzungsber. 9, 1910, 46—50.
- Leben, E.**, Gaston Darboux (1910). [Rezension:] *L'enseignement mathém.* 12, 1910, 260. [90]
- Lebon, E.**, Henri Poincaré (1909). [Rezension:] *Nouv. ann. de mathém.* 10., 1910, 234—235. (C. B.) [91]
- Lebon, E.**, Emile Picard. Biographie, bibliographie analytique de ses écrits. Paris, Gauthier-Villars 1910. [92]
 Groß 8°, VIII + 80 S. + Porträt. — [7 fr.]
- *Poincaré, H.**, Savants et écrivains. Paris, Flammarion 1910. [93]
 18°, 280 S. — [2,50 fr.] — [Rezension:] *L'enseignement mathém.* 12, 1910, 259.
- Miller, G. A.**, American mathematical publications. [94]
Science 32., 1910, 75—76.
- Royal society of London. Catalogue of scientific papers 1800—1900. Subject index. I. Pure mathematics (1908). [Rezension:] *Biblioth. Mathem.* 10., 1909/10, 279—281. (G. ENSTRÖM.) — *Nature* 78, 1908, 597—598. [95]
- Royal society of London. Catalogue of scientific papers 1800—1900. Subject index. Volume II. Mechanics. Cambridge, university press 1909. [96]
 4°, LXXIII + 355 S. — [15 sh.]
- e) Nekrologe.
- William Edward Ayrton** (1847—1908). [97]
Leopoldina 44, 1908, 109. — *Nature* 79, 1908, 74—75. (J. PERRY.)
- Giuseppe Battaglini** (1826—1894). [98]
Resoconto delle onoranze del prof. GIUSEPPE BATTAGLINI. Napoli 1910.
- Henri Becquerel** (1852—1908). [99]
Il nuovo cimento 16., 1908, 263—267. (G. A. BLANC.) — *Leopoldina* 44, 1908, 98.
- Anton von Braunmühl** (1853—1908). [100]
Leopoldina 44, 1908, 45—46.
- Valentino Cerruti** (1850—1909). [101]
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 12, 1910, 28—32. (P. BURGATTI.)
- Ernst Gerland** (1838—1910). [102]
Naturwiss. Rundschau 25, 1910, 247—248. (H. GEITEL.)
 ROTHE, R., ERNST GERLAND zum Gedächtnis. Rede. Clausthal 1910.
 8°, 19 S. [mit Schriftenverzeichnis].
- William Huggins** (1824—1910). [103]
Naturwiss. Rundschau 25, 1910, 386—387. (A. B.)
- Jules Janssen** (1824—1907). [104]
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 17., 1, 1908, 293—297. (E. MILLOSEVICH.)
- Friedrich Kohlrausch** (1840—1910). [105]
Naturwiss. Rundschau 25, 1910, 153—154. (SCHEEL.)
- Alexander Korkin** (1837—1908). [106]
[Journal des Ministeriums des öffentlichen Unterrichts] 1908, Nr. 11, 25—46. (K. A. POSSÉ.) — Russisch.
- Albert Lancaster** (1849—1908). [107]
Leopoldina 44, 1908, 47. — *Nature* 78, 1908, 33—34.
- Gaston Lesplaut** (1823—1904). [108]
Bordeaux, Soc. d. sc., Mémoires 4., 1908, 1—17. (G. RAYET.)
- Lorenz Leonard Lindelöf** (1827—1908). [109]
Acta Mathem. 31, 1908, 407—408. (G. MITTAG-LEFFLER.)
- Maurice Loewy** (1833—1907). [110]
Leipzig, Astronom. Ges., Vierteljahrsschr. 43, 1908, 142—148. (E. WEISS.)
- Elie Mascart** (1837—1908). [111]
Il nuovo cimento 16., 1908, 357—360. (A. NACCARI.)
- Junius Massau** (1852—1909). [112]
L'enseignement mathém. 12, 1910, 187—200. (J. ROSE.)
- Luigi Federigo Menabrea** (1809—1896). [113]
Palermo, Circolo matem., Supplem. al rendic. 5, 1910, 21—24.
- Hermann Minkowski** (1864—1909). [114]
Mathem. Ann. 68, 1910, 445—471. (D. HILBERT; vgl. *Biblioth. Mathem.* 10., 1909/10, 285.)
- Adolph Paalzow** (1823—1908). [115]
Berlin, Deutsche physik. Ges., Verhandl. 10, 1908, 451—453. (H. RUBENS.)
- Louis Raffy** (1855—1910). [116]
L'enseignement mathém. 12, 1910, 322—324.
- Wilhelm Scheibner** (1826—1908). [117]
Leopoldina 44, 1908, 63.
- William Thomson, Lord Kelvin** (1824—1907). [118]
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 17., 1, 1908, 157—166. (P. BLASERNA.) — *Roma*, Accad. pontif.

- d. Nuovi Lincei, Atti 56, 1908, 74—75 (DE SANC-
TIS); Memorie 26, 1908, 285—311 (G. CO-
STANZO). — *Venezia*, Istituto Veneto, Atti 67,
1908/9, 69—71. (M. BELLATI.) — *Annalen der*
Physik 25, 1908, 1—6. (W. WIEN.) — *Leopol-*
dina 44, 1908, 36—37. — *Mathem.-naturwiss.*
Blätter 5, 1908, 38. (L. GREBE.)
- A. GRAY, *Lord KELVIN, an account of his scientific*
life and work. London, Dent 1908.
8°, IX + 318 S.
- Edmund Wright (?—1910). [119]
Science 31, 1910, 342.
- f) Aktuelle Fragen.
- Du Bois-Reymond, P., Was will die
Mathematik und was will der Mathe-
matiker? [120]
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 19, 1910,
190—198. — Mitgeteilt von E. LAMPE.
- André, D., *Des notations mathématiques* (1909).
[Rezension:] *Deutsche Literaturz.* 31, 1910, 1969
—1972. (R. FRICKK.) — *L'enseignement mathém.*
12, 1910, 260—261. (H. F.) [121]
- Redaktionsplan für die Eulerausgabe. [122]
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 19, 1910,
94—103.
- Ahrens, W., Latein oder Deutsch? Die „Sprachen-
frage“ bei der Herausgabe der Werke Leonhard
Eulers (1910). [Rezension:] *Arch. der Mathem.*
16, 1910, 247—248. (E. HOPPE.) [123]
- [Deutsche Mathematiker-Versammlung in
Salzburg 1909.] [124]
Zeitschr. für mathem. Unterr. 41, 1910, 98—100.
(A. WITTING.)
- [Russische Mathematiker-Versammlung in
Moskau 1910.] [125]
L'enseignement mathém. 12, 1910, 318—322.
(V. V. BOBYNIN.)

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Dr. S. ALBRECHT am „Lick observatory“ zum Astronom an der Nationalsternwarte in Argentinien.

— M. J. BABB in Philadelphia zum Professor der Mathematik an der Universität von Pennsylvania daselbst.

— Dr. R. H. BAKER am „Allegheny observatory“ zum Professor der Astronomie an der „Brown university“.

— Dozent H. BÉNARD in Lyon zum Professor der allgemeinen Physik an der Universität in Bordeaux.

— CH. H. BURNSIDE in Madison zum Professor der Mathematik an der „Columbia university“ in New York.

— Professor K. CARATHEODORY in Hannover zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Breslau.

— Dr. W. B. CARVER in Ithaca zum Professor der Mathematik an der „Cornell university“ daselbst.

— Dr. G. G. CHAMBERS in Philadelphia zum Professor der Mathematik an der Universität von Pennsylvania daselbst.

— Dr. F. L. CHASE zum Direktor des „Yale Observatory“ in New Haven.

— Privatdozent E. EBELER in Heidelberg zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— P. F. EVERITT zum Professor der Mathematik am „University college“ in London.

— Privatdozent F. M. EXNER in Wien zum Professor der kosmischen Physik an der Universität in Innsbruck.

— Dr. E. FISCHER zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Brünn.

— Professor PH. FURTWÄNGLER in Aachen zum Professor der Mathematik an der

Landwirtschaftlichen Hochschule in Poppelsdorf.

— Privatdozent L. GABEREL in Neuchâtel zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. O. E. GLENN in Philadelphia zum Professor der Mathematik an der Universität von Pennsylvania daselbst.

— „Instructor“ N. C. GRIMES in Madison zum Professor der Mathematik an der Universität von Arizona.

— Dr. C. C. GROVE in New York zum Professor der Mathematik an der „Columbia university“ daselbst.

— Dozent J. GUINCHANT in Caen zum Professor der Experimentalphysik an der Universität in Bordeaux.

— Professor J. HARTMANN in Göttingen zum Professor der Astronomie an der Universität in Wien.

— A. S. HAWKSWORTH in Pittsburgh zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor P. HEEGAARD in Kopenhagen zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor G. HESSENBERG in Poppelsdorf zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Breslau.

— L. I. HEWES zum Professor der Mathematik am „Whitman college“.

— Professor H. HOHENNER in Braunschweig zum Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule in Darmstadt.

— F. JACKSON zum Professor der Mathematik am „University college“ in London.

— Professor J. H. JEANS in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität in Cambridge, England.

— Dr. L. C. KARPINSKI in New York zum Professor der Mathematik an der Universität von Michigan in Ann Arbor.

— Professor G. LAURICELLA in Catania zum Professor der Höheren Analysis an der Universität in Rom.

— Professor A. S. McKENSIE in Halifax zum Professor der Physik am „Stevens institute of technology“.

— Professor M. MASON in Madison zum Professor der mathematischen Physik an der Universität von Wisconsin daselbst.

— Dr. E. MEISSNER zum Professor der rationellen Mechanik am Polytechnikum in Zürich.

— Dr. U. G. MITCHELL in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität von Kansas.

— Dr. W. M. MITCHELL in Philadelphia zum Professor der Mathematik an der Universität von Michigan in Ann Arbor.

— Dr. H. W. MORSE in Cambridge, Mass., zum Professor der Physik an der „Harvard university“ daselbst.

— Privatdozent CONRAD H. MÜLLER in Göttingen zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Hannover.

— E. F. NORTHRUP in Princeton zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. O. PERRON in München zum Professor der Mathematik an der Universität in Tübingen.

— Miss M. PICK zum Professor der Mathematik am „University college“ in London.

— Dr. A. PITCHER in Chicago zum Professor der Mathematik an der Universität von Kansas.

— „Instructor“ E. W. PONZER in Champaign zum Professor der angewandten Mathematik an der „Stanford university“, California.

— Professor CH. L. POOR in New York zum Professor der Himmelsmechanik an der „Columbia university“ daselbst.

— Dr. A. RANUM in Ithaca zum Professor der Mathematik an der „Cornell university“ daselbst.

— Dozent G. ROSMANITH in Prag zum Professor der Versicherungsmathematik an der deutschen Technischen Hochschule daselbst.

— Privatdozent CL. SCHÄFER in Breslau zum Abteilungsvorsteher am Physikalischen Institut der Universität daselbst.

— Dr. F. R. SHARPE in Ithaca zum Professor der Mathematik an der „Cornell university“ daselbst.

— Professor E. B. SKINNER in Madison zum Professor der Mathematik an der „Cornell university“ in Ithaca.

— B. J. SPENCE zum Professor der Physik an der Universität von North Dakota.

— Professor E. STEINITZ in Berlin zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Breslau.

— Dozent E. STÜBLER in Stuttgart zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule daselbst.

— „Instructor“ E. M. TERRY in Madison zum Professor der Physik an der Universität von Wisconsin daselbst.

— C. B. UPTON in New York zum Professor der Mathematik am „Teachers college“ daselbst.

— Professor S. VALENTINER in Hannover zum Professor der Physik an der Bergakademie in Clausthal.

— E. M. WELLISCH in Cambridge zum Professor der Physik an der „Yale university“ in New Haven.

— Professor G. B. WENDELL am „Stevens institute“ zum Professor der Physik an der „Columbia university“ in New York.

— Dr. M. B. WHITE in Chicago zum Professor der Physik an der Universität von Kansas.

— Professor W. WIEN in Danzig zum Professor der Physik an der Universität in Jena.

— Professor E. J. WILCZYNSKI in Urbana zum Professor der Mathematik an der Universität in Chicago.

— Professor A. H. WILSON in Auburn zum Professor der Mathematik am „Haverford college“.

— „Instructor“ H. L. WOLFF in Madison zum Professor der Mathematik an der Universität von Wisconsin daselbst.

— Professor J. W. YOUNG in Urbana zum Professor der Mathematik an der Universität von Kansas.

Todesfälle.

— GEORGE FREDERIC BARKER, früher Professor der Physik an der Universität von Pennsylvania in Philadelphia, geboren in

Charlestown den 14. Juli 1885, gestorben in Philadelphia den 24. Mai 1910.

— BERNARD BRUNHES, Direktor des meteorologischen Observatoriums des „Puy de Dôme“, geboren in Toulouse den 8. Juli 1867, gestorben in Clermond-Ferrand im Mai 1910.

— AUGUSTE CHARLOIS, Astronom an der Sternwarte in Nizza, geboren zu La Cadière den 26. November 1864, gestorben im April 1910.

— BRYAN COOKSON, Assistent an der Sternwarte in Cambridge, gestorben 1909, 36 Jahre alt.

— THOMAS H. CORE, früher Professor der Physik am „Owens college“ in Manchester, gestorben den 9. Juli 1910, 74 Jahre alt.

— GEORGE DAVIDSON, Professor der Astronomie an der Universität von Kalifornien in Berkeley, geboren in Nottingham, England, den 9. Mai 1825, gestorben den 9. Mai 1910.

— J. RAYNER EDMANDS, Assistent an der Sternwarte der „Harvard university“ in Cambridge, Mass., gestorben den 26. März 1910, 60 Jahre alt.

— JOHANN GOTTFRIED GALLE, früher Professor der Astronomie an der Universität in Breslau, geboren zu Gräfenhainichen bei Wittenberg den 9. Juni 1812, gestorben in Potsdam den 11. Juli 1910.

— WILLIAM HUGGINS, Astrophysiker, geboren in London den 7. Februar 1824, gestorben daselbst den 13. Mai 1910.

— JULIUS PETERSEN, früher Professor der Mathematik an der Universität in Kopenhagen, geboren in Sorø den 16. Juni 1839, gestorben in Kopenhagen im August 1910.

— LOUIS RAFFY, Professor der Mathematik an der Universität in Paris, geboren in Toulouse den 21. März 1855, gestorben in Paris den 9. Juni 1910.

— GIOVANNI SCHIAPARELLI, früher Direktor der Sternwarte in Mailand, geboren zu Savigliano den 14. März 1835, gestorben in Mailand den 4. Juli 1910.

— ALEKSEI PETROWITSCH SOKOLOFF, früher Vizedirektor der Sternwarte zu Pulkowa, geboren in Moskau den 17. Februar (a. St.) 1853, gestorben den 26. April 1910.

— JULIUS WEINGARTEN, Honorarprofessor an der Universität in Freiburg i. Br., geboren in Berlin den 25. März 1836, ge-

storben in Freiburg i. Br. den 16. Juni 1910.

— ADOLF WINKELMANN, Professor der Physik an der Universität in Jena, geboren zu Dorsten (Westfalen) den 17. Oktober 1848, gestorben den 24. Juli 1910.

— WILHELM WINKLER, Astronom, geboren zu Eisenberg den 16. August 1842, gestorben in Jena den 17. Juni 1910.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. FÖRSTER für das Sommersemester 1910 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der neueren Astronomie und für das Wintersemester 1910/11 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der alten Astronomie angekündigt.

— At the Indiana university in Bloomington Professor D. A. ROTHROCK will deliver during the academic year 1910—1911 a course (three hours each week) on the history of mathematics.

— An der Universität in Göttingen haben für das Wintersemester 1910—1911 Professor F. KLEIN eine vierstündige Vorlesung über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert und Professor CONRAD H. MÜLLER eine zweistündige Vorlesung über die Geschichte der Entdeckung der Infinitesimalrechnung angekündigt.

— An der Universität in Jena hat Professor FELIX AUERBACH für das Wintersemester 1910—1911 eine zweistündige Vorlesung über die Geschichte der Physik im 19. Jahrhundert angekündigt.

— An der Universität in Neapel hat Professor F. AMODEO für das akademische Jahr 1910—1911 eine dreistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter bis zum Jahre 1200 angekündigt.

— At the Columbia university (New York) Professor D. E. SMITH will deliver during the academic year 1910—1911 a course (two lectures each week) on the history of mathematics. Professor SMITH has delivered during the summer session 1910 brief courses on history of algebra and geometry.

— An der Universität in Padua hat Professor A. FAVARO für das akademische

Jahr 1910—1911 eine dreistündige Vorlesung über das Studium der Mathematik an der Universität in Padua während des 14. bis 17. Jahrhunderts angekündigt.

— An der Universität in Straßburg hat Professor M. SIMON für das Wintersemester 1910—1911 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik von den Arabern bis zur Verbreitung infinitesimaler Methoden angekündigt.

Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften.

— *Preußische Akademie der Wissenschaften in Berlin.* Preisaufgabe für 1914. Die Klassenzahl des allgemeinsten Kreiskörpers soll berechnet und mit der Klassenzahl seiner Divisoren verglichen werden. — STEINERSche Preisaufgabe für

1914. Es sollen die nicht zerfallenden Flächen fünften Grades bestimmt und hinsichtlich ihrer wesentlichen Eigenschaften untersucht werden, auf denen eine oder mehr als eine Schar von im allgemeinen nicht zerfallenden Kurven zweiten Grades liegt. Es wird gefordert, daß zur Bestätigung der Richtigkeit und Vollständigkeit der Lösung ausreichende analytische Erläuterungen den geometrischen Untersuchungen beigegeben werden.

Vermischtes.

— Eine schweizerische mathematische Gesellschaft ist kürzlich gebildet worden, und ihre erste Sitzung hat vom 4. bis 7. September 1910 in Basel stattgefunden. Die Zahl der Mitglieder betrug etwa 100.

Namenregister.

- Abbati**, P., 318, 319, 325.
Abel, N. H., 253, 258, 319.
Abraham Ecchellensis, 176.
Abraham, M., 191.
Abu Gafar al-Chazin, siehe El-Chazin.
Abu Kamil Shogia ben Aslam ben Muhammed, 15, 33—35, 37—42, 187.
Abul-Dschud, 156.
Abu'l Hasan Tabit ben Qurra, siehe Tabit ben Qurra.
Abul-Raihan, 160.
Abul-Wefa Albuzdjani, 157.
Abu Nasr Mansur ben Ali ben Irak, 156, 157.
Abu Othman, 134, 151, 154.
Abu Said el-Sidjzi, siehe El-Sidjzi.
Adam, Ch., 355, 357.
Adams, E. P., 93.
Adams, J. C., 52.
Adler, A., 191.
Aegidius de Columna, 280.
Ahmes, 49, 90.
Ahrens, W., 89, 91, 92, 185, 186, 188, 190, 282—285, 355, 356, 360.
Al-Ansari, siehe El-Ansari.
Alasia, Chr., 185, 188.
Albattani, siehe El-Battani.
Alberti, L. B., 236.
Alberuni, siehe El-Biruni.
Albrecht, S., 361.
Al-Chazin, siehe El-Chazin.
Al-Chodjendi, siehe El-Chodjendi.
d'Alembert, J., 83, 336.
Alexander, 204, 206.
Alexander, A., 344, 345.
Alexander der Große, 332.
Aley, R. J., 191.
Al-Farabi, siehe El-Farabi.
Al-Farisi, siehe El-Farisi.
Alhacen, siehe Ibn al Haitam.
Al Hasan ben al Hasan ben al Haitam, siehe Ibn al Haitam.
Alkalasadi, siehe El-Qalasadi.
Alkhwarismi, 37, 41, 59, 90.
Al-Kifti, siehe El-Kifti.
Allibone, A., 161.
Allman, G. J., 110, 113, 126, 146.
Alphons von Kastilien, 51.
Al-Sachawi, siehe El-Sachawi.
Al-Sidjzi, siehe El-Sidjzi.
Al-Singari, siehe El-Singari.
Amaldi, U., 288.
Amanzio, D., 285, 287.
Amodeo, F., 89, 91, 95, 185, 187, 189, 363.
Amplonius, 232.
Anaxagoras, 130.
Anaximander, 49.
Anderson, A., 265, 266.
André, D., 185, 189, 282, 286, 355, 360.
Anglès, R., 56, 57, 167.
Ångström, K., 192.
Ansari, siehe El-Ansari.
Anthemios, 201, 202, 206, 219, 235, 236.
Anthiaume, A., 282, 288.
Anthonisz, A., 196.
Antifon, 138, 356.
Apelt, O., 145, 146, 151—153.
Apollonios, 50, 103, 105, 116, 117, 129, 134, 135, 176, 203, 209, 222, 223, 232, 235, 236, 265, 266, 332, 341.
Aquinas, 169.
Arbogast, L. F. A., 280.
Archibald, R. C., 282, 285.
Archimedes, 50, 53, 54, 87, 101, 107, 138, 139, 145, 146, 187, 195, 196, 201—203, 206, 219, 231—233, 235—237, 288, 341, 355, 356.

- Archytas, 49, 126, 208.
 Aristarchos, 50, 332, 335.
 Aristofanes, 90.
 Aristoteles, 50, 98, 103, 105, 129, 130,
 133, 135, 139, 142—144, 146—154, 164,
 182, 332, 333.
 Arndt, Th., 93.
 Arneth, A., 10, 11.
 Arnold, W. T., 205.
 Arrillaga, F. de P., 282, 286.
 Aryabhatta, 195, 289—292.
 Atelhard von Bath, 277.
 Aubry, A., 89, 91, 185, 188.
 Auerbach, F., 89, 185, 282, 355, 363.
 Ayrton, W. E., 359.

Babb, M. J., 361.
 Bachmann, P., 317.
 Bacon, R., 51, 185, 187, 205, 233, 236,
 237, 293, 307.
 Baillaud, B., 89, 92, 282, 285.
 Bailly, J. S., 333, 336.
 Baker, R. H., 361.
 Ball, W. W. R., 85—89, 185, 186, 355,
 356.
 Baltzer, R., 278.
 Bannerji, H. C., 291.
 Barbarin, P., 282, 286.
 Barker, G. F., 362.
 Barkla, C. G., 93.
 Barrau, J. A., 93.
 Barrow, I., 52, 71.
 Battaglini, G., 324, 325, 359.
 Bäumker, Cl., 282, 284.
 Becker, A., 186, 285.
 Becker, F., 185, 189.
 Becquerel, H., 359.
 Belger, Chr., 202.
 Bellati, M., 355, 360.
 Beltrami, E., 330.
 Bénard, H., 361.
 Benedict, Suzan, 89, 90.
 Berberich, A., 89, 91, 92.
 Bergk, T., 118.
 Bernardus, B., 169.
 Bernhardt, G., 126.
 Bernoulli, D., 79, 188, 276, 315.
 Bernoulli, Jak. I., 6, 46, 47, 52, 83, 178.
 Bernoulli, Joh. I., 6, 45, 52, 83, 252.
 Bernoulli, Nik. I., 83.
 Bernoulli, Nik. II., 79.
 Berry, A., 336.
 Bertrand, J., 319, 322, 323.
 Bertrand, L., 91.
 Bessarion, J., 187.
 Bessel, F. W., 254.
 Betti, E., 323—325.
 Bhaskara, 291.
 Bhau Daji, 289, 290.
 Bianchi, L., 325.
 Bidlingmaier, Fr., 191.
 Bidwell, Sh., 189, 192.
 Biedenkapp, G., 282, 285.
 Bierens de Haan, D., 72.
 Billy, J. de, 282, 284.
 Biot, J. B., 70, 77.
 Birkenmajer, L., 89, 90.
 Biruni, siehe El-Biruni.
 Bishop, Fr. L., 191.
 Bjelankin, J., 185, 190.
 Björling, C. F. E., 287.
 Björnbo, A. A., 89, 90, 185, 187, 232,
 233, 293.
 Blackburn, H., 192, 285.
 Blanc, G. A., 355, 359.
 Blancanus, J., 149.
 Blaserna, P., 355, 359.
 Blaß, F., 142, 144, 145.
 Bloch, L., 89, 91.
 Bobynin, V. V., 288, 355, 360.
 Boccardi, G., 287.
 Bochart, A., 324.
 Bock, A., 287.
 Boer, F. de, 94.
 Boggio, T., 93, 191.
 Bolyai, W., 285.
 Bolza, O., 327, 328.
 Bombelli, R., 63, 66, 183, 265.
 Boncompagni, B., 38, 39, 54, 242, 334.
 Bonitz, H., 148.
 Bonola, R., 89, 90, 355, 356.
 Bonucci, A., 236.
 Bopp, K., 185, 187.
 Borel, E., 93, 282, 285.
 Borelli, J. A., 176.
 Börgen, C. N. J., 94.
 Borgi, P., 238—241.
 Borromeo, F., 284.

- Bosmans, H., 89—91, 185—189, 282—284, 355, 356, 358.
 Bosscha, J., 282, 284.
 Bouquet de la Grye, A., 192.
 Bourget, H., 89, 92.
 Bourguet, L., 79.
 Boutroux, P., 93, 355, 356.
 Bouvelles, Ch. de, 60, 170.
 Bowser, E., 287.
 Braasch, J., 89, 91.
 Bradshaw, J. W., 191.
 Brahe, Tyge, 51, 334, 335.
 Brahmagupta, 289—292.
 Braikenridge, W., 91.
 Braunmühl, A. von, 92, 157, 359.
 Brenke, W. C., 191.
 Bretschneider, C. A., 110.
 Briggs, H., 51.
 Brill, A., 250, 257.
 Bromwich, T. J. F'a, 93.
 Brown, E. W., 282, 285.
 Brown, H. L., 93.
 Brown, W., 191.
 Brunhes, B., 363.
 Bruns, I., 119, 120, 122—124.
 Brunschvicg, L., 282, 283.
 Bryk, O., 355, 358.
 Bryson, 137.
 Bubnov, N., 54, 55, 170.
 Buchka, K von, 185, 282, 355.
 Burgatti, P., 355, 359.
 Burger, C. P., 355, 357.
 Bürgi, J., 51.
 Burkhardt, H., 321, 355, 358.
 Burnell, A. C., 289.
 Burnside, Ch. H., 361.
 Burnside, W., 324—327, 329.
 Cabreira, A., 282, 285.
 Cajori, F., 161, 185, 186, 188, 282, 284.
 Calixtus III., 187.
 Calogerà, A., 78.
 Caluso, T. V. di, 358.
 Camp, B. H., 191.
 Campanus, J., 168, 169, 171, 172, 262, 263, 277.
 Cantor, M., 6, 10, 12, 43—46, 53, 54, 57—59, 62, 63, 65—71, 73, 75—79, 81, 82, 86, 87, 89, 90, 102, 106, 110, 111, 113, 115, 116, 132, 164, 165, 167—172, 174—179, 181, 183, 185, 195, 202, 238, 239, 241—243, 260—265, 267—276, 280, 282, 334, 341, 346, 348, 349, 355.
 Capelli, A., 285, 287, 325.
 Caratheodory, A., 156, 157, 159.
 Caratheodory, K., 361.
 Cardano, G., 51, 60, 183, 187, 237, 264, 265, 269, 270.
 Cardinaal, J., 282.
 Carrara, B., 282, 283.
 Carver, W. B., 361.
 Casiri, M., 203.
 Castelnuovo, G., 185, 355.
 Castillon, J., 352.
 Cauchy, A. L., 139, 251—254, 256—259, 317—324.
 Cavalieri, B., 68, 91, 176.
 Cayley, A., 326.
 Cerruti, V., 94, 285, 359.
 Ceulen, L. van, 284.
 Ceva, T., 284.
 Chambers, G. G., 361.
 Chang Chiu-chien, 193.
 Chang Hêng, 193, 197.
 Chang Yu-chin, 197.
 Charlois, A., 363.
 Chase, F. L., 361.
 Chasles, M., 64.
 Châtelain, E., 231.
 Chaturveda, 291.
 Ch'ên Huo, 198.
 Ch'ên Luan, 193.
 Cherbuliez, E., 95.
 Ch'ien T'ang, 198.
 Chih, 199.
 Christ, W., 117, 119, 128.
 Chu Hung, 200.
 Chu K'e-fêng, 198, 199.
 Clavius, Chr., 78, 172, 180.
 Clemen, O., 357.
 Cobet, C. G., 146.
 Cohen, H., 187.
 Cohn, F., 93.
 Coignet, M., 188.
 Cole, F. N., 282, 324, 327, 328.
 Colebrooke, H. T., 289—292.
 Collijn, I., 89, 90.
 Collins, J., 70, 77, 84.

- Commandino, F., 176.
 Conway, A. W., 191.
 Cookson, B., 363.
 Copernicus, siehe Koppernikus.
 Core, Th. H., 363.
 Costanzo, G., 355, 360.
 Cotton, E., 287.
 Craig, Th., 327.
 Cremona, L., 285.
 Cuervo, R. J., 36.
 Curtze, M., 54, 56, 57, 59, 167, 168, 232, 237, 241, 331.
 Cusa, N. von, 51.
 Czuber, E., 192.

Dalman, G. H., 35.
 Dannemann, F., 89, 90, 185, 186.
 Darboux, G., 285, 359.
 Davidson, G., 363.
 Davis, B., 93.
 Debeaune, Fl., 174.
 Dechaies, C. F. M., 67, 176, 269 — 272.
 Decourdemanche, J. A., 282, 283.
 Dedekind, R., 139, 323 — 325.
 De' Franceschi, P., 357.
 Degli Angeli, St., 67, 68, 175, 176.
 Deimel, R. F., 191.
 Delambre, J. B., 333, 336.
 Del Ferro, Sc., 357.
 Delisle, J. N., 310, 311, 313.
 Del Lungo, I., 355, 357.
 De' Marchi, L., 149.
 Dembowski, H., 334.
 Demokritos, 98, 115, 141, 144 — 148, 151.
 Derenbourg, H., 203.
 Desargues, G., 52.
 Descartes, R., 52, 63 — 65, 78, 80, 174 — 176, 271, 355, 357.
 Dickson, L. E., 329.
 Diels, H., 108, 141, 144 — 146.
 Dingeldey, F., 89, 91.
 Dintzl, E., 185, 190.
 Diofantos, 13, 50, 280.
 Diogenes Laertius, 125, 130, 141, 144, 146, 152.
 Diokles, 202 — 204.
 Dirichlet, P. G. L., 323.
 Disselhorst, H., 287.
 Diuklis, siehe Diokles.

 Dolbear, A. E., 287.
 Domalip, K., 287.
 Dozy, R., 204.
 Du Bois-Reymond, P., 355, 359, 360.
 Dufour, H., 287.
 Duhem, P., 89, 90, 96, 185 — 187, 282 — 284, 335, 355, 357.
 Du Pasquier, L. G., 89, 91, 96, 192, 282, 284.
 Dupuy, L., 201.
 Dürer, A., 282, 284.
 Dyck, W., 321, 324.

Ebeling, R., 144, 282, 283.
 Ebert, W., 307.
 Ebler, E., 361.
 Ecchellensis, siehe Abraham Ecchellensis.
 Eckart, R., 185, 188, 282, 285.
 Edmands, J. R., 363.
 Egerer, H., 287.
 Eimbeck, W., 92, 94.
 Einstein, A., 93, 192.
 El-Ansari, 202.
 El-Battani, 157, 334.
 El-Biruni, 156, 157, 160, 289 — 292.
 El-Chazin, 203.
 El-Chodjendi, 157, 283.
 El-Farabi, 206.
 El-Farisi, 205.
 El-Hassar, 16, 166, 167.
 El-Khodjendi, siehe El-Chodjendi.
 El-Khwarismi, siehe Alkhwarismi.
 El-Kifti, 277.
 Elliott, E. C., 185, 189.
 El-Qalasadi, 16.
 El-Sachawi, 202.
 El-Sidjzi, 156, 160.
 El-Singari, 202.
 Eneström, G., 1, 5, 8, 9, 12, 43, 54 — 61, 63 — 65, 67 — 84, 88 — 91, 164, 165, 167 — 170, 172, 174 — 180, 184 — 186, 188, 238, 261 — 263, 265, 268 — 277, 281 — 284, 308, 341, 345, 346, 349, 350, 354, 355, 357 — 359.
 Engel, Fr., 89, 92, 192, 282, 285.
 Eratosthenes, 50, 203.
 Erk, F., 94.
 Eudemos, 98, 126, 130, 133 — 135, 144, 148, 154.

- Eudoxos, 50, 146, 154, 332, 333.
 Eukleides von Alexandria, 21, 30—34, 36, 39, 50, 53, 72, 78, 89, 90, 97—99, 101, 104, 105, 110, 113—116, 128, 130—135, 137, 142, 144, 146, 150—155, 168, 169, 171, 172, 187, 204, 205, 211, 236, 237, 262, 270, 277, 282, 283, 317, 318, 333, 341, 344, 355, 356.
 Eukleides von Megara, 118—120.
 Euler, J. A., 285.
 Euler, L., 3, 4, 46, 47, 52, 80—83, 91, 92, 95, 179, 188, 190, 192, 244, 245, 247, 251, 252, 275, 276, 284—286, 308—316, 318, 334, 350, 358, 360.
 Eurytos, 180.
 Eutokios, 103, 202, 203, 341, 356.
 Everitt, P. F., 361.
 Exner, F. M., 361.
 Faber, G., 93, 287.
 Faidros, 117.
 Faifofer, A., 92, 95.
 Faraday, M., 91.
 Fatio de Duillier, N., 73, 75, 76.
 Favaro, A., 95, 185, 187, 188, 266, 282, 284, 355—357, 363.
 Fazzari, G., 89.
 Fehr, H., 89, 92, 185, 188, 189.
 Felber, V., 185, 188.
 Fenner, P., 192.
 Fermat, P. de, 52, 91, 283, 284, 350.
 Ferrari, L., 51, 346.
 Festa, N., 130.
 Fibonacci, siehe Pisano.
 Fields, J. C., 185, 190.
 Filebos, 117.
 Filippis, V. de, 358.
 Filippos, 135, 154.
 Filolaos, 180, 331.
 Filon von Byzanz, 203.
 Finzi, Mordechai, 28, 34—36, 41, 42.
 Fischer, E., 361.
 Fischer, H., 257.
 Fischer, K. T., 287.
 Fischer, P. B., 91.
 Fite, W. B., 287.
 Fleck, A., 283.
 Forbes, G., 185, 186.
 Förster, W., 95, 363.
 Fox, Ph., 93.
 Franklin, B., 358.
 Franklin, F., 327.
 Frati, L., 355, 357.
 Fréchet, M., 93.
 Fréret, N., 322.
 Freund, L., 185.
 Fricke, R., 360.
 Friedlein, G., 110, 151.
 Fritsch, C., 191.
 Frobenius, G., 324—326.
 Fueter, R., 185, 189.
 Furtwängler, Ph., 361.
 Fuß, N., 308—310, 312, 313, 315, 316.
 Fuß, P. H., 3, 89, 91, 179, 282, 285, 315.
 Ghaberel, L., 361.
 Galilei, G., 51, 90, 185, 187, 188, 283, 284, 355, 357.
 Galle, J. G., 363.
 Galois, E., 92, 188, 318—321, 323—325, 329, 358.
 Ganesa, 291.
 Gans, R., 282, 284.
 Gauß, K. F., 46, 47, 181, 185, 188, 254, 282, 285, 318, 324.
 Geer, P. van, 89, 91.
 Gegenbauer, L., 279.
 Geitel, H., 355, 359.
 Geminus, 103, 131, 341.
 Gerbert, 51, 54—56, 89, 90, 170, 283.
 Gerhard, C. I., 10—12, 43—45, 70, 71, 74, 76, 77, 80, 83, 84, 238, 239, 241, 242, 274, 275.
 Gerland, E., 90, 185, 186, 188, 288, 359.
 Germain, Sophie, 285.
 Gerth, B., 112.
 Geßner, C., 237.
 Gherardo Cremonese, 34, 233.
 Ghetaldi, M., 265, 266, 284.
 Gibson, G. A., 191.
 Girard, A., 62, 63, 183.
 Glenn, O. E., 361.
 Goeje, M. J. de, 205.
 Gogava, A., 205, 231, 237.
 Goldbach, Chr., 179, 313, 316.
 Gompertz, Th., 117, 128—130, 141, 146.
 Görges, E., 185, 186.
 Gorgias, 144.

- Gothard, E. von, 95.
 Graaf, A. de, 78.
 Gram, J. P., 280.
 Grammateus, H., 183.
 Grandi, G., 274, 284.
 Graßmann, H., 92, 189, 192, 285.
 Gravelaar, N. L. W. A., 185, 187.
 Gray, A., 355, 360.
 Gray, G. J., 185, 188, 351—354.
 Grebe, L., 355, 360.
 Gregory, J., 70, 71, 348, 349.
 Griffin, F. L., 93.
 Grimes, N. C., 361.
 Großmann, E., 287.
 Grove, C. C., 361.
 Grübler, M., 192.
 Gudermann, Chr., 358.
 Guimarães, R., 185, 186, 282, 283, 355, 356.
 Guinchant, J., 361.
 Gundelfinger, S., 89, 91, 250, 254.
 Günther, L., 89, 91, 185, 188.
 Günther, S., 60, 89—92, 110, 111, 185, 188, 192, 277, 340, 345, 355, 356, 358.
 Gusmão, L. de, 358.
 Guthe, K. E., 93.

Haas, A. E., 90, 185, 186, 282, 283, 355, 356.
 Hadamard, J., 93.
 Hahn, H., 93, 192.
 Haij ben Jaqzân, 307.
 Halley, E., 186, 187, 273.
 Halliwell, J. O., 58.
 Hammer-Jensen, Ingeborg, 355, 356.
 Hancock, E. L., 191.
 Hankel, H., 13, 102, 103, 106, 110, 115.
 Hanna, U. S., 191.
 Harms, F., 287.
 Harriot, Th., 65, 80.
 Hartman, L., 93.
 Hartmann, J., 191, 361.
 Hartmann, N., 185, 187.
 Hartwell, G. W., 191.
 Hase, K. B., 231.
 Haseman, Chr., 191.
 Haskins, C. N., 191.
 Haskins, Ch. H., 282, 283.
 Hausdorff, F., 287.
 Hawkes, H. E., 287.

 Hawsworth, A. S., 361.
 Hayashi, T., 89, 91, 185, 188, 199, 355, 358.
 Heath, T. L., 89, 90, 202, 282, 283, 355, 356.
 Heegaard, P., 361.
 Heiberg, J. L., 87, 108, 105, 108, 113, 115, 128, 129, 134, 145, 148—154, 164, 185, 187, 201—203, 236, 277, 282, 283, 293, 341, 355—357.
 Heinze, R., 151, 152.
 Hellmann, G., 355, 356.
 Helmholtz, H. von, 359.
 Hennig, R., 355, 358.
 Hepperger, J. von, 191.
 Herakleides, 332, 334, 335.
 Herakleitos, 122.
 Heriger von Lobbes, 89, 90.
 Hermann, J., 3, 4, 80.
 Hermite, Ch., 89, 92, 319, 323.
 Hermotimos, 154.
 Heron, 50, 133, 150, 165, 187, 203, 356.
 Hertzner, H., 189.
 Hertzprung, E., 191.
 Herzog, A., 92, 95, 189, 285.
 Herzog, J. W., 309.
 Hessenberg, G., 361.
 Hewes, L. I., 361.
 Heyne, Chr. G., 188.
 Hiketas, 331.
 Hilb, E., 93.
 Hilbert, D., 282, 285, 355, 359.
 Hill, G. W., 185, 189.
 Hiller, E., 103.
 Hiob, 337.
 Hipparchos, 50, 332.
 Hippias, 49, 98, 104, 105, 138, 140, 150.
 Hippokrates, 49, 112, 115, 129—131, 138, 356, 357.
 Hipponikos, 129.
 Hirzel, R., 119.
 Hobson, E. W., 287.
 Hoecke, G. van der, 87.
 Hohenner, H., 361.
 Hölder, O., 282, 285, 324.
 Homeros, 122.
 l'Hôpital, G. F. de, 44, 46, 47, 74, 75.
 Hoppe, E., 185, 186, 192, 282, 284, 355—357, 360.
 Horn, W., 333.
 Horsley, S., 352.

- Hough, G. J., 89, 92.
 Hough, G. W., 92.
 Howard, O. O., 192.
 Hsia-hou Yang, 193.
 Hsiang Ming-ta, 199.
 Hsing Yun-lu, 198.
 Hsü Yu-t'ing, 198—200.
 Hudde, J., 267, 268.
 Huggins, W., 359, 363.
 Hultsch, Fr., 101—110, 113, 115, 132, 133, 150, 165, 341.
 Hunrath, K., 80, 81.
 Hutton, Ch., 352.
 Huygens, Chr., 51, 52, 69, 70, 73—76, 91, 185, 188, 282, 284.
 Hypsikles, 39.
 Ibel, Th., 89, 90.
 Ibn al Haitam, 201, 202, 204—206, 215, 216, 232, 233, 235, 293, 296, 307, 355, 357.
 Ibn Tufail, 307.
 Ideler, Chr. L., 332.
 Jackson, F., 361.
 Jackson, L. L., 241, 282.
 Jacobi, C. G. J., 89, 91, 250, 251, 254—256, 258, 259, 282, 285, 358.
 Jacquier, F., 353.
 Jahnke, E., 89, 92, 185, 189, 285.
 Jamblichos, 103, 130, 131, 135, 182.
 Janet, P., 282, 285.
 Janni, G., 325.
 Jansen, F., 282, 283.
 Janßen, J., 189, 359.
 Jartoux, 199.
 Jeans, J. H., 361.
 Jeremias, A., 89, 90, 185, 186.
 Jezienicki, M., 117.
 Joachimescu, A. G., 185, 189.
 Johannes Baconthorp, 58.
 Johannes Norfolk, 58.
 Johannes Pisanus, siehe Peckham.
 Johannesson, P., 283.
 Jordan, C., 319, 322, 323, 325.
 Jordanus Nemorarius, 59, 85, 167, 187, 268, 357.
 Jordanus Saxo, 167.
 Jouguet, E., 89, 90, 185, 186, 282, 283.
 Jourdain, Ph. E. B., 282, 285.
 Jung, H., 192.
 Junge, G., 98, 110, 113, 133, 355, 357.
 Juynboll, Th. W., 205.
 Kallias, 129.
 Kallippos, 332, 333.
 Kamal al-Din al Farisi, siehe El-Farisi.
 Kanghy, 199.
 Kant, I., 278.
 Kapteyn, W., 282.
 Karpinski, L. C., 185, 186, 355, 357, 361.
 Kästner, A. G., 80, 188, 285, 344.
 Kaye, G. B., 89, 90, 289.
 Kean, H. P., 93.
 Kelvin, siehe Thomson.
 Kepler, J., 51, 89, 91, 149, 188, 282, 284.
 Kern, H., 289—292.
 Kester, F. E., 191.
 Kewitsch, G., 355, 356.
 Keyser, C. J., 90.
 Kirilov, G., 189.
 Kirkman, T. P., 322.
 Klein, F., 10, 12, 324, 328, 363.
 Klug, J., 284, 357.
 Klug, R., 89, 91, 282, 284.
 Klügel, G. S., 278.
 Kluyver, J. C., 282.
 Knoche, W., 287.
 Knopp, O., 188.
 Köbel, J., 345.
 Kohlrauch, F., 288, 359.
 Kohn, G., 192.
 Königsberger, L., 250, 355, 359.
 Köppen, W., 89, 92.
 Kopernikus, N., 51, 90, 187, 284, 330, 331, 334, 335, 357.
 Korff, J. A. von, 310.
 Korkin, A., 359.
 Korn, A., 192.
 Korteweg, D. J., 185, 188.
 Kowalewski, G., 44, 191.
 Krafft, G. W., 313.
 Kraft, J. E., 72.
 Krause, M., 282, 286.
 Krazzer, A., 192, 250, 355, 358.
 Kremser, V., 95.
 Krienelke, K., 185, 188.
 Kristian von Prachatic, 58.

- Kritias, 117.
 Kroll, W., 103, 132, 133, 151.
 Kronecker, L., 323, 324, 326.
 Krüger, L., 356.
 K'u Ch'ang-fa, 199.
 Kühner, R., 112.
 Künßberg, H., 338.
 Kunz, J., 191.
 Kuo Shou-ching, 197.

L
 Laby, T. H., 93.
 Laches, 136.
 Lagrange, J. L., 52, 95, 188, 317—319, 334, 355, 358.
 Lahire, Ph. de, 310—313.
 Lambert, J. H., 188.
 Lampa, A., 191.
 Lampe, E., 89—91, 185, 186, 189, 282, 283, 355, 356, 359, 360.
 Lana, G., 358.
 Lancaster, A., 359.
 Lange, G., 282, 284.
 Langeren, M. F. van, 188.
 Laodamas, 126.
 Laparewicz, A., 355, 359.
 Laplace, P. S., 52, 251—253, 276.
 Lassen, Kr., 290.
 Laurent, H., 189.
 Lauricella, G., 362.
 Lawton, E. E., 93.
 Lazzarini, M., 87.
 Lebon, E., 89, 92, 185, 189, 282, 283, 285, 355, 359.
 Lecchi, A., 353.
 Lechallas, G., 357.
 Lee, S., 161.
 Lefebvre, B., 11, 277.
 Lefort, F., 70, 77.
 Legendre, A. M., 188, 259, 278.
 Leibniz, G. W., 6, 43—46, 52, 69—77, 79, 80, 83, 84, 91, 178, 188, 252, 268, 274, 275.
 Le Seur, Th., 353.
 Lespialt, G., 359.
 Leupold, J., 161—163.
 Leutmann, J. G., 313.
 Leverrier, U. J. J., 52.
 Levi ben Gerson, 282, 284.
 Levi Civita, T., 282, 285.

 Levy, J., 35.
 Li Ch'un-fêng, 197.
 Li Shan-lan, 199.
 Libri, G., 10, 11, 34, 356.
 Lie, S., 324, 325.
 Liebmann, H., 89, 90, 355, 356.
 Lind, B., 282, 283.
 Lindelöf, L. L., 359.
 Lindhagen, A., 261.
 Ling, G. H., 93.
 Liouville, J., 321.
 Liu Hsian, 193.
 Liu Hui, 193—195, 197, 198.
 Lockwood, P., 282, 283.
 Longley, W. R., 90, 93.
 Lorenzoni, G., 330.
 Loria, G., 1, 2, 5—7, 10—13, 46, 78, 79, 86, 89, 91, 92, 110, 135, 146, 185, 186, 189, 282, 283, 330, 333, 355, 356.
 Löwy, A., 324.
 Löwy, M., 359.
 Lüdtke, W., 338.
 Lullius, R., 57.
 Lutoslawski, W., 117, 120.

M
 Maclaurin, C., 52, 81, 91.
 Maes, J., 186.
 Magliabechi, A., 275.
 Mahaviracarya, 357.
 Mahler, E., 90.
 Maillet, E., 322.
 Manero, 203.
 Maennchen, Ph., 188.
 Mannheim, A., 89, 92.
 Mannoury, G., 186.
 Mansion, P., 185, 186, 278, 355, 358.
 Manville, O., 89, 90, 185, 189, 282, 285.
 Marcolongo, R., 355, 358.
 Marie, M., 44, 45.
 Maroger, A., 185, 186.
 Marriott, R. W., 94.
 Martin, T. H., 333.
 Mascart, E., 285, 359.
 Maschke, H., 189, 328.
 Mason, M., 362.
 Massau, J., 359.
 Mathieu, E., 322.
 Matteucci, V. R., 95.
 Maurolico, F., 149, 187, 237.

- Mayer, A., 285.
 Mc Kensie, A. S., 362.
 McClelland, J. A., 191.
 Mehmke, R., 192, 355, 357.
 Mei Kou-ch'eng, 199.
 Mei Wen-ting, 197, 199.
 Meißner, E., 362.
 Meitner, L., 90, 355.
 Melanderhjelm, D., 354.
 Menabrea, L. F., 359.
 Menaichmos, 50, 149, 203.
 Menelaos, 208, 233.
 Menon, 111.
 Mercator, N., 72, 272, 273.
 Metius, A., 196.
 Meyer, E., 285, 288.
 Meyer, Kirstine, 355, 357.
 Meyermann, B., 94.
 Mikami, Y., 89—91, 193, 200, 282, 284, 355, 356.
 Milhaud, G., 185, 187.
 Miller, G. A., 89, 92, 317, 329, 355, 356, 359.
 Miller, J., 191.
 Millosevich, E., 355, 359.
 Ming An-t'u, 199.
 Minkowski, H., 92, 285, 331, 359.
 Minor, R. S., 94.
 Mises, R. von, 94.
 Mitchell, U. G., 362.
 Mitchell, W. M., 362.
 Mittag-Leffler, G., 355, 359.
 Mohr, G., 71, 72.
 Moivre, A. de, 52.
 Mollweide, C. B., 278.
 Mönnichmeyer, K., 191.
 Montmort, P. R. de, 351, 352.
 Montucla, J. E., 13, 80, 174, 333.
 Moore, C. A., 191.
 Moore, C. L. E., 94.
 Moore, E. H., 328.
 Moerbeke, Wilhelm von, 233, 236.
 Mordechai Finzi, siehe Finzi.
 Morehead, J. C., 94.
 Morse, H. W., 362.
 Mortet, V., 90, 185, 187.
 Moser, Chr., 185, 189.
 Moula, F., 315.
 Muhammed ben Musa el Kwaresmi, siehe Alkhwarismi.
 Muir, Th., 282, 285, 355, 358.
 Müller, Ad., 89, 90, 185, 188, 355, 357.
 Müller, Carl H., 185, 189.
 Müller, Conrad H., 6, 10, 12, 95, 288, 362, 363.
 Müller, E., 192.
 Müller, Felix, 89, 91, 185, 186, 189, 282, 284, 285, 355—357.
 Müller, G. F., 310, 314.
 Müller, H., 110.
 Müller, R., 192.
 Munk, E., 118—120.
 Muratori, L. A., 275.
 Murhard, F. W. A., 72.
 Muth, P., 189.
 Müttrich, G. A., 189.
 Müttrich, J. A., 189.
 M'Weeney, H. C., 191.
 Naber, H. A., 89, 90, 185, 186, 282, 283.
 Naccari, A., 89, 91, 355, 359.
 Nallino, C. A., 157, 334.
 Napier, J., 51.
 Nasir eddin, 156, 157.
 Natorp, P., 118, 187.
 Nemorarius, siehe Jordanus Nemorarius.
 Neper, siehe Napier.
 Nestle, W., 283.
 Netto, E., 323—325, 327, 328.
 Neuberg, J., 283.
 Neumann, C., 282, 286, 354.
 Neumann, Fr., 188.
 Neumayer, G. von, 92, 95.
 Newall, H. F., 94.
 Newcomb, S., 92, 95, 189, 285, 327.
 Newson, H. B., 288.
 Newton, I., 6, 51, 52, 69—74, 76—78, 90, 91, 188, 268, 284, 349, 351—354.
 Nichols, E. F., 94.
 Nikomachos, 103, 182, 185, 187.
 Nikomedes, 203.
 Northrup, E. F., 362.
 Nöther, E., 192.
 Nöther, M., 250, 257.
 Nyerup, R., 72.
 Oinopides, 130.
 Olbers, W., 282, 285.
 Oldenburg, H., 69—72, 77, 84.

- Olivier, T., 91.
 Olleris, A., 55.
 Omar al-Khayyami, 203.
 Omont, H., 89, 90.
 Oresme, N., 187, 335.
 Oriani, B., 334.
 Oseen, C. W., 94.
 Ostwald, W., 251, 255.
 Oughtred, W., 161.
 Ozanam, J., 84.
- Paalzow, A., 359.**
 Paciulo, L., 90, 170, 180, 357.
 Paine, G. P., 94.
 Paoli, A., 282, 284.
 Papperitz, E., 192.
 Pappos, 50, 134, 203, 341.
 Pardies, J. G., 91.
 Parmenides, 117, 124, 125.
 Partridge, S., 161—163.
 Pascal, Bl., 52.
 Pasch, M., 185, 189.
 Pauly, A., 101, 102, 106, 113, 115.
 Peckham, J., 233, 237, 344.
 Pegram, G. B., 94.
 Pelicani, B., 185, 187.
 Pellat, H., 192.
 Pellizzati, F., 241.
 Peltzer, A., 282, 284.
 Perott, J., 318.
 Perron, O., 188, 192, 362.
 Perry, J., 355, 359.
 Pertsch, W., 204.
 Petersen, J., 363.
 Peuerbach, G. von, 51, 169, 345.
 Pfeiffer, G., 185, 190.
 Phil . . . , siehe Fil . . .
 Piazzzi, G., 334.
 P'i Yen-tsung, 193
 Picard, E., 359.
 Pick, G., 192.
 Pick, Miß M., 362.
 Pierpont, J., 92, 323.
 Pincherle, S., 282, 286.
 Pisano, L., 16, 28, 30, 38—42, 51, 54, 57, 87, 268, 280.
 Pisanus, siehe Peckham.
 Pistelli, H., 103, 182.
 Pitcher, A., 362.
- Pittarelli, G., 355, 357, 358.
 Platon, 50, 97—99, 102—112, 114—132, 134—144, 146, 148—151, 154, 187, 203, 283, 331.
 Plutarchos, 145, 146.
 Plyan, H., 192.
 Poincaré, H., 92, 189, 282, 285, 317, 326, 355, 359.
 Poinsot, L., 317, 318.
 Poisson, S. D., 252, 253.
 Ponzer, E. W., 362.
 Poor, Ch. L., 362.
 Porta, J. B., 237.
 Possé, K. A., 355, 359.
 Prey, Cl., 192.
 Pringsheim, A., 177.
 Pringsheim, E., 188.
 Pritchett, C., 288.
 Proklos, 98, 103, 110, 126, 130—135, 142, 144, 146, 150, 151, 154, 187.
 Protagoras, 112, 122, 123, 128—130, 146.
 Prudhomme, S., 285.
 Ptolemaios, Kl., 50, 204, 231, 283, 292.
 Puiseux, V. A., 250, 256—259, 358.
 Pursar, F., 288.
 Pythagoras, 49, 90, 97, 98, 110, 128, 130, 133, 134, 142, 144, 149, 186, 288.
- Raeder, H., 117, 119.**
 Raffy, L., 359, 363.
 Ramus, P., 180, 284.
 Ranum, A., 356, 362.
 Ratdolt, E., 168, 262.
 Rayet, G., 355, 359.
 Recorde, R., 51.
 Regiomontanus, J., 51, 149, 169, 237, 241.
 Reiff, R., 273, 274.
 Reumont, A. von, 275
 Reuschle, C., 95.
 Riccati, J., 78, 79.
 Ricci, G., 89, 92.
 Riemann, B., 258.
 Riese, A., 183.
 Rießer, O., 91.
 Risner, F., 205.
 Ritter, A., 288.
 Ritter, Const., 116, 117, 136—140.
 Ritz, W., 95, 189.
 Robertus Anglicus, siehe Anglès.

- Roder, Chr., 237.
 Rodet, L., 289.
 Rohde, E., 126.
 Rojas, F. de P., 286, 288
 Römer, O., 357.
 Roomen, A. van, 269.
 Rose, J., 185, 190, 355, 359.
 Rose, V., 152, 232, 236.
 Rosenhain, J. G., 250, 256, 259.
 Rosenkranz, K., 278
 Rosenmund, M., 189.
 Rosenthal, J., 204, 215.
 Rosmanith, G., 362
 Rost, 205
 Rothe, R., 192, 355, 359.
 Rothlauf, B., 106, 116.
 Rothrock, D. A., 95, 363.
 Rubens, H., 355, 359.
 Rudio, F., 89, 90, 92, 129, 130, 138, 185,
 190, 192, 282, 286, 355, 356
 Rudolff, Chr., 61, 66, 78, 87, 183, 238—
 243.
 Ruffini, F. P., 286, 288.
 Ruffini, P., 318, 319, 321, 325
 Russell, J. W., 192.

 Sacerdote, G., 15—36, 38, 41.
 Sachau, E. C., 289.
 Sachawi, siehe El-Sachawi
 Sacrobosco, J. de, 51, 357.
 Saint-Vincent, Grég. de, 288
 Saliger, R., 192.
 Salkowski, E., 192, 282, 285.
 Sanctis, P. de, 355, 360.
 Schaal, A., 199.
 Schäfer, Cl., 287, 362.
 Schaewen, P. von, 89, 91, 282, 284.
 Scheel, A., 355, 359.
 Scheibner, W., 286, 359.
 Schering, E., 324.
 Schiaparelli, G., 330—340, 363.
 Schilling, C., 282, 285
 Schindler, H., 153.
 Schlesinger, L., 185, 189, 282, 285.
 Schmid, Wilh., 117, 119, 128.
 Schmid, Wolfg., 171.
 Schmidt, E., 287.
 Schmidt, H., 102, 117.
 Schneider, J. G., 202.

 Schnorr von Carolsfeld, F., 233.
 Schogia ben Aslam, siehe Abu Kamil
 Schodja.
 Schöne, H., 94, 165.
 Schooten, F. van, 63—65, 78, 174—176.
 Schottenloher, K., 282, 284, 355, 357.
 Schoute, P. H., 282.
 Schreiber, H., siehe Grammateus.
 Schubart, W., 108.
 Schubert, F. W., 278.
 Schuch, F., 94.
 Schultze, F., 121, 122, 125.
 Schur, F., 324.
 Schur, I., 192.
 Schütte, F., 283, 355, 356.
 Schwarzschild, K., 94.
 Sedgwick, W. T., 48.
 Segner, J. A., 80, 278.
 Seki, T., 188, 284.
 Seleukos, 332.
 Sempilius, H., 347.
 Serret, J. A., 321.
 Sharpe, F. R., 362.
 Shaw, J. B., 282.
 Shearer, J. S., 287.
 Shedd, J. C., 94.
 Sherwin, M. E., 94.
 Siacci, F., 92.
 Sidler, G., 189.
 Sieber, 231.
 Silva, D. A. da, 188.
 Simon, M., 116, 145, 185—188, 355, 356,
 364.
 Simplicios, 129, 130, 138, 355, 356.
 Simpson, Th., 91.
 Sinclair, Miß M. E., 192.
 Singer, H. W., 284.
 Sisam, C. H., 94.
 Skinner, E. B., 362.
 Skutsch, R., 192.
 Slane, M. G. de, 203, 204.
 Slocum, S. E., 89, 92.
 Smith, B., 185, 188.
 Smith, D. E., 89, 91, 95, 170, 185, 187,
 200, 241, 243, 262, 282, 284, 355—357,
 363
 Smith, Edw., 89, 92.
 Socher, J., 119.
 Soha, H., 284.

- Sokoloff, A. P., 363.
 Sokrates, 99—101, 104, 112, 113, 118—
 126, 128—131, 138, 141.
 Soler, E., 192.
 Solon, 140.
 Sottas, J., 282, 283.
 Spence, B. J., 362.
 Sporos, 203.
 Stäckel, P., 83, 89, 91, 185, 188, 192, 252,
 281, 282, 284, 285, 355, 358.
 Stadler, H., 185, 282, 355.
 Stahl, I. M., 112.
 Stamper, A. W., 89, 185, 186.
 Stampioen, J. J., 63.
 Stein, J., 185, 187.
 Steiner, J., 364.
 Steinitz, E., 362.
 Steinschneider, M., 15, 35, 42.
 Stewart, G. W., 94.
 Stiborius, A., 345.
 Stickelberger, L., 324.
 Stieltjes, Th., 89, 92.
 Stifel, M., 51, 66, 87, 182, 183.
 Stillcke, 355, 357.
 Stirling, J., 354.
 Stodola, A., 185, 189.
 Stölzle, R., 284.
 Stone, J. C., 287.
 Story, W. E., 327.
 Strachey, R., 189.
 Stringham, W. I., 189, 192.
 Stritter, J. G., 310, 314.
 Stromquist, C. E., 94.
 Strunz, F., 358.
 Stübler, E., 192, 362.
 Sturm, A., 169—171, 282, 345, 347.
 Sturm, R., 95, 355, 358.
 Sudhoff, K., 185, 186, 282, 355.
 Sühling, R., 94.
 Suidas, 125—127, 154.
 Sun-Tsu, 193.
 Susemihl, Fr., 118, 121, 122, 125.
 Suter, H., 15, 33, 89, 90, 156, 157, 166,
 167, 185, 187, 203, 282, 283.
 Swift, E., 94.
 Sylow, L., 253, 320, 324, 325.
 Sylvester, J. J., 322, 327, 328.
 Sylvester II, siehe Gerbert.
 Szabò, P., 282, 285.
 Tabit ben Qurra, 203, 277, 278.
 T'ai Hsü, 199.
 T'an T'ai, 198.
 T'ang-Jô-wang, 199.
 Tannery, J., 89, 92, 185, 188, 320, 355,
 358.
 Tannery, M^{me} M., 185, 189.
 Tannery, P., 13, 106, 110, 112—114, 126,
 130, 143, 167, 189, 333, 355, 357.
 Tannstetter, G., 169, 171.
 Tartaglia, N., 51, 86, 87, 171, 172, 241,
 345, 346.
 Taudin, J. J., 90.
 Taylor, A. H., 192.
 Taylor, Br., 52.
 Tchaikowskij, M., 185, 186.
 Teixeira, F. G., 89, 185, 186, 282, 283,
 355, 356.
 Terpsion, 118, 119.
 Terry, E. M., 362.
 Thales, 49.
 Theaitetos, 97—102, 106—108, 110—128,
 130, 131, 133—135, 137, 138, 140—143,
 149—155.
 Thebit, siehe Tabit.
 Theodoros, 97, 99, 101—113, 115, 121—
 123, 126—131, 133—135, 138, 140, 143,
 148—150, 153—155.
 Theodosios, 269, 270.
 Theofrastos, 98, 151—153.
 Theon von Alexandria, 236.
 Theon von Smyrna, 103.
 Theudios, 148, 149, 153.
 Thibaut, G., 340.
 Thideus, siehe Tideus.
 Thirion, J., 185—187.
 Thomas, A., 91.
 Thomson (Kelvin), W., 189, 359, 360.
 Tideus, 232, 233.
 Tilly, J. de, 286.
 Timaios, 117.
 Timerding, E., 89, 90, 192, 282, 285.
 Ting Ch'ü-chung, 200.
 Todd, Ch., 288.
 Torricelli, E., 91, 357.
 Toynbee, H., 95.
 Trenchant, J., 90.
 Tropfke, J., 46, 69, 176, 183, 185, 239,
 241, 242.

- Tsêng Chi-hung, 200.
 Tsêng Kuo-fan, 200.
 Tsin Chiu-shang, 196—198.
 Tsu Ch'ung chih, 195—197.
 Tu Tê-mei, 199, 200.
 Tun Yu-ch'êng, 199.
 Tydens, siehe Tideus.
 Tyler, H. W., 48, 185, 189.

Überweg, Fr. 118.
 Underhill, A. L., 94.
 Upton, C. B., 362.
 Urstitius, siehe Wursteisen.
 Usener, H., 141.
 Uylenbroek, P. J., 74—76.

Vacca, G., 89, 90, 185, 187, 282, 283.
 Vailati, G., 92, 189, 286.
 Valentin, G., 72.
 Valentiner, S., 362.
 Van der Hoecke, siehe Hoecke.
 Vandermonde, A. Th., 317.
 Vargas y Aguirre, J. de, 355, 356.
 Vassura, G., 355, 357.
 Vaux, C. de, 157.
 Velten, W., 192.
 Viaene, E., 185, 186.
 Viète, F., 51, 266, 270, 271, 284.
 Vinci, L. da, 187, 284, 357.
 Vitruvius Pollio, 187.
 Vivanti, G., 185, 189, 244, 247, 355, 358.
 Vogel, H. C., 189.
 Vogl, S., 185, 187, 205, 236, 237, 293.
 Vogt, H., 97, 98, 108, 128, 134, 185, 187, 282, 283.
 Voltaire, F. M. A., 336.
 Volterra, V., 282, 286.
 Von der Mühl, K., 192.
 Voß, A., 89, 90, 181, 186, 243, 282, 283, 355, 356.
 Vries, H. de, 282.

Wachsmuth, O., 202.
 Wade, H. T., 185, 190.
 Wallenberg, G., 189.
 Wallis, J., 52, 65—67, 70, 74—77, 80, 84, 177.
 Wallner, C. R., 108, 344.
 Wälsch, E., 192.
 Wang Fan, 193, 194.

 Wang Yüan-chi, 198.
 Wangerin, A., 185, 188.
 Wappler, E., 59.
 Waring, E., 285.
 Waessenaer, J. van, 63.
 Wasteels, C. E., 94.
 Waetzmann, E., 285.
 Weber, A., 290.
 Weber, H., 323, 326.
 Wei Chih, 196, 197.
 Weiherstraß, K., 139, 250, 355, 358, 359.
 Weingarten, J., 363.
 Weiß, E., 355, 359.
 Weiß, P., 185, 189.
 Weißenborn, H., 172, 277.
 Wellisch, E. M., 362.
 Wendelin, G., 90.
 Wendell, G. B., 362.
 Werner, J., 89, 90.
 Wertheim, G., 238, 239.
 Westermann, A., 202, 235, 236.
 Whish, 289.
 White, M. B., 362.
 Widman, J., 59, 182, 183, 263.
 Wiedemann, E., 90, 156, 185, 187, 201, 202, 204—206, 215, 232, 233, 237, 282, 283, 293, 306, 307, 355—357.
 Wieleitner, H., 89, 91, 356.
 Wien, W., 355, 360, 362.
 Wiener, H., 192.
 Wilczynski, E. J., 192, 362.
 Wilhelm, B., 355, 358.
 Wilhelm von Moerbeke, siehe Moerbeke.
 Wills, A. P., 94.
 Wilson, A. H., 362.
 Wilson, H. A., 94.
 Wilson, E. B., 189, 283.
 Wilson, R. E., 94.
 Wily, J. H., 94.
 Windelband, W., 118.
 Wingate, E., 161.
 Winkelmann, A., 363.
 Winkler, W., 363.
 Winsheim, C. N., 310, 313, 314.
 Wirtinger, W., 192.
 Wirtz, K. W., 287.
 Wissowa, G., 101, 102, 106, 113, 115.
 Witelo, 233, 236, 284.
 Witt, J. de, 176.

- | | |
|--|--|
| <p>Witting, A., 355, 360.
 Wohlrab, M., 110
 Wohlwill, E., 185, 188, 282, 284.
 Wolf, R., 336.
 Wolff, Chr., 80.
 Wolff, H. L., 362.
 Wölffing, E., 279.
 Wood, Ruth, 192.
 Wöpcke, F., 116, 134, 135, 156, 203, 215.
 Worm, J., 72.
 Wren, Chr., 52.
 Wright, J. E., 288, 360.
 Würschmidt, J., 307.
 Wursteisen, Chr., 241.</p> <p>Xenofon, 131.
 Xenokrates, 98, 146, 151—154.</p> | <p>Yen Shih-lung, 198
 Young, J. W., 362.
 Young, J. W. A., 328
 Yüen Yüen, 194, 197—199.</p> <p>Zaremba, S., 185, 188.
 Zeller, E., 118, 119, 121, 122, 124, 125,
 141, 151, 152.
 Zandrini, B., 79.
 Zenon, 108, 124, 145, 147.
 Zermelo, E., 287.
 Zeuner, G., 286.
 Zeuthen, H. G., 58, 106, 114, 115, 132,
 133, 145, 177, 185, 187, 201, 236, 280,
 355, 356.
 Ziegler, J., 284, 357.
 Zühlke, P., 355, 359.</p> |
|--|--|

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.
DEC 22 1910

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN

VON

GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

3. FOLGE. 10. BAND. 4. HEFT.

MIT DEM BILDNIS VON G. SCHIAPARELLI ALS TITELBILD
UND 9 TEXTFIGUREN.

AUSGEGEBEN AM 15. NOVEMBER 1910.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

Dritte Folge.

Herausgegeben von G. Eneström in Stockholm, Grefturegatan 77¹

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3.

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Recensions-exemplare usw.) wolle man richten an den Herausgeber der Bibliotheca Mathematica,

Herrn G. Eneström, Stockholm (Schweden), Grefturegatan 77¹

oder an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, die um schnellste Weiterbeförderung an die Redaktion besorgt ist.

Die Herren Verfasser erhalten von größeren Aufsätzen 20 mit Umschlag versehene, von kleineren Aufsätzen usw. 10 Sonderabdrücke unentgeltlich; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

Jeder Band der Bibliotheca Mathematica umfaßt 4 Hefte und kostet 20 Mark; jährlich soll zunächst etwa ein Band ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

	Seite
<i>Titel und Inhaltsverzeichnis</i>	I—VI
<i>The two Aryabhatas.</i> By G. R. Kaye in Simla	289
<i>Ibn al Haitams Schrift über die sphärischen Hohlspiegel.</i> Von E. Wiedemann in Erlangen. (Mit 9 Textfiguren)	293
<i>Eine Legende von dem eisernen Fleiße Leonhard Eulers.</i> Von G. Eneström in Stockholm	308
<i>Historical sketch of the development of the theory of groups of finite order.</i> By G. A. Miller in Urbana	317
<i>Giovanni Schiaparelli quale storico dell' antica astronomia.</i> Di Gino Loria a Genova. (Mit Bildnis in Photographie als Titelbild).	330
<i>Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.</i> Von G. Eneström, A. Sturm	341
<i>Anfragen:</i>	
Über die Geschichte der Potenzreihe, deren Exponenten eine Potenzreihe n^{ter} Ordnung bilden. Von G. Eneström	350
<i>Rezensionen:</i>	
Gray, Bibliography of the works of I. Newton. Von G. Eneström	351
<i>Neu erschienene Schriften</i>	355
Autoren-Register. — Zeitschriften. Allgemeines. — Geschichte des Altertums. — Geschichte des Mittelalters. — Geschichte der neueren Zeit. — Nekrologe. — Aktuelle Fragen.	
<i>Wissenschaftliche Chronik</i>	361
Ernennungen. — Todesfälle. — Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften. — Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften. — Vermischtes.	
<i>Namenregister</i>	365



Soeben erschien in zweiter, verbesserter Auflage:

LUIGI BIANCHI
VORLESUNGEN
ÜBER
DIFFERENTIALGEOMETRIE

AUTORISIERTE DEUTSCHE ÜBERSETZUNG

VON

MAX LUKAT

[XVIII u. 721 S.] gr. 8. 1910 Geh. *M* 22.60, geb. *M* 24.60

Aus dem Vorwort des Verfassers zur zweiten Auflage.

Die Fortschritte auf dem Gebiet der Infinitesimalgeometrie in neuester Zeit, besonders im letzten Jahrzehnt, ließen eine Neubearbeitung der „Vorlesungen“ als wünschenswert erscheinen.

Die umfangreichste und wichtigste Erweiterung betrifft eine neue Theorie, die, von den Transformationen der Flächen konstanter Krümmung ausgehend, deren Methoden und Ergebnisse für alle Flächen verallgemeinert, die auf Flächen zweiten Grades abwickelbar sind. Auf das Problem, die Biegungsflächen der Flächen zweiten Grades zu bestimmen, hatten sich gerade in letzter Zeit die Bemühungen der Infinitesimalgeometer konzentriert, und seine Lösung, wie sie hier angegeben wird, ist diejenige, welche ich zum ersten Male im 34. Bande der „Mémoires des Savants Etrangers“ (Académie des Sciences, Paris, 1909), dann ausführlicher im dritten Bande der italienischen Originalausgabe (Pisa-Spörri, 1909) entwickelt habe. Diese Untersuchungen stellen im wesentlichen eine Weiterentwicklung der so fruchtbaren Ideen dar, mit denen Sophus Lie die Transformationstheorie der Flächen konstanter Krümmung bereichert hat, und die sich aus ihr ergebenden Methoden haben wahrscheinlich eine noch größere Tragweite, als bisher zutage getreten ist.

Die völlig neuen Kapitel, in denen die obige Theorie entwickelt wird, sind XVIII, XIX, XX und XXI, zum Teil aber auch noch XVII, von § 265 an, mit neuen Untersuchungen über die Zusammensetzung Bäcklundscher Transformationen und über Flächen, die auf imaginäre, aus ihnen sich ergebende Rotationsflächen zweiten Grades abwickelbar sind. Es folgt Kap. XVIII mit der Transformationstheorie der Flächen konstanter positiver Krümmung und Untersuchungen über die schönen Guichardschen Sätze über die Biegungsflächen der Flächen zweiten Grades, die mit letzteren Transformationen verknüpft sind. Kap. XVIII dient somit als Einführung in die drei folgenden Kapitel, in denen die Transformationstheorie auf alle Flächen erweitert wird, die auf die allgemeinen Flächen zweiten Grades abwickelbar sind.

Hinsichtlich sonstiger kleinerer Erweiterungen möchte ich auf die in §§ 112—115 unter der Bezeichnung „virtuelle Haupttangentialkurven“ eingeschalteten und auf die folgenden allgemeinen Sätze über Flächenverbiegungen, sowie noch auf die weiteren Untersuchungen im letzten Kapitel über Lamésche Flächenfamilien, die aus Flächen konstanter Krümmung bestehen, hinweisen.

Da sich durch Aufnahme dieser neuen Abschnitte der Umfang des alten Buches beträchtlich vergrößert hätte, andererseits Verleger und Verfasser übereinstimmend den Umfang der ersten Auflage nicht zu sehr überschritten wissen wollten, so habe ich es für zweckmäßig gehalten, mich hier auf die gewöhnliche Flächengeometrie zu beschränken und die beiden letzten Kapitel der ersten Auflage über die Grundlagen der Differentialgeometrie höherer Räume fortzulassen. Um so berechtigter erschien mir diese Kürzung infolge der Ankündigung eines umfassenden deutschen Werkes über diesen Gegenstand, das die Wünsche der mathematischen Leserkreise sicherlich in vollem Maße erfüllen wird. Somit konnte auch jetzt die Theorie der quadratischen Differentialformen (Kap. II) auf den binären Fall beschränkt werden, was für die Infinitesimalgeometrie der Flächen ausreicht. Auch dürfte diese Maßnahme dazu angetan sein, Anfängern die Lektüre des Buches zu erleichtern, und die bei der ersten Auflage gemachten Erfahrungen scheinen ihre Zweckmäßigkeit zu erweisen.

Zum Schlusse möchte ich noch Herrn Lukat für seine verständnisvolle Mühewaltung bei der Übersetzung und Drucklegung dieser „Vorlesungen“ meinen Dank aussprechen.

Pisa.

L. Bianchi.

Inhaltsverzeichnis.

Kap. I. Kurven doppelter Krümmung. Pag. 1—33. — Kap. II. Binäre quadratische Differentialformen. Pag. 34—57. — Kap. III. Krummlinige Koordinaten auf den Flächen. Konforme Abbildung. Pag. 58—83. — Kap. IV. Die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie. Pag. 84—116. — Kap. V. Die sphärische Abbildung nach Gauß. — Ebenenkoordinaten. Pag. 117—144. — Kap. VI. Geodätische Krümmung. — Geodätische Linien. Pag. 145—176. — Kap. VII. Aufeinander abwickelbare Flächen. Pag. 177—218. — Kap. VIII. Verbiegung der Linienflächen. Pag. 219—238. — Kap. IX. Evolutenflächen und Weingartenscher Satz. Pag. 239—261. — Kap. X. Strahlensysteme (Kongruenzen). Pag. 262—291. — Kap. XI. Unendlich kleine Verbiegungen der Flächen und Entsprechen durch Orthogonalität der Elemente. Pag. 292—316. — Kap. XII. *W*-Strahlensysteme. Pag. 317—344. — Kap. XIII. Die normalen Kreissysteme. Pag. 345—361. — Kap. XIV. Die Minimalflächen. Pag. 362—388. — Kap. XV. Das Plateausche Problem und die Schwarzsche Minimalfläche. Pag. 389—423. — Kap. XVI. Pseudosphärische Geometrie. Pag. 424—445. — Kap. XVII. Die pseudosphärischen Flächen und die Bäcklund'sche Transformation. Pag. 446—486. — Kap. XVIII. Transformationen der Flächen konstanter positiver Krümmung und ihre Beziehungen zu den Biegungsflächen der Rotationsflächen zweiten Grades. Pag. 487—515. — Kap. XIX. Transformationen B_k der auf das hyperbolische Paraboloid abwickelbaren Flächen. Pag. 516—564. — Kap. XX. Transformationen B_k der auf das einschalige Hyperboloid abwickelbaren Flächen. Pag. 565—591. — Kap. XXI. Transformationen B_k der auf andere Flächen zweiten Grades abwickelbaren Flächen. Pag. 592—624. — Kap. XXII. Allgemeine Sätze über dreifache orthogonale Flächensysteme. Pag. 625—645. — Kap. XXIII. Untersuchung einiger spezieller dreifacher Orthogonalsysteme. Pag. 646—674. — Kap. XXIV. Die aus Flächen konstanter Krümmung bestehenden Lamé'schen Flächenfamilien. Pag. 675—711. Sachregister. Pag. 712—721.

Aus den Urteilen über die erste Auflage.

„Die Verlagsbuchhandlung hat dem deutschen mathematischen Publikum durch die deutsche Ausgabe eines so ausgezeichneten Werks, wie es das Bianchische ist, einen dankenswerten Dienst geleistet. . . Nur darauf möchten wir hinweisen, daß die vorliegende deutsche Ausgabe sich von dem italienischen Original durch die Hinzufügung zweier, vom Verf. selbst redigierter Kapitel unterscheidet. Diese Kapitel beziehen sich auf die Theorie der n -dimensionalen Räume und behandeln besonders diejenigen dieser Räume, die nach den Festsetzungen von Riemann ein konstantes Krümmungsmaß besitzen. Allen Freunden der mathematischen Wissenschaft wird die einheitliche, lichtvolle und gedrängte Auseinandersetzung willkommen sein, die B. von Lehren und Anschauungen gibt, in die eine Einsicht zu gewinnen bisher das Studium einer umfangreichen und zerstückelten Literatur erforderte. Noch willkommener ist die Förderung der Geometrie der n -dimensionalen Räume, die in diesen Kapiteln enthalten ist. . . Dem Übersetzer Herrn M. Lukat können wir mit Vergnügen unsere Anerkennung der wohl gelungenen Übersetzung aussprechen.“

(J. Weingarten i. d. Deutschen Literaturzeitung.)

„Die Übersetzung ist, wie ausgedehnte Vergleichen mit dem Original ergeben haben, sorgfältig und geschickt gemacht. Daß der Übersetzer ausführliche Sach- und Literaturregister beigegeben hat, wird mit Dank begrüßt werden. Ganz

besondere Anerkennung aber verdient, daß er sich nicht auf den philologischen Teil der Arbeit beschränkt, sondern auch, unterstützt von einem ausgezeichneten Kenner dieses Gebietes, die Rechnungen und Formeln revidiert und die zahlreichen Druckfehler des Originals verbessert hat. . . . Die vorstehenden kurzen Angaben werden erkennen lassen, eine wie wertvolle Bereicherung der Literatur gerade diese beiden neu hinzugekommenen Kapitel (21/22) sind. Die darin enthaltenen lichtvollen und gedrängten Auseinandersetzungen werden, wie Weingarten gesagt hat, allen Freunden der mathematischen Wissenschaft willkommen sein; handelt es sich doch um ein Gebiet, in das eine Einsicht zu gewinnen bisher das Studium einer umfangreichen und zerstreuten Literatur erforderlich war; noch willkommener aber die Förderung der Geometrie der n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, die in diesen Kapiteln enthalten ist.“

(Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.)

„Die äußere Anordnung des Werkes ist sehr übersichtlich, durch Einteilung in Kapitel und genau überschriebene Paragraphen. Eine Inhaltsübersicht und ein Register erleichtern das Auffinden bestimmter Gegenstände. . . Wir dürfen die Besprechung des Buches nicht abschließen, ohne eine besondere Hervorhebung der Verdienste des Übersetzers, Herrn Lukat, der die mühevollen Arbeit in ausgezeichnete Weise durchgeführt hat.“ (J. Sommer i. Göttingische gelehrte Anzeigen.)

„Man kann sich nur freuen, daß das vortreffliche Werk Bianchis durch diese Übersetzung zugänglicher gemacht wird, zumal da die Übersetzung vom Verf. durch zwei ganz neue Kapitel bereichert worden ist, die den Schluß des zweiten Heftes bilden werden. B. wollte in seinem Werke, von dem heutigen Stande der Differentialgeometrie ein knappes, übersichtliches Bild geben, das auch für den Anfänger verständlich sein kann.“ (Literarisches Zentralblatt.)

„Ein hervorragendes Werk, dazu bestimmt, die Differentialgeometrie des Raumes in dem gegenwärtigen Stande schnell und übersichtlich darzustellen. Einzelheiten werden vermieden. . . Die Darstellung zeichnet sich durch lichtvolle Klarheit aus und ermöglicht ein schnelles Vordringen bis zu den neuesten Forschungen.“

(Dr. Holzmüller i. d. Zeitschrift für lateinlose höh. Schulen.)

„Das Werk Bianchis bietet im Verhältnis zu seinem Umfang einen ungemein reichhaltigen und übersichtlich geordneten Stoff und wird geeignet sein, auf kürzestem Wege zur Höhe des heutigen Standes der Flächentheorie zu führen.“

(Konr. Zindler i. d. Zeitschrift für das Realschulwesen.)



Bestellzettel.

Bei Buchhandlung in
bestellt der Unterzeichnete aus dem Verlage von B. G. Teubner in Leipzig
— fest — zur Ansicht:

Luigi Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie.
Autorisierte deutsche Ausgabe von Max Lukat. 1910. Geh.

M 22.60, geb. *M* 24.60

Ferner:

Ort und Wohnung:

Unterschrift:

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Über Elektronen.

Vortrag, geh. auf der 77. Versammlung Deutscher Naturforscher u. Ärzte in Meran.

Von Dr. W. Wien,

Professor an der Universität Würzburg.

2., die Fortschritte der Wissenschaft berücksichtigende Auflage.

[39 Seiten.] gr. 8. 1909. Geh. n. M. 1.40.

Seitdem der Begriff der Elektronen in die Wissenschaft eingeführt wurde, haben sich im Zusammenhang mit ihm eine Fülle ungeahnter neuer Naturvorgänge und weittragender theoretischer Folgerungen ergeben. In diesem Vortrage werden die wichtigsten Ergebnisse, die auf diesem Gebiete gewonnen sind, in einer auch dem Nichtfachmann faßlichen Form dargelegt. Dabei handelt es sich nicht nur um subtile Experimente und komplizierte Anordnungen von Apparaten, sondern auch um theoretische Probleme, zu deren Bewältigung häufig die äußerste Anspannung der von der mathematischen Analyse entliehenen Kräfte erforderlich ist.

Wiens Vortrag erregte seinerzeit durch die Klarheit des Ausdruckes und die geschickte Verständlichmachung schwierigster Untersuchungen berechtigtes Aufsehen. Ihn noch besonders zu empfehlen, ist überflüssig. Nur darauf sei hingewiesen, daß seine Lektüre auch für die Schüler der obersten Klassen sehr angezeigt wäre. Den Vortrag begleiten 29 Anmerkungen. Die Ausstattung des Heftes ist sehr vornehm.

(Zeitschrift für das Realschulwesen.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Vorlesungen über Variationsrechnung

von Dr. Oskar Bolza,

Professor der Mathematik an der Universität Chicago.

Umgearbeitete und stark vermehrte deutsche Ausgabe der „Lectures on the Calculus of Variations“ desselben Verfassers. [IX, 705 u. 10 S. Anhang.]

gr. 8. 1909. Geh. n. M. 19.—, in Leinw. geb. n. M. 20.—

Die Absicht des Verfassers ist, in Form eines Lehrbuchs eine Darstellung der modernen Variationsrechnung — wie sie sich unter der Einwirkung der kritischen Richtung in der Infinitesimalrechnung, vor allem aber unter dem Einfluß der epochemachenden Entdeckungen von Weierstraß in den letzten dreißig bis vierzig Jahren entwickelt hat — in ihren Hauptzügen zu geben.

Um das Buch einem größeren Leserkreis zugänglich zu machen, ist die Darstellung — wenigstens in den ersten Kapiteln — elementarer gehalten als in der englischen Ausgabe, und die Sätze über reelle Funktionen reeller Variablen, von denen im Text Gebrauch gemacht ist, sind in einem Anhang zusammengestellt. Aus demselben Grunde ist die Zahl der Beispiele vermehrt worden, und außerdem sind zahlreiche Übungsaufgaben beigelegt worden. Ferner ist die Weierstraßsche Theorie, die in der englischen Ausgabe zum Teil nur in Form eines Referates gegeben ist, jetzt im einzelnen durchgeführt.

Die in den letzten Jahren erschienenen Untersuchungen sind berücksichtigt worden, soweit sie sich in den Rahmen des Buches einfügen ließen. Als gänzlich neu sind zu erwähnen: die Abschnitte über die Hamilton-Jacobische Theorie, über das allgemeinste Variationsproblem für einfache Integrale (das sogenannte „Lagrangesche Problem“) und über Doppelintegrale.

Ausführlicher Prospekt umsonst und postfrei vom Verlag.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Handbuch des mathematischen Unterrichts.

Von Geh. Reg.-Rat Dr. W. Killing, und Dr. H. Hovestadt,

Professor an d. Universität Münster i. W. Professor am Realgymnasium zu Münster i. W.

In 2 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band. Mit 32 Figuren im Text. [VIII u. 456 S.] 1910. n. M. 10.—

Das Buch ist aus der Überzeugung hervorgegangen, daß der heutige Standpunkt der Wissenschaft maßgebende neue Gesichtspunkte für den Unterricht liefert. Daher ist etwa die Hälfte des ersten Bandes einer orientierenden Darstellung der Grundlagen der Geometrie gewidmet, wobei dem Hilbertschen System von Axiomen eine bevorzugte Stellung eingeräumt ist. Die zweite Hälfte des Bandes behandelt die elementare Planimetrie. Wenn auch hier noch zuweilen wissenschaftliche Erörterungen eingeflochten sind, die sich zur unmittelbaren Verwendung im Unterricht nicht eignen, so haben wir uns doch bemüht, eine gewisse Vermittlung zwischen Wissenschaft und Unterricht anzubahnen. Auch dieser Teil will im wesentlichen orientieren, sowohl über den Stoff, der zur Verfügung steht, als auch über die Art, wie man ihn behandeln kann. Besonders eingehend sind die Partien besprochen, die erst in neuerer Zeit dem Unterricht einverleibt sind, wie Pol und Polare am Kreise, Kreishüchel, die Inversion und die neueren Lösungen des apollonischen Taktionsproblems.

Die Verfasser glauben mit guten Gründen die Auffassung vertreten zu können, daß durch Beseitigung bloß vermeintlicher Strenge und engeren Anschluß an gesicherte Forschungsergebnisse zugleich der Unterricht gehoben und der Schüler nicht unerheblich entlastet werden kann.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie.

Von Dr. Otto Staude,

Professor an der Universität Rostock.

Mit 387 Figuren. [VIII u. 447 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. M. 14.—

„... Die Absicht des Verfassers, ein für die Praxis brauchbares Buch zu schaffen, ist glänzend in die Tat umgesetzt. Das Werk ist nicht bloß in der ganzen Anlage durchsichtig disponiert, sondern auch im einzelnen ist die Ausführung so übersichtlich wie nur denkbar; jeder Artikel ist mit einer besonderen, kurzen und treffenden Überschrift versehen, die zahlreichen (387) ungemein sauber ausgeführten Figuren erleichtern eine schnelle Übersicht über die jedesmal in Frage kommenden Begriffe und Benennungen. Häufig gebrauchte Formelsysteme sind vollständig aufgestellt, auch in verschiedenen Bezeichnungsweisen, was bei der praktischen Anwendung des Buches viel Zeit erspart; auch das ausführliche, alphabetische Register am Schlusse ist sehr angenehm.“

(Archiv der Mathematik und Physik.)

„... Dieser Zweck wird in ausgezeichnete Weise erfüllt. ... Die Darstellung ist scharf und klar. ... Die Figuren sind nicht nur äußerst zahlreich und sehr gut wiedergegeben, sondern so klar und durchdacht entworfen, daß sie eine wesentliche Unterstützung des Textes ausmachen. Überall sieht man, daß der Stoff nicht nur von wissenschaftlichen Gesichtspunkten, sondern auch nach methodisch-unterrichtlichen Prinzipien gründlich durchgearbeitet ist. Ohne auch nur im mindesten zu übertreiben, kann man das beigefügte Literaturverzeichnis als vorbildlich bezeichnen.“

(Jahresbericht über das höhere Schulwesen.)

Hierzu Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig, die wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.



